THEORIE DE HODGE ET CARACTERISATION DES SURFACES COMPACTES A PREMIER NOMBRE DE BETTI PAIR

SAN SATURNINO Jean-Christophe

12 juin 2009

Table des matières

Introduction

Le but principal de ce mémoire est d'étudier les différents groupes de cohomologie des variétés compactes riemanniennes et kählériennes ainsi que de caractériser les surfaces compactes à partir de la dimension de ces groupes de cohomologie.

Dans la première partie, après quelques rappels sur les formes différentielles, on étudie la théorie de Hodge avec pour objectif de décrire le groupe de Picard d'un espace projectif complexe. Dans la deuxième partie, on montre qu'une surface complexe compacte est kählérienne si et seulement si son premier nombre de Betti est pair.

Qu'est-ce que la théorie de Hodge ? Soit X une variété compacte riemannienne, on note $\mathcal{A}^k(X)$ l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Lambda^k T_X^\star$. Soit dV une forme volume sur X, il est alors possible de définir un produit scalaire global :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^k(X) \otimes \mathcal{A}^k(X) &\to \mathbb{R} \\ (\eta, \eta') &\mapsto \int_X \langle \eta, \eta' \rangle \, dV \end{aligned}$$

et on note $\|.\|$ la norme associée. On se pose alors la question suivante :
est-il possible, pour chaque classe de cohomologie $\gamma \in H^k_{DR}(X)$, de trouver un représentant ψ qui soit de norme minimale ?
La théorie de Hodge nous apporte une réponse positive à cette question. Si on note $B^k(X) = Im\{d : \mathcal{A}^{k-1}(X) \to \mathcal{A}^k(X)\}$, alors on peut montrer qu'une forme d-fermée ψ est de norme minimale dans $\psi + B^k(X)$ si et seulement si $d^\star\psi = 0$, où $d^\star$ est *l'adjoint formel* de d. De plus, si une telle forme existe, elle est unique.

On remarque alors que les solutions de ce problème sont les formes qui vérifient :

$$\Delta\psi = (dd^\star + d^\star d)\psi = 0.$$

On appelle alors Δ *l'opérateur de Laplace-Beltrami* et l'ensemble de ces formes *l'espace des k-formes harmoniques* noté $\mathcal{H}^k(X)$. La question précédente

se reformule ainsi :
est-ce que l'application $\mathcal{H}^k(X) \to H^k_{DR}(X)$*, qui est injective, est un isomorphisme d'espaces vectoriels ?*
Pour démontrer ceci il nous faut passer par la théorie des opérateurs différentiels, on utilisera notamment *l'inégalité de Gårding* et *le théorème de finitude* pour un opérateur elliptique.

Une application intéressante est *le théorème de dualité Poincaré* qui nous donne, pour un fibré vectoriel E possédant une connexion plate :

$$\left(H^k_{DR}(X,E)\right)^\star \simeq H^{n-k}_{DR}(X,E^\star).$$

De même, si on considère une variété complexe munie d'une métrique hermitienne d-fermée (on dit alors que la variété est *kählérienne*), alors on a le même type de résultats entre les (p,q)-formes harmoniques et le (p,q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault. On en déduit alors *le théorème de dualité de Serre* :

$$(H^{p,q}(X,E))^\star \simeq H^{n-p,n-q}(X,E^\star).$$

Dans le chapitre 5, on s'intéresse plus particulièrement aux liens entre les groupes de cohomologie de De Rham et de Dolbeault. La question que l'on se pose ici est :
sachant que $\Lambda^k T^\star_X = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^\star_X$*, a-t-on le même type de résultat au niveau de la cohomologie ?*
Le théorème de décomposition de Hodge dans le cas des variétés compactes kählériennes nous donne :

$$H^k_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

On a également une *symétrie de Hodge* :

$$\overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})} \simeq H^{q,p}(X,\mathbb{C}).$$

Si on note alors $b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X,\mathbb{C})$ (*nombre de Betti*) et $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ (*nombre de Hodge*) on a alors :

$$b_k = \sum_{p=0}^{k} h^{p,k-p} \text{ et } h^{q,p} = h^{p,q}.$$

En particulier on remarque que les b_{2k+1} sont pairs. Si X est une surface compacte kählérienne on a alors :

$$b_1 = h^{0,1} + h^{1,0} = 2h^{0,1}.$$

Le problème inverse est alors :
si b_1 est pair, la variété complexe compacte est-elle kählérienne ?
On étudie le cas des surfaces dans la deuxième partie.

Le deuxième théorème important du chapitre 5 est *le théorème de Lefschetz difficile* qui nous donne les isomorphismes :

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \simeq H^{2n-k}_{DR}(X, \mathbb{C})$$

et

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \simeq H^{n-q,n-p}(X, \mathbb{C})$$

pour des variétés kählériennes compactes. Ce théorème est utile dans l'étude des variétés projectives complexes, il répond à la question :
quelle différence y-a-t-il du point de vue topologique (c'est-à-dire de l'homologie singulière) entre une variété complexe projective et la variété obtenue en coupant la première par un hyperplan projectif assez général ?

Pour terminer la première partie, on montre, grâce aux résultats précédents, que le groupe de Picard d'un espace projectif complexe est isomorphe à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que les seuls fibrés en droites inversibles sont les $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, on étudie un problème posé par Kodaira qui est en fait le problème inverse posé par *le théorème de décomposition de Hodge* :
une surface complexe compacte à b_1 pair est-elle kählérienne ?
Ce résultat est en fait déjà connu, on sait grâce au *théorème de Siegel* que la dimension algébrique de X, une surface complexe compacte, notée $a(X)$, est $0, 1$ ou 2.
Si $a(X) = 2$, Chow et Kodaira ont montré que X est projective.
Si $a(X) = 1$, Kodaira a montré qu'elle était elliptique et Miyaoka a démontré que les surfaces elliptiques sont kählériennes.
Enfin si $a(X) = 0$, Kodaira a montré que les seules surfaces existantes sont les tores complexes et les surfaces $K3$ qui sont en fait kählériennes par un résultat de Siu.
La démonstration proposée par Lamari est différente, elle démontre directement que toute surface ayant un b_1 pair est kählérienne. La preuve de ce résultat repose sur le *théorème de régularisation de Demailly.* On montre dans un premier temps qu'une surface est kählérienne si et seulement si elle possède un courant kählérien. On montre que les obstructions à l'existence d'un courant kählérien sont les courants positifs de bidimension $(1, 1)$ composante d'un bord (résultat qui repose essentiellement sur *le théorème de Hahn-Banach géométrique*). Mais dans notre cas, il s'agit de courants limites de formes dd^c-fermées, ce qui les rend plus maniables en cohomologie que les

courants positifs dd^c-fermés plus généraux. Enfin grâce à cette propriété on montre que si $b_1 = 2h^{0,1}$ alors la variété possède un courant kählérien donc elle est kählérienne.
Remarquons enfin que, par le théorème de Kodaira, pour une surface complexe compacte, on a toujours $b_1 = h^{0,1} + h^{1,0}$ et $b_1 = 2h^{0,1}$ ou $b_1 = 2h^{0,1} - 1$; ainsi une surface compacte ayant son premier nombre de Betti impair n'est pas kählérienne et réciproquement.

Je tiens à remercier M. Popovici pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir guidé tout au long de la rédaction de ce mémoire. Je remercie également Marie-Anne et Aurélien pour leurs nombreuses relectures et corrections fastidieuses et nocturnes.

Première partie

Théorie de Hodge

Chapitre 1

Fibrés vectoriels, connexions, courbures et cohomologies

1.1 Cas des variétés $\mathcal{C}^\infty$

***Définition* 1.1.1.** *Soit X un espace topologique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle $\mathbb{K}$-fibré vectoriel topologique de rang $r \in \mathbb{N}^*$ au-dessus de X, un espace topologique E muni d'une projection $p : E \to X$ (on dit que E est l'espace total et X la base du fibré). Il faut de plus que p satisfasse à l'axiome de trivialisation local suivant :*
il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_\alpha$ de X et $\theta_\alpha : E \cap p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ homéomorphisme tel que $p^{-1}(\{x\}) := E_x \simeq \mathbb{K}^r$ (isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel).
Si $r = 1$ on dit que le fibré est un fibré en droites.

Remarque : le fibré trivial est : $E = X \times \mathbb{K}^r$ et $\theta = id : E \simeq X \times \mathbb{K}^r$.

Notation : $E \cap p^{-1}(U_\alpha) := E_{\lfloor U_\alpha}$.

Soit $E \to X$ un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de rang r, considérons :

$$E_{\lfloor U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{K}^r \text{ et } E_{\lfloor U_\beta} \simeq U_\beta \times \mathbb{K}^r.$$

On obtient alors un homéomorphisme :

$$\theta_{\alpha,\beta} := \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

$$\theta_{\alpha,\beta}(x, \xi) = (x, g_{\alpha,\beta}(x)(\xi))$$

$$\text{où } g_{\alpha,\beta}(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^r).$$

On obtient donc pour toute famille d'ouverts trivialisants $(U_\alpha)_\alpha$ de E une famille de matrices de transition de E $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_r(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta$ vérifiant la relation de transition :

$$g_{\alpha,\beta}(x)\, g_{\beta,\gamma}(x) = g_{\alpha,\gamma}(x), \forall\, x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Conclusion : se donner un fibré vectoriel revient à se donner des matrices de transition vérifiant la relation précédente.

***Définition* 1.1.2.** *Si X est une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ ou une variété analytique complexe, on dit que le fibré est $\mathcal{C}^\infty$ ou holomorphe si les matrices de transition sont $\mathcal{C}^\infty$ ou holomorphes.*

Remarque : les sommes directes, la dualité et le produit tensoriel sont définis pour les fibrés de manière naturelle sur les fibres.

***Théorème* 1.1.1.** *Soit X une variété différentiable sur $\mathbb{K}$. La donnée d'un fibré $\mathcal{C}^\infty$ (resp. holomorphe) de rang r sur X équivaut à la donnée d'un $\mathcal{E}_X$-module (resp. d'un $\mathcal{O}_X$-module) localement libre de rang r où $\mathcal{E}_X$ est le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X (resp. où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X).*

***Définition* 1.1.3.** *Soit $p : E \to X$ un fibré vectoriel. On appelle section de E sur un ouvert $U \subset X$ une application $s : U \to E$ telle que :*

$$p \circ s = id_U \Leftrightarrow s(x) \in E_x,\ \forall x \in U.$$

Soit $\theta : E_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$ une trivialisation locale de E. On lui associe de manière unique le repère de E sur U suivant :
soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ où $e_i \in \Gamma(U, X) = \{$sections $\mathcal{C}^\infty$ (resp. holomorphes) de E sur U $\}$ tel que l'image de $e_1, \ldots, e_r \in E_x$ par θ soit la base canonique de $\mathbb{K}^r$, $\forall x \in U$. (On prend $\{f_1, \ldots, f_r\}$ base canonique de $\mathbb{K}^r$, $f_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ et on définit $e_j(x) = \theta_x^{-1}(f_j)$, $\forall j \in \{1, ..., r\}$).

Conclusion : la donnée d'une trivialisation locale $\theta : E_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$ équivaut à la donnée d'un repère local $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de E.

Soient $s \in \Gamma(U, X)$, $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert de X tel que $E_{|U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{K}^r$, on a alors :

$$\theta_\alpha \circ s_{|U \cap U_\alpha} : U \cap U_\alpha \to E_{|U \cap U_\alpha} \to (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{K}^r$$

$$(\theta_\alpha \circ s)(x) = (x, \sigma_{\alpha_1}(x), ..., \sigma_{\alpha_r}(x)), \forall\, x \in U \cap U_\alpha$$

où les $\sigma_{\alpha_1}, ..., \sigma_{\alpha_r} : U \cap U_\alpha \to \mathbb{K}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ (resp. holomorphes).

La relation de transition est alors :

$$\sigma_\alpha(x) = g_{\alpha,\beta}(x)\, \sigma_\beta(x), \forall\, x \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta$$

où $\sigma_\alpha(x) = (\sigma_{\alpha_1}(x), ..., \sigma_{\alpha_r}(x))$ et $\sigma_\beta(x) = (\sigma_{\beta_1}(x), ..., \sigma_{\beta_r}(x))$.

Conclusion : il y a équivalence entre la donnée d'une section $s \in \Gamma(U, X)$ et la donnée d'une famille de fonctions $\sigma_\alpha = (\sigma_{\alpha_1}, ..., \sigma_{\alpha_r})$ vérifiant la relation de transition.

Notation : si $E_{\lfloor U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$ est une trivialisation locale, soient un repère local $\{e_1, \ \dots\ , e_r\}$ et $s \in \Gamma(U, X)$, on note alors :

$$s = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \otimes e_j.$$

***Définition* 1.1.4.** *Soit $E \to X$ un fibré $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus d'une variété différentiable, soit $p = 0, ..., n = \dim X$, on appelle p-forme de classe $\mathcal{C}^k$ à valeur dans E une section de classe $\mathcal{C}^k$ du fibré $\Lambda^p\, T_X^\star \otimes E$. On note l'espace des p-formes : $\mathcal{C}^k(X, \Lambda^p\, T_X^\star \otimes E)$.*

Ecriture locale : soit $\theta : E_{\lfloor U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$ une trivialisation locale, si $s \in \mathcal{C}^k(X, \Lambda^p\, T_X^\star \otimes E)$, alors :

$$s_{\lfloor U}(x) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(x) \otimes e_j(x),\ \forall x \in U$$

où $\sigma_1, ..., \sigma_r$ sont des p-formes sur U à valeurs dans $\mathbb{K}$.

***Définition* 1.1.5.** *Soit $E \to X$ un fibré $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus d'une variété différentiable, une connexion D sur E est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 :*

$$D : \mathcal{C}^k(X, \Lambda^p\, T_X^\star \otimes E) \to \mathcal{C}^k(X, \Lambda^{p+1}\, T_X^\star \otimes E)$$

satisfaisant à la règle de Leibnitz :

$$D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^{d^o f} f \wedge Du$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^k(X, \Lambda^q\, T_X^\star)\ ,\ \forall u \in \mathcal{C}^k(X, \Lambda^p\, T_X^\star \otimes E).$$

Ecriture locale : soit $\theta : E_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$ une trivialisation locale, on a :

$$Ds \simeq d\sigma + \Gamma \wedge s,\ s \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^p\, T_X^\star \otimes E)$$

où $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^1\, T_X^\star \otimes End(\mathbb{K}^r))$ est une matrice de 1-forme et d agit composante par composante sur $s \simeq \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_r)$.
De plus on a :

$$D^2 s \simeq (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) \wedge s.$$

***Théorème-définition* 1.1.1.** $d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ *est une matrice de 2-forme globale appelée l'opérateur (ou tenseur) de courbure de la connexion* D *noté* $\Theta(D)$.

Remarque : $\Theta(D) \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^2\, T_X^\star \otimes End(E))$ et $D^2 s = \Theta(D) \wedge s$.

***Définition* 1.1.6.** *Supposons que* X *soit munie d'une métrique hermitienne de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et que* $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}^r$ *soit donnée par un repère* $(e_\lambda)_\lambda$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

$$\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^p\, T_X^\star \otimes E) \times \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^q\, T_X^\star \otimes E) \to \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p+q}\, T_X^\star \otimes \mathbb{C})$$
$$(u, v) \mapsto \{u, v\}$$

$$\{u, v\} = \sum_{\lambda,\, \mu} u_\lambda\, \overline{v}_\mu\, \langle\, e_\lambda,\ e_\mu\, \rangle$$

est un accouplement bilinéaire, on dit qu'il est compatible avec la structure hermitienne s'il satisfait la règle de Leibnitz :

$$d\,\{u, v\} = \{Du, v\} + (-1)^{d^o u}\,\{u, Dv\}.$$

Remarque : si $(e_\lambda)_\lambda$ est orthonormé alors D est une connexion métrique hermitienne si et seulement si $\Gamma^\star = -\Gamma$ (Γ est anti-symétrique) et on a alors $\Theta(D)^\star = -\Theta(D)$.
En particulier $i\,\Theta(D) \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^2\, T_X^\star \otimes Herm(E))$.

Cas particulier : si L est un fibré complexe de rang 1 (on dit que c'est un fibré en droites), la forme de connexion Γ d'une connexion hermitienne D peut être vue comme une 1-forme à coefficients imaginaires purs :

$$\Gamma = i\,A \text{ (A réelle) et } \Theta(D) \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^2\, T_X^\star \otimes i\,\mathbb{R}).$$

En particulier $i\,\Theta(L)$ est une 2-forme fermée ($i\,\Theta(L) \simeq da + a \wedge a$).

***Définition* 1.1.7.** *La première classe de Chern de* L*, fibré en droites, est définie comme étant la classe de cohomologie :*

$$c_1(L)_\mathbb{R} = \{\frac{i}{2\pi}\,\Theta(L)\} \in H^2_{DR}(X, \mathbb{R}).$$

Remarque : la définition est indépendante de la connexion car si
$D_1 = Ds + B \wedge dB$ alors $\Theta(D_1) = \Theta(D) + dB$.

1.2 Cas des variétés analytiques

***Définition* 1.2.1.** *Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension n. On note $\Lambda^{p,q} T_X^\star$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p,q) sur X, c'est-à-dire :*

$$u = \sum_{|I|=p,\, |J|=q} u_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

où $dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p}$, $i_1 < ... < i_p$ et $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_{j_q}$, $j_1 < ... < j_q$. Enfin si on note :

$$d'u = \sum_{|I|=p,\, |J|=q,\, 1\leq k\leq n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k}\, dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

$$d''u = \sum_{|I|=p,\, |J|=q,\, 1\leq k\leq n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k}\, d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

on a :

$$d = d' + d''.$$

Remarque : $\Lambda^k T_X^\star = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T_X^\star$.

***Définition* 1.2.2.** *On appelle connexion de type (1,0) sur un fibré complexe $E \to X$ un opérateur différentiel d'ordre 1 :*

$$D' : \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^\star \otimes E) \to \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p+1,q} T_X^\star \otimes E)$$

satisfaisant à la règle de Leibnitz :

$$D'(f \wedge u) = d'f \wedge u + (-1)^{d^o f} f \wedge D'u$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p_1,q_1} T_X^\star)\ ,\ \forall u \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p_2,q_2} T_X^\star \otimes E).$$

On définit de même D'' connexion de type (0,1), on note alors $D = D' + D''$.

Ecriture locale : soit $\theta : E_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}^r$ une trivialisation locale, on a :

$$D'u \simeq d'u + \Gamma' \wedge u$$

$$D''u \simeq d''u + \Gamma'' \wedge u.$$

La métrique est hermitienne si et seulement si $\Gamma' = -\Gamma''^\star$, ainsi pour toute métrique hermitienne sur E, il existe une unique connexion D associée à une $(0,1)$-connexion donnée.
Si le fibré possède une structure holomorphe alors il existe une unique connexion

hermitienne dont la composante D'' est l'opérateur d'' vu à la définition 1.2.1, on l'appelle *la connexion de Chern* de E.

Dans un repère holomorphe local $(e_\lambda)_\lambda$ de $E_{|U}$, la métrique est donnée par la matrice hermitienne $H = (h_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu}$ où $h_{\lambda,\mu} = \langle\, e_\lambda,\ e_\mu \,\rangle$. On a alors :

$$\{u, v\} = \sum_{\lambda,\,\mu} h_{\lambda,\mu}\, u_\lambda \wedge \overline{v}_\mu = {}^t u \wedge H\overline{v}$$

$$d\{u, v\} = {}^t(du) \wedge H\overline{v} + (-1)^{d^{\circ}u}\, {}^t u \wedge (dH \wedge \overline{v} + H\overline{dv})$$

$$\begin{cases} Du \simeq du + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u \\ D' \simeq d' + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge \bullet \\ D'' = d'' \end{cases}$$

Ceci nous montre que :

$$D'^{\,2} = 0,\ D''^{\,2} = 0 \; et \; D^2 = D'D'' + D''D'.$$

On en conclut finalement que $\Theta(E) := \Theta(D)$ est une (1,1)-forme globale à valeurs dans $Herm(E)$.

***Proposition* 1.2.1.** *Le tenseur de courbure de Chern $\Theta(E)$ est tel que :*

$$i\,\Theta(E) \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{1,1}\, T_X^\star \otimes Herm(E)).$$

Si $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}^r$ est une trivialisation holomorphe et si H est la matrice hermitienne représentant la métrique le long des fibres de $E_{|U}$ alors :

$$i\,\Theta(E) \simeq id''(\overline{H}^{\,-1} d'\overline{H}) \; sur \; U.$$

Remarque : si $(z_1, ..., z_n)$ sont des coordonnées holomorphes sur X et si $(e_1, ..., e_r)$ est un repère orthonormé de E, on peut écrire :

$$i\,\Theta(E) = \sum_{1\le j,k\le n,\; 1\le\lambda,\mu\le r} c_{j,k,\lambda,\mu}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes e_\lambda^\star \otimes e_\mu.$$

1.3 Théorème de De Rham-Weil et cohomologie de Dolbeault

***Définition* 1.3.1.** *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau en groupe sur X espace topologique. On définit le groupe de cohomologie de X à valeur dans le faisceau $\mathcal{F}$ par :*

$$H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(\mathcal{F}^\bullet(X)).$$

***Théorème* 1.3.1 (de De Rham-Weil).** *Soit* $(\mathcal{L}^\bullet, d)$ *une résolution d'un faisceau* $\mathcal{F}$ *par des faisceaux* $\mathcal{L}^q$ *acycliques* ($H^s(X, \mathcal{L}^q) = 0$, $\forall s \geq 1$, $\forall q \geq 0$). *On a alors un isomorphisme fonctoriel :*

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) \simeq H^q(X, \mathcal{F}).$$

Preuve : on sait que la suite de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

est exacte. Si on note $Z^q = \ker d^q$ alors $Z^0 = \mathcal{F}$ et pour $q \geq 1$ on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Z^{q-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} Z^q \longrightarrow 0\ .$$

Par le lemme du serpent on a une suite exacte longue de cohomologie :

$$H^s(X, \mathcal{L}^{q-1}) \xrightarrow{d^{q-1}} H^s(X, Z^q) \xrightarrow{\partial^{s,q}} H^{s+1}(X, Z^{q-1}) \longrightarrow H^{s+1}(X, \mathcal{L}^{q-1}) = 0\ .$$

Si $s \geq 1$, alors $H^s(X, \mathcal{L}^{q-1}) = 0$ et on a :

$$H^s(X, Z^q) \simeq H^{s+1}(X, Z^{q-1}).$$

Si $s = 0$, $H^0(X, \mathcal{L}^{q-1}) = H^0(\mathcal{L}^{q-1}(X)) = \mathcal{L}^{q-1}(X)$ et $H^0(X, Z^q) = Z^q(X)$. Donc :

$$H^0(X, \mathcal{L}^{q-1}) \xrightarrow{d^{q-1}} H^0(X, Z^q) \xrightarrow{\partial^{0,q}} H^1(X, Z^{q-1}) \longrightarrow 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}^{q-1}(X) \xrightarrow{d^{q-1}} Z^q(X) \xrightarrow{\partial^{0,q}} H^1(X, Z^{q-1}) \longrightarrow 0$$

On a alors par le théorème d'isomorphisme :

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) = Z^{q-1}/d^{q-1}\mathcal{L}^{q-1}(X) \overset{\tilde{\partial}^{1,q-1}}{\simeq} H^1(X, Z^{q-1}).$$

Il vient alors l'isomorphisme :

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) \xrightarrow{\tilde{\partial}^{1,q-1}} H^1(X, Z^{q-1}) \xrightarrow{\partial^{1,q-1}} H^2(X, Z^{q-2}) \xrightarrow{\partial^{2,q-2}} \cdots \xrightarrow{\partial^{q-1,1}} H^q(X, Z^0) = H^q(X, \mathcal{F})$$

C'est-à-dire :

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) \simeq H^q(X, \mathcal{F}).$$

Enfin cet isomorphisme est fonctoriel car pour tout morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et toute résolution $\varphi^\bullet : \mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{M}^\bullet$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^s(\mathcal{L}^\bullet(X)) \arrow[r] \arrow[d] & H^s(X, \mathcal{A}) \arrow[d] \\ H^s(\mathcal{M}^\bullet(X)) \arrow[r] & H^s(X, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

$\square$

Application à la cohomologie de Dolbeault :
Notons $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des formes différentielles de bidegré (p, q) à valeurs complexes et à coefficients $\mathcal{C}^\infty$.

***Lemme* 1.3.1 (de Dolbeault-Grothendieck).** *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert, $0 \in \Omega$, $u \in \mathcal{A}^{p,q}(\Omega)$ telle que $d''u = 0$.*
Si $q \geq 1$ alors il existe ω voisinage ouvert de 0 dans Ω tel qu'il existe $v \in \mathcal{A}^{p,q}(\omega)$ tel que $u = d''v$ sur ω.

***Corollaire* 1.3.1.** *Le complexe de faisceaux $(\mathcal{A}^{p,\bullet}, d'')$ est exact en degré $q > 0$. Si $q = 0$ alors $\ker d'' = \Omega_X^p$ le faisceau des formes holomorphes de degré p sur X.*

Remarque : Soient X une variété analytique complexe, E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X, il existe un opérateur naturel d'' agissant sur $\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q}\, T_X^\star \otimes E)$.
Si $s = \sum\limits_{j=1}^{r} s_j \otimes e_j$ est une (p, q)-forme exprimée dans un repère holomorphe local de E, on peut définir $d'' = \sum\limits_{j=1}^{r} d''s_j \otimes e_j$.
Le lemme de Dolbeault-Grothendieck est alors valable aussi pour des formes à valeurs dans E.

***Définition* 1.3.2.** *Soient X une variété analytique complexe, E un fibré vectoriel holomorphe sur X. On définit le groupe de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, E)$ par :*

$$H^{p,q}(X, E) = H^q(\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,\bullet}\, T_X^\star \otimes E)).$$

***Théorème* 1.3.2 (d'isomorphisme de Dolbeault).** *Soient X une variété analytique complexe, E un fibré vectoriel holomorphe sur X, on note $\mathcal{O}(E)$ le faisceau des sections holomorphes de E. On a alors un isomorphisme canonique :*

$$H^{p,q}(X, E) \simeq H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(E)).$$

Preuve : soit $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ le faisceau des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda^{p,\bullet}\, T_X^\star \otimes E$. Le lemme 1.3.1 de Dolbeault-Grothendieck nous dit que $(\mathcal{A}^{p,\bullet}(E), d'')$ est une résolution acyclique du faisceau $\Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(E)$, ainsi pour conclure il nous suffit juste d'appliquer le théorème 1.3.1 de De Rham-Weil.

$\square$

Chapitre 2

Opérateurs différentiels et théorème de finitude

2.1 Opérateurs différentiels sur les fibrés vectoriels et adjoint formel

Soit M une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\dim_{\mathbb{R}} M = m$. Soient E et F des $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels sur M, $rg\, E = r$, $rg\, F = r\,'$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

***Définition* 2.1.1.** *Un opérateur différentiel (linéaire) de degré δ de E vers F est un opérateur $\mathbb{K}$-linéaire :*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{C}^\infty(M, E) &\to \mathcal{C}^\infty(M, F) \\ u &\mapsto Pu \end{aligned}$$

de la forme :

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \,\leq\, \delta} a_\alpha(x)\, D^\alpha u(x)$$

$E_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$, $F_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^{r'}$ étant trivialisés localement sur un ouvert de carte $U \subset M$ muni de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ et les coefficients $a_\alpha(x)$ étant des matrices $(a_{\alpha,\, \lambda,\, \mu}(x))_{1 \,\leq\, \lambda \,\leq r',\, 1 \,\leq\, \mu \,\leq\, r}$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

Remarque : $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\,\alpha_1}}{\partial\, x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\,\alpha_m}}{\partial\, x_m^{\alpha_m}}$.

***Définition* 2.1.2.** *Le symbole principal de P est défini par :*

$$\sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \,=\, \delta} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha,\ \forall\, \xi \in {}^{\mathbb{R}}T^\star M_x$$

avec $\xi = \sum_{j=1}^{m} \xi^j \, dx_j$ *et* $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m}$ *et* $\sigma_P(x,\xi) : E_x \to F_x$ *est un morphisme,* $\forall\, x \in M$, $\forall\, \xi \in {}^{\mathbb{R}}T^\star M_x$. *On a donc :*

$$\sigma_P : T_M^\star \to Hom(E,F).$$

P est dit elliptique si, $\forall\, \xi \in T_M^\star$, $\xi \neq 0$, $\forall x \in M$, $\sigma_P(x,\xi) : E_x \to F_x$ *est injectif.*

Remarques : si $t \in \mathbb{K}$ est un paramètre, $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{K})$, $u \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$:

$$e^{-t\, f(x)} P(e^{t\, f(x)} u(x)) = t^\delta \sigma_P(x, df(x))\, u(x) + \textit{ termes en } c_j(x)\, t^j,\ j < \delta.$$

Le symbole principal de $Q \circ P$ est :

$$\sigma_{Q\circ P}(x,\xi) = \sigma_Q(x,\xi)\, \sigma_P(x,\xi) \quad (\textit{produit matriciel}).$$

***Définition* 2.1.3.** *Supposons que M soit orientée et munie d'une forme volume* $dV(x) = \gamma(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$, $\gamma(x) > 0$ *une densité* $\mathcal{C}^\infty$. *Si E est un fibré vectoriel euclidien ou hermitien on définit :*

$$L^2(M,E) = \{u : M \to \Lambda^{p,q}\, T_M^\star \otimes E / \int_M |u(x)|^2 \, dV(x) < +\infty\}$$

où $u : M \to \Lambda^{p,q}\, T_M^\star \otimes E$ *est une forme à coefficients mesurables et* $u(x) \in T_{M_x}^\star \otimes E_x$ *qui est muni d'une structure euclidienne ou hermitienne induite par la forme volume.*
On munit cet espace du produit scalaire :

$$\ll u, v \gg = \int_M < u(x), v(x) > \ dV(x)$$

la norme L^2 *est alors définie par :*

$$\|u\|^2 = \int_M |u(x)|^2 \, dV(x).$$

Muni de ce produit scalaire l'espace $L^2(M,E)$ *est un espace de Hilbert.*

On va voir maintenant que tout opérateur differentiel admet un adjoint pour le produit scalaire de L^2 appelé *adjoint formel.*

***Proposition-définition* 2.1.1 (existence d'un adjoint formel).** *Soit* $P : \mathcal{C}^\infty(M,E) \to \mathcal{C}^\infty(M,F)$ *un opérateur différentiel. Il existe alors un unique opérateur differentiel* $P^\star : \mathcal{C}^\infty(M,F) \to \mathcal{C}^\infty(M,E)$ *appelé adjoint formel de P tel que pour toutes sections* $u \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$ *et* $v \in \mathcal{C}^\infty(M,F)$, *on a :*

$$\ll Pu,\ v \gg = \ll u,\ P^\star v \gg$$

où supp $u \cap$ *supp* v *est compact.*

Preuve :
unicité : soit $P : \mathcal{C}^\infty(M,E) \to \mathcal{C}^\infty(M,F)$ possédant deux adjoints formels $P^\star : \mathcal{C}^\infty(M,F) \to \mathcal{C}^\infty(M,E)$ et $Q^\star : \mathcal{C}^\infty(M,F) \to \mathcal{C}^\infty(M,E)$ tels que :

$$\ll Pu,\ v \gg = \ll u,\ P^\star v \gg = \ll u,\ Q^\star v \gg$$

$$\forall\, u \in \mathcal{C}^\infty(M,E),\ \forall\, v \in \mathcal{C}^\infty(M,F)$$

(ceci est bien défini car $\mathcal{C}^\infty(M,E) \subset L^2(M,E)$ et $\mathcal{C}^\infty(M,F) \subset L^2(M,F)$).
Montrons que $\forall\, v \in \mathcal{C}^\infty(M,F)$, $P^\star v = Q^\star v$.
Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(M,F)$, alors pour $u \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$ on a :

$$\ll u,\ P^\star v \gg = \ll u,\ Q^\star v \gg \Leftrightarrow \ll u,\ (P^\star - Q^\star)\, v \gg =\ 0$$

Soit $(f,g) \in L^2(M,E) \times L^2(M,F)$, par continuité de l'opérateur différentiel et par densité de $\mathcal{C}^\infty(M,E)$ à support compact dans $L^2(M,E)$, on peut étendre P et $P^\star$ à L^2 et :

$$\ll f,\ (P^\star - Q^\star)\, g \gg =\ 0\ \Rightarrow\ (P^\star - Q^\star)\, g = 0,\ \forall\, g \in L^2(M,F)$$

car $\ll .\, , . \gg$ est un produit scalaire sur $L^2(M,E)$. Donc $P^\star g = Q^\star g$ et en particulier $P^\star v = Q^\star v$.
existence : soit $Pu(x) = \sum\limits_{|\alpha|\,\le\,\delta} a_\alpha(x)\, D^\alpha u(x)$ le développement de P dans des trivialisations de E et de F dans des repères orthonormés et des systèmes de coordonnées locales sur $U \subset M$ ouvert. On suppose de plus que *supp* $u \cap$ *supp* v est compact dans U.

$$\begin{aligned}
\ll Pu,\ v \gg &= \int_U <Pu(x), v(x)>\ dV(x) \\
&= \int_U < \sum_{|\alpha|\,\le\,\delta} a_\alpha(x)\, D^\alpha u(x), v(x) >\ dV(x) \\
&= \int_U \sum_{|\alpha|\,\le\,\delta,\, 1\,\le\,\lambda\,\le r',\, 1\,\le\,\mu\,\le\,r} a_{\alpha,\lambda,\mu}(x)\, D^\alpha u_\mu(x)\, \overline{v}_\lambda(x)\, \gamma(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \\
(par Stokes) &= \int_U \sum_{|\alpha|\,\le\,\delta,\, 1\,\le\,\lambda\,\le r',\, 1\,\le\,\mu\,\le\,r} u_\mu(x)(-1)^{|\alpha|}\overline{D^\alpha \overline{a}_{\alpha,\lambda,\mu}(x) v_\lambda(x)\gamma(x)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \\
&= \int_U < u(x), \sum_{|\alpha|\,\le\,\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma^{-1}(x) D^\alpha \gamma(x)^t\overline{a}_\alpha(x) v(x) >\ dV(x).
\end{aligned}$$

On pose alors sur U :

$$P^\star v(x) = \sum_{|\alpha|\,\le\,\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma^{-1}(x) D^\alpha \gamma(x)^t\overline{a}_\alpha(x) v(x)$$

et on conclut par un argument de partition de l'unité.

$\square$

Remarques : $\sigma_{P^\star}(x,\xi) = (-1)^\delta \sum\limits_{|\alpha|=\delta} {}^t\overline{a}_\alpha(x)\, \xi^\alpha = (-1)^\delta (\sigma_P(x,\xi))^\star$.
Si $rg\, E = rg\, F$, P est elliptique si et seulement si $\sigma_P(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$ donc P est elliptique si et seulement si $P^\star$ est elliptique.

2.2 Quelques rappels sur les espaces de Sobolev

On suppose que M est une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte orientée de dimension m munie d'une forme volume dV. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien $\mathcal{C}^\infty$ de rang r sur M.

***Définition* 2.2.1.** *L'espace de Sobolev de M par rapport au fibré E est defini par :*

$$W^s(M,E) = \{\textit{sections } u : M \to E \textit{ qui sont localement dans } W^s(\mathbb{R}^m)\}.$$

Plus précisément, soient $(U_j)_j$ un recouvrement fini de M par des ouverts de coordonnées, $U_j \simeq \mathbb{R}^m$ où E est trivial, $(e_{j,\lambda})_{1 \leqslant \lambda \leqslant r}$ des repères orthonormés de $E_{|U_j}$ et $u = \sum\limits_{j,\lambda} u_{j,\lambda}\, e_{j,\lambda}$. On pose :

$$\begin{aligned}\|u\|_s^2 &= \sum_{j,\lambda} \|\psi_j\, u_{j,\lambda}\|_s^2 \\ &= \sum_{j,\lambda} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha| \leq s} |D^\alpha \psi_j\, u_{j,\lambda}(x)|^2 dV(x)\end{aligned}$$

où $(\psi_j)_j$ est une partition de l'unité subordonée à $(U_j)_j$ et $\sum\limits_j \psi_j^2 = 1$.
On admettra sans preuve les deux lemmes classiques suivants :

***Lemme* 2.2.1 (de Sobolev).** $\forall k \in \mathbb{N}, \forall s > k + \dfrac{m}{2}$, $W^s(M,E) \subset \mathcal{C}^k(M,E)$ *et l'injection est continue.*
On a alors :

$$\bigcap_{s \geq 0} W^s(M,E) = \mathcal{C}^\infty(M,E)$$

$$\bigcup_{s \leq 0} W^s(M,E) = \mathcal{D}'(M,E).$$

***Lemme* 2.2.2 (de Rellich).** $\forall\, t > s$, $W^t(M,E) \hookrightarrow W^s(M,E)$ *est un opérateur linéaire compact.*

2.3 Inégalité de Gårding

Pour démontrer l'inégalité de Gårding on a besoin d'introduire une autre classe d'opérateurs différentiels : les opérateurs *pseudo-différentiels*.
Si $P = \sum\limits_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x)\, D^\alpha$ est un opérateur differentiel sur $\mathbb{R}^m$, on note

$$\mathscr{F}u(x) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)\, e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\lambda(x)$$

la transformée de Fourier de u. Par le théorème d'inversion de Fourier, on a, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned}
Pu(x) &= P(\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}u))(x) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x)\, D^\alpha \hat{u}(x) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x)\, D^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^m} \hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\lambda(\xi) \right) \\
\textit{(théorème de dérivation)} &= \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^m} \hat{u}(\xi)\, D^\alpha e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\lambda(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x)(2i\pi\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\lambda(\xi).
\end{aligned}$$

***Définition* 2.3.1.** *On définit le symbole (total) d'un opérateur différentiel par :*

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x)(2i\pi\xi)^\alpha.$$

On introduit maintenant les opérateurs pseudo-différentiels qui, comme on va le voir, sont inversibles sous certaines conditions.

***Définition* 2.3.2.** *Un opérateur pseudo-différentiel est un opérateur op_σ défini par :*

$$op_\sigma(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sigma(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\lambda(\xi),\ \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

où σ est dans une classe convenable de fonctions sur $T^\star_{\mathbb{R}^m}$.

***Définition* 2.3.3.** *On définit l'espace des symboles $S^{\,\delta}(\mathbb{R}^m)$ par :*

$$\begin{aligned}
S^{\,\delta}(\mathbb{R}^m) = \{&\sigma(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(T^\star_{\mathbb{R}^m}) /\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{N}, K \subset \mathbb{R}^m compact \\
&|D^\alpha_x D^\beta_\xi \sigma(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\delta-|\beta|}\ \forall\,(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^m\},\ \forall\, \delta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

δ est appelé le degré de σ.

Remarque : $op_\sigma(u) \in \mathcal{C}^\infty$ car $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, l'espace de Schwartz.

Dans le cas des opérateurs agissant sur un fibré E à valeurs dans un fibré F sur une variété compacte M, on introduit des espaces de symboles $S^{\,\delta}(M; E, F)$ analogues. Les éléments de $S^{\,\delta}(M; E, F)$ sont les fonctions :

$$\begin{aligned} T^\star_M &\to Hom(E_x, F_x) \\ (x,\xi) &\mapsto \sigma(x,\xi) \end{aligned}$$

satisfaisant les mêmes conditions dans tout système de coordonnées. Enfin, on prend un recouvrement fini trivialisant $(U_j)_j$ de M et une partition de l'unité $(\psi_j)_j$ subordonnée à $(U_j)_j$ telle que $\sum\limits_j \psi_j^2 = 1$.
On pose alors $op_\sigma(u) = \sum\limits_j \psi_j op_\sigma(\psi_j u), u \in \mathcal{C}^\infty(M, E)$ pour pouvoir se ramener toujours au cas de $\mathbb{R}^m$.
On va maintenant énoncer, sans preuve, un théorème de prolongement des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Sobolev :

***Théorème* 2.3.1.** *Si $\sigma \in S^{\,\delta}(M; E, F)$ alors op_σ s'étend de manière unique en un opérateur linéaire et continu :*

$$op_\sigma : W^s(M, E) \to W^{s-\delta}(M, F).$$

Remarque : en particulier si $\sigma \in S^{-\infty}(M; E, F) := \bigcap\limits_{\delta \in \mathbb{R}} S^{\,\delta}(M; E, F)$ alors op_σ est un opérateur envoyant une section distribution de $\mathcal{D}'(M, E)$ dans $\mathcal{C}^\infty(M, F)$ de manière continue. Un tel opérateur est appelé un *opérateur régularisant*.

Résultat : la classe $\mathcal{R}$ des opérateurs régularisants coïncide avec la classe des opérateurs définis au moyen d'un noyau $K(x, y) \in Hom(E_y, F_x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire les opérateurs de la forme :

$$\begin{aligned} R : \mathcal{D}'(M, E) &\to \mathcal{C}^\infty(M, F) \\ u &\mapsto Ru \end{aligned}$$

où :

$$Ru(x) = \int_M K(x, y).u(y)\, dV(y).$$

Inversement, si $dV(y) = \gamma(y)\, dy_1 ... dy_m$ sur U_j et si on écrit $Ru = \sum R(\theta_j u)$ avec $(\theta_j)_j$ une partition de l'unité, alors l'opérateur $R(\theta_j \bullet)$ est l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole σ défini comme la transformée de Fourier par rapport à y :

$$\sigma(x,y) = \mathscr{F}_y(\gamma(y)\theta_j K(x,y))(x,\xi),\ \sigma \in S^{-\infty}(M;E,F).$$

Remarque : quand on travaille avec des opérateurs pseudo-différentiels, il est habituel de travailler seulement modulo les opérateurs régularisants et d'autoriser des opérateurs plus généraux de la forme $op_\sigma + R,\ R \in \mathcal{R}$.

Voici maintenant une proposition, dont on admettra également la preuve, qui va nous permettre d'inverser les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques ; ce qui nous permettra de démontrer l'inégalité de Gårding :

***Proposition* 2.3.1.** *Si $\sigma \in S^{\,\delta}(M;E,F)$ et $\sigma' \in S^{\,\delta'}(M;F,G)$, $\delta,\ \delta' \in \mathcal{R}$, il existe un symbole $\sigma' \diamond \sigma \in S^{\,\delta+\delta'}(M;E,G)$ tel que :*

$$op_{\sigma'} \circ op_\sigma = op_{\sigma' \diamond \sigma}\, mod\, \mathcal{R}.$$

De plus, $\sigma' \diamond \sigma - \sigma'\sigma \in S^{\,\delta+\delta'-1}(M;E,G)$.

***Définition* 2.3.4.** *Un opérateur pseudo-différentiel op_σ de degré δ est dit elliptique s'il peut être défini par un symbole $\sigma \in S^{\,\delta}(M;E,F)$ tel que :*

$$|\langle \sigma(x,\xi), u\rangle| \geq c|\xi|^\delta |u|,\ \forall\,(x,\xi) \in T^\star_M,\ \forall\, u \in E_x$$

pour $|\xi|$ assez grand uniformément par rapport à $x \in M$.

Remarque : si E et F ont le même rang, la condition d'ellipticité implique que $\sigma(x,\xi)$ est inversible pour ξ grand. En prenant une fonction tronquante convenable $\theta(\xi)$ égale à 1 pour ξ grand, on voit que $\sigma'(x,\xi) = \theta(\xi)\,\sigma(x,\xi)^{-1}$ définit un symbole dans l'espace $S^{-\infty}(M;E,F)$ et d'après la proposition 2.3.1 on a :

$$op_{\sigma'} \circ op_\sigma = id + op_\rho,\ \rho \in S^{-1}(M;E,E).$$

Si on choisit un symbole τ assymptotiquement équivalent à l'infini au développement $id - \rho + \rho^{\diamond 2} + ... + (-1)^j\rho^{\diamond j} + ...$, on obtient alors un inverse $op_{\tau\diamond\sigma'}$ de $op_\sigma\, mod\, \mathcal{R}$.

***Théorème* 2.3.2 (inégalité de Gårding).** *Soit $P : \mathcal{C}^\infty(M,E) \to \mathcal{C}^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ où E et F sont des fibrés vectoriels de même rang, soit $\tilde{P}$ l'extension de P aux sections à coefficients distributions. Pour tout $u \in W^0(M,E)$ tel que $\tilde{P} \in W^s(M,F)$, on a :*

$$u \in W^{s+\delta}(M,E)\ et\ \|u\|_{s+\delta} \leq c_s(\|\tilde{P}u\|_s + \|u\|_0),\ c_s > 0.$$

Preuve : comme P est elliptique, il existe $\sigma \in S^{-\delta}(M; F, E)$ tel que :

$$op_\sigma \circ \tilde{P} = id + R,\ R \in \mathcal{R}.$$

Alors $\|op_\sigma(v)\|_{s+\delta} \leq c\|v\|_s$ par continuité de $W^s(M, E) \to W^{s-\delta}(M, F)$.
On pose $v = \tilde{P}u$, alors $u = op_\sigma(\tilde{P}u) - Ru$.
Ainsi :

$$\|u\|_{s+\delta} - \|Ru\|_{s+\delta} \leq \|u + Ru\|_{s+\delta} \leq c\ \|\tilde{P}u\|_s$$

et finalement :

$$\begin{aligned}\|u\|_{s+\delta} &\leq c\ \|\tilde{P}u\| + \|Ru\|_{s+\delta}\\ &\leq c\ \|\tilde{P}u\| + c'\ \|u\|_0\\ &\leq c_s(\|\tilde{P}u\|_s + \|u\|_0).\end{aligned}$$

□

2.4 Le théorème de finitude

***Théorème* 2.4.1 (de finitude).** *Soient E, F des fibrés vectoriels hermitiens de rang r sur une variété compacte M et soit $P : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ. On a alors :*
(i) : $\dim \ker P < +\infty$
(ii) : $P(\mathcal{C}^\infty(M, E))$ est fermé et de codimension finie dans $\mathcal{C}^\infty(M, F)$. De plus si $P^\star$ est l'adjoint formel de P, on a, dans $W^0(M, F) = L^2(M, F)$:

$$\mathcal{C}^\infty(M, F) = P(\mathcal{C}^\infty(M, E)) \overset{\perp}{\oplus} \ker P^\star\ .$$

Preuve : (i) : montrons que $\dim \ker P < +\infty$. Soit $u \in \ker P$ alors $Pu = 0$ et $\tilde{P} = 0$.
Par l'inégalité de Gårding (théorème 2.3.2) on a :

$$\|u\|_{s+\delta} \leq c_s\|u\|_0. \tag{2.1}$$

Montrons que $\ker P$ est fermé dans $W^0(M, E)$:
soient $u \in \mathcal{C}^\infty(M, E)$, $(u_n)_n$ une suite de $\ker P$ telle que $u_n \to u$ dans $W^0(M, E)$. Fixons k tel que $s + \delta > k + \dfrac{m}{2}$, on a alors, grâce au lemme 2.2.1 de Sobolev :

$$W^{s+\delta}(M, E) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(M, E) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, E)$$

et ceci de manière continue. Ainsi $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}^\infty(M, E)$. Or P y est continu donc $Pu_n \to Pu$ et finalement $P = 0$. On en conclut donc que $\ker P$ est fermé dans $W^0(M, E)$.
Remarquons que par (2.1) on a :

$$\overline{B}_{\|.\|_0}(0, 1) \cap \ker P \subset \overline{B}_{\|.\|_\delta}(0, c_0) \cap \ker P.$$

Le lemme 2.2.2 de Rellich nous dit que l'injection $W^\delta(M, E) \hookrightarrow W^{\delta-1}(M, E)$ est compacte, donc $i_0 : W^\delta(M, E) \hookrightarrow W^0(M, E)$ est compacte.
Vu que $\ker P$ est fermé, $\overline{B}_{\|.\|_0}(0, 1) \cap \ker P \subset i_0(\overline{B}_{\|.\|_\delta}(0, c_0) \cap \ker P)$ et que $\overline{B}_{\|.\|_\delta}(0, c_0) \cap \ker P$ est borné dans $W^\delta(M, E)$ donc $i_0(\overline{B}_{\|.\|_\delta}(0, c_0) \cap \ker P)$ est relativement compact alors $\overline{B}_{\|.\|_0}(0, 1) \cap \ker P$ est un compact de $\ker P \subset W^0(M, E)$.
Par le théorème de Riesz, $\dim \ker P < +\infty$.
(ii) : montrons que $\tilde{P} : W^{s+\delta}(M, E) \to W^s(M, F)$ est d'image fermée. Pour cela montrons que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, v_1, ..., v_N \in W^{s+\delta}(M, E) \ /\ \|u\|_0 \leq \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} | \ll u, v_j \gg |.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on pose l'ensemble :

$$K_{(v_j)} = \{u \in W^{s+\delta}(M, E) \ /\ \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} | \ll u, v_j \gg | \leq 1\}.$$

C'est un borné de $W^{s+\delta}(M, E)$ car $\|u\|_{s+\delta} \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$ et par le lemme 2.2.2 de Rellich il est relativement compact dans $W^0(M, E)$.
De plus, $\bigcap\limits_{(v_j)} \overline{K}_{(v_j)} = \{0\} \subset \overline{B}_{\|.\|_0}(0, 1)$, en effet si $u \in W^{s+\delta}(M, E)$, pour toute suite $(v_j)_{1\leq j\leq N}$ on a :

$$\varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} | \ll u, v_j \gg | \leq 1.$$

Si on prend $N = 1$ et $v_j = \dfrac{u}{\|u\|_0^2}$, on a $\varepsilon\|u\|_{s+\delta} \leq 0$, donc $\|u\|_{s+\delta} = 0$ et donc $u = 0$.
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, v_1, ..., v_N \in W^{s+\delta}(M, E)$ tels que si $u \in \partial\overline{K}_{(v_j)}$ alors $u \in \overline{B}_{\|.\|_0}(0, 1)$, c'est-à-dire :

$$\|u\|_0 \leq \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} | \ll u, v_j \gg |.$$

L'inégalité de Gårding (théorème 2.3.2) nous donne alors :

$$\begin{aligned}\|u\|_{s+\delta} &\leq c_s(\|\tilde{P}u\|_s + \|u\|_0)\\ &\leq c_s\|\tilde{P}u\|_s + c_s(\varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^{N} | \ll u, v_j \gg |)\end{aligned}$$

et ainsi :

$$(1-\varepsilon c_s)\|u\|_{s+\delta} \leq c_s(\|\tilde{P}u\|_s + \sum_{j=1}^{N} | \ll u, v_j \gg |).$$

Soient $T = \{u \in W^{s+\delta}(M,E) \,/\, u \perp v_j,\ \forall\, 1 \leq j \leq n\}$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2\,c_s}$ alors :

$$\forall u \in T,\ \|u\|_{s+\delta} \leq 2\,c_s\|\tilde{P}u\|_s.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\varphi : \tilde{P}(T) &\to W^{s+\delta}(M,E)\\ \tilde{P}u &\mapsto u\end{aligned}$$

est continue et $\tilde{P}(T) = \varphi^{-1}(W^{s+\delta}(M,E))$ est fermé dans $W^s(M,F)$.
Comme $W^{s+\delta}(M,E)$ est un espace de Hilbert, on a :

$$W^{s+\delta}(M,E) = Vect(v_1,...,v_N) + (Vect(v_1,...,v_N))^{\perp}$$

où $Vect(v_1,...,v_N)$ est fermé et $(Vect(v_1,...,v_N))^{\perp} = T$, ainsi :

$$\tilde{P}(W^{s+\delta}(M,E)) = Vect(\tilde{P}(v_1),...,\tilde{P}(v_N)) + \tilde{P}(T)$$

est fermé et on en déduit donc que $\tilde{P}$ est à image fermée dans $W^{s+\delta}(M,F)$.
En particulier si $s=0$ alors $\tilde{P}(W^{\delta}(M,E))$ est fermé dans $W^0(M,F) = L^2(M,F)$. Or $\mathcal{C}^{\infty}(M,F)$ est dense dans $W^{\delta}(M,F)$, on a donc dans $W^0(M,F) = L^2(M,F)$:

$$W^0(M,F) = \tilde{P}(W^{\delta}(M,E)) \oplus \tilde{P}(W^{\delta}(M,E))^{\perp}.$$

Or $P : \mathcal{C}^{\infty}(M,E) \to \mathcal{C}^{\infty}(M,F)$, on peut donc prolonger par densité P en $\tilde{P}$ sur $W^{\delta}(M,E)$ et $W^{\delta}(M,F)$ et, toujours par densité, on a :

$$\tilde{P}(W^{\delta}(M,E))^{\perp} = P(\mathcal{C}^{\infty}(M,E))^{\perp}.$$

Enfin il est facile de montrer que :

$$\ker \tilde{P}^{\star} = \tilde{P}(W^{\delta}(M,E))^{\perp} = P(\mathcal{C}^{\infty}(M,E))^{\perp}.$$

On en conclut donc que :

$$W^0(M,F) = \tilde{P}(W^\delta(M,E)) \overset{\perp}{\oplus} \ker \tilde{P^\star} \tag{2.2}$$

Or P est un opérateur elliptique donc $P^\star$ est aussi un opérateur elliptique ce qui par (i) entraîne que $\dim\ker P^\star < +\infty$. Donc comme $\ker P^\star \subset \ker \tilde{P^\star}$ on obtient : $\ker P^\star = \ker \tilde{P^\star} \subset \mathcal{C}^\infty(M,E)$ et $\dim\ker \tilde{P^\star} < +\infty$.
Finalement par l'inégalité de Gårding (théorème 2.3.2) et (2.2) on obtient :

$$W^s(M,F) = \tilde{P}(W^{s+\delta}(M,E)) \overset{\perp}{\oplus} \ker P^\star$$

et

$$\mathcal{C}^\infty(M,F) = P(\mathcal{C}^\infty(M,E)) \overset{\perp}{\oplus} \ker P^\star.$$

□

Chapitre 3

Théorie de Hodge pour les variétés riemanniennes compactes

3.1 Opérateur de Hodge, contraction par un champ de vecteurs

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension réelle m et soit $E \to F$ un fibré vectoriel hermitien de rang r sur M.
On note $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ et $(e_1, \dots, e_r)$ des repères orthonormés de T_M et de E sur une carte de M et soient $(\xi_1^\star, \dots, \xi_m^\star)$ et $(e_1^\star, \dots, e_r^\star)$ les repères duaux correspondants de $T_M^\star$ et de $E^\star$. Soit dV l'élément de volume riemannien sur M.
L'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet T_M^\star$ possède un produit scalaire naturel $< . , . >$ tel que :

$$< u_1 \wedge \dots \wedge u_p \, , \, v_1 \wedge \dots \wedge v_p >= \det(< u_j \, , \, v_k >)_{1 \leq j,k \leq p}, \; u_j \, , \, v_k \in T_M^\star, \; \forall \, p \in \mathbb{N}$$

et

$$\Lambda^\bullet T_M^\star = \bigoplus_{p \geq 0}^{\perp} \Lambda^p T_M^\star.$$

La famille de covecteurs $\xi_I^\star = \xi_{i_1}^\star \wedge \dots \wedge \xi_{i_p}^\star$, $i_1 < \dots < i_p$, définit une base orthonormée de $\Lambda^\bullet T_M^\star$.
On note $< . , . >$ le produit scalaire correspondant sur $\Lambda^\bullet T_M^\star \otimes E$.

***Définition* 3.1.1.** *L'opérateur de Hodge-Poincaré-De Rham est l'endomorphisme de $\Lambda^\bullet T_M^\star$ défini par la collection d'applications linéaires $\star : \Lambda^p T_M^\star \to \Lambda^{m-p} T_M^\star$ telles que :*

$$u \wedge \star v = < u, v > \, dV, \; \forall \, u, v \in \Lambda^p T_M^\star.$$

L'existence et l'unicité se montrent en utilisant l'accouplement :

$$\begin{aligned} \Lambda^p T_M^\star \times \Lambda^{m-p} T_M^\star &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto u \wedge v / dV = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I, I^c) u_I v_{I^c} \end{aligned}$$

où $u = \sum\limits_{|I|=p} u_I \, \xi_I^\star$, $v = \sum\limits_{|J|=m-p} v_J \, \xi_J^\star$ et $\varepsilon(I, I^c)$ est la signature de la permutation $(1, ..., m) \mapsto (I, I^c)$. Alors :

$$\star \, v = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I, I^c) \, v_I \, \xi_{I^c}^\star.$$

Remarque : de manière plus générale, $\{., .\}$ induit un opérateur $\star$ sur les formes vectorielles tel que :

$$\star : \Lambda^p T_M^\star \otimes E \to \Lambda^{m-p} T_M^\star \otimes E$$

$$\{s, \star t\} = < s, t > \, dV, \; \forall \, s, t \in \Lambda^p T_M^\star \otimes E.$$

où $t = \sum\limits_{I,\lambda} t_{I,\lambda} \, \xi_I^\star \otimes e_\lambda$ et $\star \, t = \sum\limits_{I,\lambda} \varepsilon(I, I^c) \, t_{I,\lambda} \, \xi_{I^c}^\star \otimes e_\lambda$.

***Lemme* 3.1.1.** $\forall \, t \in \Lambda^p T_M^\star \otimes E$, $\star\star \; t = (-1)^{p\,(m-1)} t$.

Preuve : on sait que $\star \, t = \sum\limits_{I,\lambda} \varepsilon(I, I^c) \, t_{I,\lambda} \, \xi_{I^c}^\star \otimes e_\lambda$, donc :

$$\begin{aligned} \star \, (\star \, t) &= \sum_{I,\lambda} \varepsilon(I, I^c) \, (\star \, t)_{I,\lambda} \, \xi_I^\star \otimes e_\lambda \\ &= \sum_{I,\lambda} \varepsilon(I, I^c) \, \varepsilon(I^c, I) \, t_{I,\lambda} \, \xi_I^\star \otimes e_\lambda \end{aligned}$$

Or $\varepsilon(I, I^c) \, \varepsilon(I^c, I) = (-1)^{p\,(m-p)}$ et :

$$\begin{aligned} p\,(m-p) = p\,m - p^2 &\equiv p\,m - 2 \; [2] \\ &\equiv p\,(m-1) \; [2]. \end{aligned}$$

Donc $\varepsilon(I, I^c) \, \varepsilon(I^c, I) = (-1)^{p\,(m-1)}$ et $\star\star \; t = (-1)^{p\,(m-1)} t$.

$\square$

Remarques : $\star$ est une isométrie de $\Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E$.
On peut aussi définir un opérateur antilinéaire $\#$: $\Lambda^p T^\star_M \otimes E \to \Lambda^{m-p} T^\star_M \otimes E^\star$ associé à l'accouplement canonique $E \times E^\star \to \mathbb{C}$ par :

$$s \wedge \# \, t = < s, t > \; dV$$

$$\# \, t = \sum_{I,\lambda} \varepsilon(I, I^c) \, \bar{t}_{I,\lambda} \, \xi^\star_{I^c} \otimes e^\star_\lambda.$$

***Définition* 3.1.2 (contraction par un champ de vecteurs).** *Etant donné un vecteur tangent $\theta \in T_M$ et une forme $u \in \Lambda^p \, T^\star_M$, la contraction $\theta \lrcorner \, u \in \Lambda^{p-1} \, T^\star_M$ est définie par :*

$$\theta \lrcorner \, u \, (\eta_1, ..., \eta_{p-1}) = u(\theta, \eta_1, ..., \eta_{p-1}), \; \eta_i \in T_M.$$

Remarque : au niveau de la base $(\xi_j)_j$, $. \lrcorner \, .$ est bilinéaire et caractérisée par :

$$\xi_l \lrcorner \, (\xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p}) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & si \, l \notin \; \{i_1, ..., i_p\} \\ (-1)^{k-1} \xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^\star_{i_k}} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p} & si \, l = i_k \end{array} \right.$$

***Lemme* 3.1.2.** *$\theta \lrcorner \, .$ est une dérivation de l'algèbre extérieure, c'est-à-dire :*

$$\theta \lrcorner \, (u \wedge v) = (\theta \lrcorner \, u) \wedge v + (-1)^{d^o u} u \wedge \; (\theta \lrcorner \, v).$$

Preuve : on le vérifie facilement sur la base $(\xi_j)_j$.

$\square$

***Proposition* 3.1.1.** *soit $\tilde{\theta} = \langle \, ., \theta \rangle \in \; T^\star_M$, alors $\theta \lrcorner \, .$ est l'adjoint de $\tilde{\theta} \wedge .$, c'est-à-dire :*

$$\langle \theta \lrcorner \, u, v \rangle = \langle u, \tilde{\theta} \wedge v \rangle.$$

Preuve : on vérifie la relation pour $\theta = \xi_l$, $u = \xi^\star_I$, $v = \xi^\star_J$, on a alors :

$$\langle \xi_l \lrcorner (\xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p}), \xi^\star_{j_1} \wedge ... \wedge \xi^\star_{j_p} \rangle = (-1)^{k-1} \langle \xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^\star_{i_k}} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p}, \xi^\star_{j_1} \wedge ... \wedge \xi^\star_{j_p} \rangle.$$

Or $\tilde{\xi_l} = \xi^\star_l$ donc :

$$\begin{aligned} \langle \xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p}, \, \xi^\star_l \wedge \xi^\star_J \rangle &= (-1)^{k-1} \langle \xi^\star_{i_k} \wedge \xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^\star_{i_k}} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p}, \, \xi^\star_{i_k} \wedge \xi^\star_J \rangle \\ &= (-1)^{k-1} \langle \xi^\star_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^\star_{i_k}} \wedge ... \wedge \xi^\star_{i_p}, \, \xi^\star_{j_1} \wedge ... \wedge \xi^\star_{j_p} \rangle \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Opérateur de Laplace-Beltrami

Soient E un fibré vectoriel hermitien sur M une variété riemannienne orientée de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension réelle m et D_E une connexion hermitienne sur E. On considère $L^2(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)$, espace de Hilbert des p-formes sur M à valeurs dans E de carré intégrable muni du produit scalaire :

$$\ll s, t \gg = \int_M \langle s, t \rangle \, dV.$$

***Théorème* 3.2.1.** *L'adjoint formel de D_E agissant sur $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)$ est donné par :*

$$D_E^\star = (-1)^{mp+1} \star D_E \star .$$

Preuve : si $s \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)$ et $t \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p+1} T^\star_M \otimes E)$ sont à support compact, on a :

$$\begin{aligned}
\ll D_E s, t \gg &= \int_M \langle D_E s, t \rangle \, dV \\
&= \int_M \{D_E s, \star t\} \\
&= \int_M d\{s, t\} + (-1)^{p+1}\{s, D_E \star t\} \\
(par Stokes) \ &= \int_M (-1)^{p+1}\{s, D_E \star t\} \\
&= (-1)^{p+1}(-1)^{p(m-1)} \int_M \{s, \star\star D_E \star t\} \\
&= (-1)^{mp+1} \int_M \langle s, \star D_E \star t \rangle \, dV \\
&= (-1)^{mp+1} \ll s, \star D_E \star t \gg .
\end{aligned}$$

□

Remarques : si la connexion est triviale sur $E = M \times \mathbb{C}$, alors $d^\star = (-1)^{m+1} \star d\star$. Si m est pair on a alors : $d^\star = -\star d\star$ et $D_E = -\star D_E\star$.

On peut maintenant définir *l'opérateur de Laplace-Beltrami*, qui est une généralisation du laplacien classique de $\mathbb{R}^m$, avec lequel on définira les formes harmoniques sur la variété ; elles nous permettrons de décrire les différents groupes de cohomologie de M.

***Définition* 3.2.1.** *L'opérateur de Laplace-Beltrami est l'opérateur différentiel du second ordre agissant sur les fibrés $\Lambda^p\, T_M^\star \otimes E$ tel que :*

$$\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E.$$

Remarques : en particulier l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur $\Lambda^p\, T_M^\star$ est $\Delta = dd^\star + d^\star d$, il ne dépend que de la structure riemmanienne de M.
Δ_E est autoadjoint chaque fois que les formes sont $\mathcal{C}^\infty$ et l'une au moins d'entres elles est à support compact.

***Proposition* 3.2.1.** *Δ_E est un opérateur différentiel elliptique.*

Preuve : pour montrer que Δ_E est un opérateur différentiel elliptique il nous suffit de calculer son symbole. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$, $s \in \mathcal{C}^\infty(M, E)$ et $t \in \mathbb{C}$ on a :

$$D_E(e^{tf} s) = te^{tf} df \wedge s + e^{tf} D_E s$$

et donc :

$$e^{-tf} D_E(e^{tf} s) = t\, df \wedge s + D_E s.$$

Par définition du symbole on a :

$$\sigma_{D_E}(x, \xi).s = \xi \wedge s,\ \forall\, \xi \in T_{M_x}^\star, \forall\, s \in \Lambda^p\, T_M^\star \otimes E.$$

Or on sait que $\sigma_{P^\star}(x, \xi) = (-1)^\delta \sigma_P(x, \xi)^\star$ donc $\sigma_{D_E^\star} = -\sigma_{D_E}^\star$. De plus $D_E \simeq d + \Gamma \wedge \bullet$ donc le symbole principal de D_E est le même que celui de d. Si on note $ds = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge \dfrac{\partial s}{\partial x_j}$, $\xi = \sum_{j=1}^m \xi_j\, dx_j \in T_M$ on a :

$$\sigma_d(x, \xi).s = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge \xi_j s = \xi \wedge s.$$

Donc, par la proposition 3.1.1, on a :

$$\sigma_{D_E^\star}(x, \xi).s = -(\xi \wedge s)^\star = -\, \tilde{\xi} \lrcorner\, s.$$

Or comme :

$$\sigma_{\Delta_E} = \sigma_{D_E} \sigma_{D_E^\star} + \sigma_{D_E^\star} \sigma_{D_E}$$

il vient que :

$$\sigma_{\Delta_E}(x, \xi).s = -\xi \wedge (\tilde{\xi} \lrcorner\, s) - \tilde{\xi} \lrcorner\, (\xi \wedge s) = -(\tilde{\xi} \lrcorner\, \xi) s$$

et sachant que :

$$\tilde{\xi} \lrcorner\, \xi = \xi \lrcorner\, \tilde{\xi} = \xi \lrcorner\, \langle\, ., \xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle = |\xi|^2$$

on en conclut donc que le symbole principal de Δ_E est :

$$\sigma_{\Delta_E}(x, \xi).s = -|\xi|^2 s$$

et donc que Δ_E est elliptique.

$\square$

Remarque : si M est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ muni de la métrique constante $g = \sum_{j=1}^{m} dx_i^2$ alors les opérateurs d, $d^\star$ et Δ sont à coefficients constants, ils sont complètement déterminés par leur symbole principal, on a alors :

$$s = \sum_{|I|=p} s_I\, dx_I$$

$$ds = \sum_{|I|=p,\, 1 \leq j \leq m} \frac{\partial s_I}{\partial x_j}\, dxj \wedge dx_I$$

$$d^\star = - \sum_{|I|=p,\, 1 \leq j \leq m} \frac{\partial s_I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner\, dx_I$$

$$\Delta s = - \sum_{|I|=p} (\sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial^2 s_I}{\partial x_j^2})\, dx_I.$$

Donc l'opérateur de Laplace-Beltrami correspond à l'opérateur de Laplace classique au signe près.

3.3 Isomorphisme de Hodge et dualité de Poincaré

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur une variété riemannienne compacte M. On suppose que E possède une connexion hermitienne D_E telle que $\Theta(D_E) = D_E^2 = 0$. Une telle connexion est dite *intégrale* ou *plate*. Comme $D_E^2 = 0$, D_E définit un complexe de De Rham généralisé :

$$\mathcal{C}^\infty(M, E) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^1 T_M^\star \otimes E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E) \longrightarrow \cdots$$

Les groupes de cohomologie de ce complexe seront notés $H^p_{DR}(M, E)$.

***Définition* 3.3.1.** *L'espace des formes harmoniques de degré p relativement à l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_E est défini par :*

$$\mathcal{H}^p(M,E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p\, T_M^\star \otimes E) \;/\; \Delta_E s = 0\}.$$

Remarque :
$\ll \Delta_E s, s \gg = \ll \Delta_E^\star s, \Delta_E^\star s \gg + \ll \Delta_E s, \Delta_E s \gg = \|\Delta_E^\star s\|^2 + \|\Delta_E s\|^2$ donc :

$$s \in \mathcal{H}^p(M,E) \Leftrightarrow \begin{cases} D_E s = 0 \\ D_E^\star s = 0 \end{cases}$$

Voici le théorème principal de décomposition en trois espaces, il va nous donner assez facilement *l'isomorphisme de Hodge* qui à tout élément du groupe de cohomologie de De Rham fait correspondre une et une seule forme harmonique.

***Théorème* 3.3.1.** $\forall\, p \geq 0$ *on a :*

$$\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p\, T_M^\star \otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E) \overset{\perp}{\oplus} Im\, D_E \overset{\perp}{\oplus} Im\, D_E^\star$$

où $Im D_E = D_E(\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p-1} T_M^\star \otimes E))$ *et* $Im D_E^\star = D_E^\star(\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E))$.

Preuve : montrons d'abord que les espaces sont orthogonaux deux à deux.
Soient $s \in \mathcal{H}^p(M,E)$ et $t \in Im\, D_E$, alors :

$$\ll s, t \gg = \ll s, D_E u \gg = \ll D_E^\star s, u \gg = 0.$$

Donc :

$$\mathcal{H}^p(M,E) \perp Im\, D_E.$$

On montre de la même façon que :

$$\mathcal{H}^p(M,E) \perp Im\, D_E^\star.$$

Enfin si $s \in Im\, D_E$, $t \in Im\, D_E^\star$, on a :

$$\ll s, t \gg = \ll D_E u, D_E^\star v \gg = \ll D_E^2 u, v \gg = 0.$$

Donc :

$$Im\, D_E \perp Im\, D_E^\star.$$

Montrons maintenant la décomposition en trois sous-espaces. Pour cela on applique le théorème 2.4.1 de finitude à l'opérateur elliptique

$\Delta_E : \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p-1}\, T_M^\star \otimes E) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p\, T_M^\star \otimes E)$. On obtient alors la décomposition :

$$\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p\, T_M^\star \otimes E) = \ker \Delta_E \overset{\perp}{\oplus} \Delta_E(\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p-1}\, T_M^\star \otimes E)).$$

Or $\ker \Delta_E = \mathcal{H}^p(M, E)$ et $\Delta_E(\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p-1}\, T_M^\star \otimes E)) = Im\ \Delta_E$.
Remarquons que :

$$Im\ \Delta_E \subset Im\ (D_E D_E^\star + D_E^\star D_E) \subset Im\ D_E\ +\ Im\ D_E^\star.$$

Enfin :

$$Im\ D_E \perp \ker \Delta_E \Rightarrow Im\ D_E \subset Im\ \Delta_E$$

et

$$Im\ D_E^\star \perp \ker \Delta_E \Rightarrow Im\ D_E^\star \subset Im\ \Delta_E.$$

On en déduit donc que :

$$Im\ D_E\ +\ Im\ D_E^\star \subset Im\ \Delta_E$$

et que :

$$Im\ D_E \overset{\perp}{\oplus} Im\ D_E^\star = Im\ \Delta_E.$$

Ainsi on a bien :

$$\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p\, T_M^\star \otimes E) = \mathcal{H}^p(M, E) \overset{\perp}{\oplus} Im\ D_E \overset{\perp}{\oplus} Im\ D_E^\star.$$

□

***Corollaire* 3.3.1 (isomorphisme de Hodge).** *Soit E un fibré vectoriel hermitien sur une variété riemannienne compacte M possédant une connexion hermitienne plate, alors :*

$$H^p_{DR}(M, E) \simeq \mathcal{H}^p(M, E),\ \forall\, p \geq 0$$

et les groupes de cohomologie de De Rham sont de dimension finie.

Preuve : par le théorème 3.3.1 on sait que :

$$\ker D_E = (Im\ D_E)^\perp = \mathcal{H}^p(M, E) \overset{\perp}{\oplus} Im\ D_E$$

donc, par le théorème d'isomorphisme, on a :

$$H^p_{DR}(M, E) = \ker D_E \,/\, Im\, D_E = \mathcal{H}^p(M, E) \overset{\perp}{\oplus} Im\, D_E \,/\, Im\, D_E \simeq \mathcal{H}^p(M, E).$$

Enfin les groupes de cohomologie de De Rham sont de dimension finie car $H^p_{DR}(M, E) \simeq \mathcal{H}^p(M, E) = \ker \Delta_E$ et par le théorème 2.4.1 de finitude on sait que $\ker \Delta_E$ est de dimension finie.

□

***Corollaire* 3.3.2 (dualité de Poincaré).** *L'accouplement :*

$$\begin{aligned} H^p_{DR}(M,E) \times H^{m-p}_{DR}(M,E^\star) &\to \mathbb{C} \\ (s,t) &\mapsto \int_M s \wedge t \end{aligned}$$

définit une dualité entre $H^p_{DR}(M,E)$ et $H^{m-p}_{DR}(M,E^\star)$.

Preuve : il nous faut montrer que l'accouplement est une forme bilinéaire non-dégénérée. Remarquons d'abord qu'il existe une connexion plate naturelle $D_{E^\star}$ telle que, $\forall\, s \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)$ et $\forall\, t \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E^\star)$, on ait :

$$d(s \wedge t) = (D_E s) \wedge t + (-1)^{d^\circ s} s \wedge D_{E^\star} t.$$

On définit d'abord cet accouplement sur $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E) \times \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{m-p} T^\star_M \otimes E^\star)$ et par la formule de Stokes on remarque assez facilement que cette application bilinéaire peut être étendue aux groupes de cohomologie. Comme dans la preuve du théorème 3.2.1 on montre que :

$$D_{E^\star}(\#\, s) = (-1)^p \#\, D^\star_E s,\ D^\star_{E^\star}(\#\, s) = (-1)^{p+1} \#\, D_E s$$

et donc :

$$\Delta_{E^\star}(\#\, s) = \#\, \Delta_E s.$$

Ainsi :

$$\#\, s \in \mathcal{H}^{m-p}(M, E^\star) \Leftrightarrow s \in \mathcal{H}^p(M,E).$$

Montrons alors que la forme bilinéaire est non-dégénérée, par le corollaire 3.3.1 il nous suffit de prendre $s \in \mathcal{H}^p(M,E) \backslash \{0\}$, alors $\#\, s \in \mathcal{H}^{m-p}(M,E^\star)$ et par la remarque suivant le lemme 3.1.1 on a :

$$\int_M s \wedge \#\, s = \int_M \langle s, s \rangle \, dV = \|s\|^2 \neq 0.$$

Donc l'accouplement est non-dégénéré à gauche, par symétrie on montre aussi qu'il est non-dégénéré à droite.

$\square$

Remarque : on sait que les deux suites suivantes de faisceaux de formes et de courants sont exactes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^0 \longrightarrow \Lambda^1 \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{D}'^0 \longrightarrow \mathcal{D}'^1 \longrightarrow \cdots$$

Ainsi, par le théorème 1.3.1 de De Rahm-Weil, comme le faisceau constant $\mathbb{C}$ possède deux résolutions acycliques, il vient que :

$$H^k_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq H^k_{COURANT}(X,\mathbb{C}).$$

Soit V une variété de dimension $n-k$, on définit le *courant d'intégration* de degré k par :

$$\begin{aligned}[V] : \mathcal{D}^k(V) &\to \mathbb{C}\\ u &\mapsto \int_V u\end{aligned}$$

On a alors un isomorphisme entre le groupe d'homologie et le groupe de cohomologie :

$$\begin{aligned}H_{n-k}(X,\mathbb{C}) &\to H^k_{COURANT}(X,\mathbb{C}) \simeq H^k_{DR}(X,\mathbb{C})\\ V &\mapsto \{[V]\}\end{aligned}$$

Chapitre 4

Théorie de Hodge pour les variétés kählériennes compactes

4.1 Variétés kählériennes

Soit X une variété complexe de dimension n, rappelons qu'une *métrique hermitienne* sur X est une forme hermitienne définie positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur T_X. Dans un système de coordonnées $(z_1, ..., z_n)$, une telle forme peut s'écrire :

$$h(z) = \sum_{1 \leq j,k \leq n} h_{j,k}(z)\, dz_j \otimes d\overline{z}_k$$

où $(h_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$ est une matrice hermitienne définie positive à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. La métrique hermitienne est alors définie par :

$$\langle \xi, \eta \rangle_h = \sum_{1 \leq j,k \leq n} h_{j,k}(z)\, \xi_j \overline{\eta}_k$$

où $\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \dfrac{\partial}{\partial z_j} \in \mathcal{C}^\infty(U, T_X)$ et $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \dfrac{\partial}{\partial z_k} \in \mathcal{C}^\infty(U, T_X)$.
De plus, si on note $Herm(T_X)$ l'ensemble des métriques hermitiennes sur T_X, on sait qu'il existe un isomorphisme canonique :

$$Herm(T_X) \to \Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}\, T^\star_X$$
$$h = \sum_{1 \leq j,k \leq n} h_{j,k}\, dz_j \otimes d\overline{z}_k \mapsto \omega = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j,k \leq n} h_{j,k}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

et on a :

$$\omega = -\mathcal{I}m(h).$$

***Définition* 4.1.1.** *Une variété hermitienne est un couple (X,ω) où ω est une (1,1)-forme réelle $\mathcal{C}^\infty$ définie positive sur X. La métrique ω est dite kählérienne si $d\omega = 0$. X est une variété kählérienne si elle possède au moins une métrique kählérienne.*

Remarques : *(i)* : ω est réelle donc $d\omega = 0$ si et seulement si $d'\omega = d''\omega = 0$.

$$
\begin{aligned}
(ii):\ d'\omega = 0 &\Leftrightarrow \frac{i}{2} \sum_{1\le j,k\le n} d'h_{j,k}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k = 0 \\
&\Leftrightarrow i \sum_{1\le j,k,l\le n} \frac{\partial h_{j,k}}{\partial z_l}\, dz_l \wedge dz_j \wedge d\overline{z}_k = 0 \\
&\Leftrightarrow i \sum_{1\le j<l\le n, 1\le k\le n} \left(\frac{\partial h_{j,k}}{\partial z_l} - \frac{\partial h_{l,k}}{\partial z_j}\right) dz_l \wedge dz_j \wedge d\overline{z}_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial h_{j,k}}{\partial z_l} = \frac{\partial h_{l,k}}{\partial z_j},\ 1 \le j,k,l \le n.
\end{aligned}
$$

C'est *la condition de Kähler.*
(iii) : Si X est une variété réelle, ω une 2-forme sur X, non-dégénérée et fermée alors ω est symplectique.
(iv) : $\frac{\omega^n}{n\,!}=\det(h_{j,k}) \bigwedge_{1\le j\le n} (\frac{i}{2}\, dz_j \wedge d\overline{z}_j) = \det(h_{j,k})\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dy_n$.
Donc la (n,n)-forme volume $dV_\omega = \frac{\omega^n}{n\,!}$ est positive et coïncide avec l'élément de volume hermitien de X. Ainsi si X est compacte :

$$\int_X \omega^n = n\,! \int_X dV_\omega = n\,!\, Vol_\omega(X) > 0.$$

***Corollaire* 4.1.1.** *(i) : Si (X,ω) est une variété kählérienne compacte et si $\{\omega\}$ désigne la classe de cohomologie de ω dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$ alors $\{\omega\}^n \neq 0$.*
(ii) : Si (X,ω) est kählérienne compacte alors $H^{2k}_{DR}(X,\mathbb{R}) \neq 0$, $0 \le k \le n$.

Preuve : (i) : si ω est exacte alors :

$$dV_\omega = \frac{1}{n\,!}\,\omega^n = \frac{1}{n\,!}\, d\alpha \wedge ... \wedge d\alpha = d(\frac{1}{n\,!}\,\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}).$$

Par Stokes on a :

$$0 < \int_X dV_\omega = \int_X d(\frac{1}{n\,!}\,\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}) = \int_{\partial X} \frac{1}{n\,!}\,\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = 0.$$

Ainsi $\{\omega\} \neq 0$ et donc $\{\omega\}^n \neq 0$.
(ii) : Si $\{\omega\}^k = 0$ alors, pour $0 \leq k \leq n$:

$$\{dV_\omega\} = \frac{1}{n!}\,\{\omega^{n-k} \wedge \omega^k\} = \frac{1}{n!}\,\{\omega^{n-k}\}\{\omega^k\} = 0$$

donc dV_ω est exacte ce qui par (i) est absurde.

$\square$

Nous allons maintenant voir quelques exemples de variétés kählériennes ou non-kählériennes :

a) L'espace projectif complexe :
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\mathbb{C}\backslash\{0\}$ possède une métrique ω naturelle appelée métrique de Fubini-Study définie par :

$$p^\star\omega = \frac{i}{2\pi}\,d'd''\log(|\zeta_0|^2 + ... + |\zeta_n|^2)$$

où $p : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
Si on se place dans la carte $U_0 = \{[\zeta_0 : ... : \zeta_n] \,/\, \zeta_0 \neq 0\}$ on a :

$$\omega_{|U_0} = \frac{i}{2\pi}d'd''\log(1 + |\frac{\zeta_1}{\zeta_0}|^2 + ... + |\frac{\zeta_n}{\zeta_0}|^2) = \frac{i}{2\pi}d'd''\log(1 + |z|^2)$$

où $z = (\frac{\zeta_1}{\zeta_0}, ..., \frac{\zeta_n}{\zeta_0})$.
Sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ on définit le fibré en droites tautologique par :

$$\mathcal{O}(-1) = \{([z], \xi) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \,/\, \xi \in \mathbb{C}z\}.$$

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^\star,\ \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k},\ k \geq 1,\ \mathcal{O}(0) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}.$$

La courbure de Chern vérifie $\Theta(\mathcal{O}(1)) = -\Theta(\mathcal{O}(-1))$.
Soit h la métrique induite par celle de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathcal{O}(-1)$, sur U_0 on a une section de $\mathcal{O}(-1)$:

$$\begin{aligned} s_0 : U_0 &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ [\zeta] &\mapsto (1, \frac{\zeta_1}{\zeta_0}, ..., \frac{\zeta_n}{\zeta_0}) \end{aligned}$$

Or $s_0([\zeta]) \neq 0, \forall[\zeta] \in U_0$ donc s_0 peut être choisie comme repère de $\mathcal{O}(-1)_{|U_0}$.
Donc $\mathcal{O}(-1)_{|U_0} \simeq U_0 \times \mathbb{C}$ et si on pose $\|s_0\|^2 = e^{-\varphi_j}$, on a :

$$i\,\Theta(\mathcal{O}(-1)) = i\,d'd''\varphi_j = -i\,d'd''\log\|s_0\|^2 = -i\,d'd''\log(1 + |z|^2).$$

Donc :

$$i\,\Theta(\mathcal{O}(1)) = i\,d'd''\log(1+|z|^2)$$

et :

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\,d'd''\log(1+|z|^2) = \frac{i}{2\pi}\,\Theta(\mathcal{O}(1)) = c_1(\mathcal{O}(1))$$

est une métrique kählérienne car hermitienne vu que $i d'd''\log(1+|z|^2)(\xi,\xi) > 0, \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ et $d\omega = 0$.

b) Les tores complexes :
Soit Γ un réseau de rang $2n$, on pose $X = \mathbb{C}^n\,/\,\Gamma$, c'est une variété complexe compacte appelée tore complexe. Alors toute forme hermitienne définie positive $\omega = i \sum\limits_{1\leq j,k\leq n} h_{j,k}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k$ à coefficients constants sur $\mathbb{C}^n$ définit une métrique kählérienne sur X.

c) Les sous-variétés :
Toute sous-variété complexe Y d'une variété kählérienne (X,ω) est kählérienne pour la métrique induite $\omega' = \omega_{|Y}$. En particulier toute variété projective est kählérienne.

d) Surface de Hopf :
Pour $\alpha \in]0,1[$ et $n \geq 2$ on pose :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{C}^n\backslash\{0\} &\to \mathbb{C}^n\backslash\{0\} \\ z &\mapsto \alpha z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{\mathbb{Z}} &= \{u^k\,/\,k \in \mathbb{Z}\} \\ X &= \mathbb{C}^n\backslash\{0\}\,/\,u^{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

On a alors les difféomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n\backslash\{0\} &\to \mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R}_+^* \\ z &\mapsto (\frac{z}{\|z\|}, \|z\|) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R} \\ (u,t) &\mapsto (u, \log t). \end{aligned}$$

Ainsi on a le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n\backslash\{0\} &\to \mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R} \\ \alpha^k z &\mapsto (\frac{z}{\|z\|}, k\log\alpha + \log\|z\|) \end{aligned}$$

et on en conclut que X est une variété complexe compacte vu que :

$$X \simeq \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{R} \,/\, (\log \alpha)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1.$$

Montrons que X n'est pas une variété kählérienne, pour cela on va utiliser la formule de Künneth :

$$H^k(Y \times Z, \mathbb{R}) \simeq \sum_{p=0}^{k} H^p(Y, \mathbb{R}) \otimes H^{k-p}(Z, \mathbb{R}).$$

Pour $k = 2$ la formule nous donne :

$$\begin{aligned} H^2(X, \mathbb{R}) &= H^2(\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \\ &= H^2(\mathbb{S}^{2n-1}, \mathbb{R}) \otimes H^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) + H^1(\mathbb{S}^{2n-1}, \mathbb{R}) \otimes H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \\ &\quad + H^0(\mathbb{S}^{2n-1}, \mathbb{R}) \otimes H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Or $H^2(\mathbb{S}^{2n-1}, \mathbb{R}) = 0$, $H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) = 0$ et $H^1(\mathbb{S}^{2n-1}, \mathbb{R}) = 0$ vu que $n \geq 2$, donc $H^2(X, \mathbb{R}) = 0$ et par le (ii) du corollaire 4.1.1, la variété compacte X n'est pas kählérienne.

4.2 Une propriété fondamentale des formes kählériennes

Le théorème suivant nous dit qu'une métrique hermitienne est kählérienne si et seulement si la métrique est tangente à l'ordre 2 à une métrique hermitienne à coefficients constants en tout point de la variété.

***Théorème* 4.2.1.** *Soit ω une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ définie positive sur X une variété complexe de dimension n. Pour que ω soit kählérienne il faut et il suffit qu'en tout point $x_0 \in X$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(z_1, ..., z_n)$ centré en x_0 tel que :*

$$\omega = i \sum_{1 \leq l,m \leq n} \omega_{l,m} \, dz_l \wedge d\overline{z}_m, \; \omega_{l,m} = \delta_{l,m} + O(|z|^2).$$

Si ω est kählérienne, les coordonnées $(z_1, ..., z_n)$ peuvent en fait être choisies telles que :

$$\omega_{l,m} = \langle \frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_m} \rangle = \delta_{l,m} - \sum_{1 \leq j,k \leq n} c_{j,k,l,m} z_j \overline{z}_k + O(|z|^3)$$

où $(c_{j,k,l,m})$ *sont les coefficients de la courbure de Chern associée à* (T_X, ω) *en* x_0 *:*

$$\Theta(T_X)_{x_0} = \sum_{1 \leq j,k,l,m \leq n} c_{j,k,l,m}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes \left(\frac{\partial}{\partial z_l}\right)^{\star} \otimes \frac{\partial}{\partial z_m}.$$

Un tel système de coordonnées sera appelé un système de coordonnées géodésiques en x_0.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$: supposons que $\forall\, x_0 \in X$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(z_1, ..., z_n)$ centré en x_0 tel que :

$$\omega = i \sum_{1 \leq l,m \leq n} \omega_{l,m}\, dz_l \wedge d\overline{z}_m,\ \omega_{l,m} = \delta_{l,m} + O(|z|^2).$$

ω est définie positive et $d_{x_0}\omega = 0$ car $z_1(x_0) = ... = z_n(x_0) = 0$ donc ω est kählérienne.
$\boxed{\Rightarrow}$: supposons que ω soit kählérienne, on peut alors choisir des coordonnées locales $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ centrées en x_0 tel que $(d\zeta_1, ..., d\zeta_n)$ soit une base ω-orthonormée de $T^{\star}_{x_0}X$.
On a alors $\omega = i \sum\limits_{1 \leq l,m \leq n} \tilde{\omega}_{l,m}\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m$ où
$\tilde{\omega}_{l,m} = \delta_{l,m} + O(|z|) = \delta_{l,m} + \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{j,l,m}\zeta_j + a'_{j,l,m}\overline{\zeta}_j) + O(|\zeta|^2)$.
On sait que ω est réelle donc $\overline{a}_{j,l,m} = a'_{j,m,l}$ et la condition de Kähler nous donne $\dfrac{\partial \tilde{\omega}_{l,m}}{\partial \zeta_j} = \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{j,m}}{\partial \zeta_l}$ donc $a_{j,l,m} = a_{l,j,m}$.
On pose alors $z_m = \zeta_m + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{j,l=1}^{n} a_{j,l,m}\, \zeta_j\zeta_l$ pour $1 \leq m \leq n$, c'est un système de coordonnées locales en x_0 et :

$$\begin{aligned} dz_m &= d\zeta_m + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{j,l,m}\, (\zeta_j d\zeta_l + d\zeta_j \zeta_l) \\ &= d\zeta_m + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{j,l,m}\, \zeta_j d\zeta_l + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{j,l,m}\, \zeta_l d\zeta_j \\ &= d\zeta_m + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{j,l,m}\, \zeta_j d\zeta_l + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{l,j,m}\, \zeta_j d\zeta_l \\ &= d\zeta_m + \sum_{j,l=1}^{n} a_{j,l,m}\, \zeta_j d\zeta_l. \end{aligned}$$

On obtient alors : $i \sum\limits_{m=1}^{n} dz_m \wedge d\overline{z}_m$

$$= i\left(\sum_{m=1}^{n} d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a_{j,l,m}\zeta_j d\zeta_l \wedge d\overline{z}_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} \overline{a}_{j,l,m}\overline{\zeta}_j d\zeta_m \wedge d\overline{z}_l\right) + O(|z|^2)$$
$$= i\left(\sum_{m=1}^{n} d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a_{j,l,m}\zeta_j d\zeta_l \wedge d\overline{z}_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} \overline{a}_{j,m,l}\overline{\zeta}_j d\zeta_l \wedge d\overline{z}_m\right) + O(|z|^2)$$
$$= i\left(\sum_{m=1}^{n} d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a_{j,l,m}\zeta_j d\zeta_l \wedge d\overline{z}_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a'_{j,l,m}\overline{\zeta}_j d\zeta_l \wedge d\overline{z}_m\right) + O(|z|^2)$$
$$= \omega + O(|z|^2).$$

Supposons les coordonnées $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ choisies depuis le début de sorte que l'égalité ait lieu pour $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$, faisons alors un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\tilde{\omega}_{l,m} = \delta_{l,m} + O(|z|^2) = \delta_{l,m} + \sum_{j,k=1}^{n} (a_{j,k,l,m}\zeta_j\overline{\zeta}_k + a'_{j,k,l,m}\zeta_j\zeta_k + a''_{j,k,l,m}\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k) + O(|\zeta|^3).$$

Comme la forme est réelle on a :

$$a_{j,k,l,m} = \overline{a}_{k,j,m,l},\ \overline{a}''_{j,k,l,m} = a'_{j,k,m,l} \text{ et par symétrie, } a'_{j,k,l,m} = a'_{k,j,l,m}.$$

La condition de Kähler nous donne :

$$a'_{j,k,l,m} = a'_{l,k,j,m}.$$

Posons alors $z_m = \zeta_m + \dfrac{1}{3} \sum\limits_{j,k,l=1}^{n} a'_{j,k,l,m}\, \zeta_j\zeta_k\zeta_l$ pour $1 \leq m \leq n$, comme précédemment on a :

$$dz_m = d\zeta_m + \sum_{j,k,l=1}^{n} a'_{j,k,l,m}\, \zeta_j\zeta_k\zeta_l$$

et après des calculs du même type que les antérieurs on obtient :

$$\omega = i \sum_{m=1}^{n} dz_m \wedge d\overline{z}_m + i \sum_{j,k,l,m=1}^{n} a_{j,k,l,m}\, \zeta_j\overline{\zeta}_k d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m + O(|\zeta|^3)$$
$$= i \sum_{m=1}^{n} dz_m \wedge d\overline{z}_m + i \sum_{j,k,l,m=1}^{n} a_{j,k,l,m}\, z_j\overline{z}_k dz_l \wedge d\overline{z}_m + O(|z|^3).$$

Calculons maintenant le tenseur de courbure de Chern, on sait que :

$$\langle \frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_m} \rangle = \delta_{l,m} + \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k,l,m}\, z_j \overline{z}_k + O(|z|^3)$$

donc :

$$d' \langle \frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_m} \rangle = \{D' \frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_m}\} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k,l,m}\, z_j \overline{z}_k + O(|z|^2).$$

Finalement on obtient :

$$\Theta(T_X) \frac{\partial}{\partial z_l} = D'' D' \left(\frac{\partial}{\partial z_l} \right) = - \sum_{j,k,m=1}^{n} a_{j,k,l,m} dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_l} + O(|z|).$$

□

4.3 Opérateurs de la géométrie hermitienne, représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Soit (X, ω) une variété hermitienne et soient $z_j = x_j + i y_j$, pour $1 \leq j \leq n$, des coordonnées $\mathbb{C}$-analytiques en un point $a \in X$ telles que $\omega(a) = i \sum\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$ soit diagonalisée en ce point.

La forme hermitienne associée est $h(a) = 2 \sum\limits_{j=1}^{n} dz_j \otimes d\overline{z}_j$ et sa partie réelle est la métrique euclidienne $2 \sum\limits_{j=1}^{n} dx_j^2 + dy_j^2$. On a donc que $|dx_j| = |dy_j| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|dz_j| = |d\overline{z}_j| = 1$; enfin $(\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n})$ est une base orthonormée de $(T^\star_{X_a}, \omega)$. On définit alors le produit scalaire sur l'algèbre $\Lambda^\bullet(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star$, où $(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star = T^\star_X \overset{\perp}{\oplus} \overline{T^\star_X}$, par :

$$< u_1 \wedge ... \wedge u_p, v_1 \wedge ... \wedge v_p >= \det(< u_j, v_k >)_{1 \leq j,k \leq p}, u_j, v_k \in (\mathbb{C} \otimes T_X)^\star, \forall p \in \mathbb{N}.$$

La norme d'une forme $u = \sum\limits_{I,J} u_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \in \Lambda^\bullet(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star$ au point a est donnée par :

$$|u(a)|^2 = \sum_{I,J} |u_{I,J}(a)|^2.$$

On étend alors l'opérateur de Hodge aux formes à valeurs complexes par la formule :

$$u \wedge \overline{\star v} = < u, v > \ dV.$$

$\star : \Lambda^{p,q}\, T^\star_X \to \Lambda^{n-q,n-p}\, T^\star_X$ est alors une isométrie $\mathbb{C}$-linéaire.

***Définition* 4.3.1.** *Les opérateurs usuels de la géométrie hermitienne sont les opérateurs :*
d, $d^\star = - \star d \star$, le laplacien $\Delta = dd^\star + d^\star d$ et leurs analogues complexes qui sont :

$$\begin{cases} d = d' + d'' \\ d^\star = d'^\star + d''^\star \\ d'^\star = - \star d'' \star \\ d''^\star = - \star d' \star \\ \Delta' = d'd'^\star + d'^\star d' \\ \Delta'' = d''d''^\star + d''^\star d'' \end{cases}$$

Remarques : on dit qu'un opérateur est de degré pur r s'il transforme une forme de degré k en une forme de degré $k + r$.
On dit qu'un opérateur est de bidegré pur (s, t) s'il transforme les (p, q)-formes en $(p + s, q + t)$-formes.
Ainsi d' est de bidegré pur $(1, 0)$, d'' de bidegré $(0, 1)$, $d'^\star$ de bidegré $(-1, 0)$, $d''^\star$ de bidegré $(0, -1)$, Δ' de bidegré $(0, 0)$ et Δ'' de bidegré $(0, 0)$.

On va maintenant définir *l'opérateur de Lefschetz* (et son adjoint) qui nous seront utiles pour donner une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

***Proposition-définition* 4.3.1.** *On définit l'operateur L de bidegré (1,1) par :*

$$Lu = \omega \wedge u.$$

Son adjoint est $\Lambda = L^\star = \star^{-1} L \star$ de bidegré (-1,-1) et il vérifie :

$$\langle u, \Lambda v \rangle = \langle Lu, v \rangle.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \langle u, \Lambda v \rangle &= \langle u, \star^{-1} L \star v \rangle \\ &= u \wedge \overline{\star \star^{-1} L \star v} \\ &= \frac{1}{dV} (u \wedge \overline{L \star v}) \\ &= \frac{1}{dV} (u \wedge \omega \wedge \overline{\star v}) \\ &= \frac{1}{dV} (Lu \wedge \overline{\star v}) = \langle Lu, v \rangle. \end{aligned}$$

□

Remarque : observons que $U(T_X) \simeq U_n(\mathbb{C})$ agit sur l'espace des (p,q)-formes par :

$$\begin{aligned} U_n(\mathbb{C}) \times \Lambda^{p,q}\, T_X^\star &\to \Lambda^{p,q}\, T_X^\star \\ (g,v) &\mapsto (g^{-1})^\star v \end{aligned}$$

On dit alors que $\Lambda^{p,q}\, T_X^\star$ est une *représentation unitaire* de $U_n(\mathbb{C})$. Comme ω est invariante sous l'action de $U_n(\mathbb{C})$, il est clair que L et Λ commutent par l'action de $U_n(\mathbb{C})$.

Nous allons voir maintenant quelques relations vérifiées par L et Λ qui vont nous amener à montrer que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ admet une représentation dans $\Lambda^{p,q}\, T_X^\star$, pour cela il nous faut introduire le *crochet de Lie gradué.*

***Définition* 4.3.2.** *Si A et B sont deux endomorphismes du module gradué $\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{\bullet,\bullet} T_X^\star)$, on définit leur commutateur gradué (ou crochet de Lie gradué) par :*

$$[A,B] = AB - (-1)^{d^oA\, d^oB} BA.$$

***Lemme* 4.3.1 (Identité de Jacobi).** *Soient A, B, C trois endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{\bullet,\bullet}\, T_X^\star)$ de degré respectif a,b,c. On a alors l'identité :*

$$(-1)^{ca}[A,[B,C]] + (-1)^{ab}[B,[C,A]] + (-1)^{bc}[C,[A,B]] = 0.$$

Preuve :

$$(-1)^{ca}[A,[B,C]] = (-1)^{ca}ABC - (-1)^{bc+ca}ACB - (-1)^{ab}BCA + (-1)^{ab+bc}CBA$$

$$(-1)^{ab}[B,[C,A]] = (-1)^{ab}BCA - (-1)^{ac+ab}BAC - (-1)^{bc}CAB + (-1)^{ac+bc}ACB$$

$$(-1)^{bc}[C,[A,B]] = (-1)^{bc}CAB - (-1)^{bc+ab}CBA - (-1)^{ac}ABC + (-1)^{ab+ac}BAC$$

□

Soit $\gamma \in \Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}\, T_X^\star$ une $(1,1)$-forme réelle, on sait qu'il existe une base ω-orthogonale $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ de T_X qui diagonalise simultanément les deux formes ω et γ :

$$\omega = i\sum_{j=1}^n \zeta_j^\star \wedge \overline{\zeta}_j^\star \text{ et } \gamma = i\sum_{j=1}^n \gamma_j\, \zeta_j^\star \wedge \overline{\zeta}_j^\star,\ \gamma_j \in \mathbb{R}.$$

***Proposition* 4.3.1.** *Pour toute forme $u = \sum_{J,K} u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star$ on a :*

$$[\gamma, \Lambda u]u = \sum_{J,K} \left(\sum_{j\in J} \gamma_j + \sum_{j\in K} \gamma_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star.$$

Preuve : soit $u = \sum_{J,K} u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star$ de type (p, q), on a :

$$\star\, u = \sum_{J,K} \varepsilon(J, J^c)\varepsilon(K, K^c)\; u_{J^c,K^c} \overline{\zeta}_{J^c}^\star \wedge \zeta_{K^c}^\star$$

donc :

$$\star^{-1} L \star\; u = (-1)^p\, i \sum_{J,K,l} u_{J,K}\, \zeta_{J\setminus\{l\}}^\star \wedge \overline{\zeta}_{K\setminus\{l\}}^\star$$

c'est-à-dire :

$$\Lambda u = (-1)^p\, i \sum_{J,K,l} u_{J,K}\, (\zeta_l \lrcorner\, \zeta_J^\star) \wedge (\overline{\zeta}_l \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star).$$

De plus on a :

$$\gamma \wedge u = (-1)^p\, i \sum_{J,K,m} \gamma_m u_{J,K}\, \zeta_m^\star \wedge \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_m^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star.$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}[\gamma, \Lambda]u &= \gamma \wedge \Lambda u - \Lambda(\gamma \wedge u) \\ &= \sum_{J,K,l,m} \gamma_m\, u_{J,K}((\zeta_l^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star)) \wedge (\overline{\zeta}_l^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star)) \\ &\quad - (\zeta_m \lrcorner\, (\zeta_l^\star \wedge \zeta_J^\star)) \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, (\overline{\zeta}_l^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star))).\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\zeta_m \lrcorner\, (\zeta_l^\star \wedge \zeta_J^\star) &= (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_l^\star) \wedge \zeta_J^\star - \zeta_l^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star) \\ \overline{\zeta}_m \lrcorner\, (\overline{\zeta}_l^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star) &= (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_l^\star) \wedge \overline{\zeta}_K^\star - \overline{\zeta}_l^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star)\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}[\gamma, \Lambda]u = \sum_{J,K,l,m} &\gamma_m\, u_{J,K}((\zeta_m \lrcorner\, \zeta_l^\star) \wedge \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_l^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star) \\ &+ \zeta_l^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star) \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_l^\star) \wedge \overline{\zeta}_K^\star \\ &- (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_l^\star) \wedge \zeta_J^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_l^\star) \wedge \overline{\zeta}_K^\star).\end{aligned}$$

Or on sait que $\zeta_m \lrcorner\, \zeta_l^\star = \delta_{m,l}$ donc :

$$[\gamma, \Lambda]u = \sum_{J,K,m} \gamma_m\, u_{J,K}(\zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_m^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star) + \zeta_m^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star) \wedge \overline{\zeta}_K^\star - \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star).$$

Enfin on conclut en remarquant que :

$$\zeta_m^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star) = \begin{cases} 0 & si\, m \notin J \\ \zeta_J^\star & si\, m \in J \end{cases}$$

□

***Corollaire* 4.3.1.** $\forall\, u \in \Lambda^{p,q}\, T_X^\star,\ [L,\Lambda]\, u = (p+q-n)\, u.$

Preuve : on applique la proposition 4.3.1 avec $\gamma = \omega$; les valeurs propres de ω étant toutes égales à 1 on obtient :

$$[L,\Lambda]u = [\omega, \Lambda u]u = \sum_{J,K} (p+q-n)\, u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star = (p+q-n)\, u.$$

$\square$

***Corollaire* 4.3.2.** *Si on note $B = [L,\Lambda]$ alors on a les relations :*

$$[B,L] = 2L \ \text{et}\ [B,\Lambda] = -2\Lambda.$$

Preuve : on applique le corollaire 4.3.1 tout en remarquant que L est de bidegré $(1,1)$ et Λ de bidegré $(-1,-1)$.

$\square$

***Définition* 4.3.3.** *On définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ par :*

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,/\, tr\ M = 0\}$$

que l'on munit du crochet de Lie classique. Elle admet pour base :

$$l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on vérifie facilement que :

$$[l,\lambda] = b,\ [b,l] = 2l,\ [b,\lambda] = -2\lambda.$$

***Corollaire* 4.3.3.** *On a une action naturelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^{\bullet,\bullet}\, T_X^\star$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbre de Lie $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to End(\Lambda^{\bullet,\bullet}\, T_X^\star)$ tel que :*

$$\rho(l) = L,\ \rho(\lambda) = \Lambda,\ \rho(b) = B.$$

On dit alors que l'on a une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\Lambda^{\bullet,\bullet}\, T_X^\star$.

4.4 Identités de commutation

Supposons que $X = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert et que $\omega = i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$ soit la métrique kählérienne standard.
$\forall\, u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}\, T_X^\star)$ on a :

$$d'u = \sum_{|I|=p,\, |J|=q,\, 1\leq k\leq n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k}\, dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

$$d''u = \sum_{|I|=p,\, |J|=q,\, 1\leq k\leq n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k}\, d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Le produit scalaire global sur L^2 est donné par :

$$\ll u, v \gg = \int_\Omega \sum_{I,J} u_{I,J}\, \overline{v}_{I,J}\, dV.$$

Grâce à la proposition 3.1.1 on sait que :

$$(\frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner \bullet)^\star = dz_k \wedge \bullet \text{ et } (dz_k \wedge \bullet)^\star = \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner \bullet$$

et on montre assez facilement à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^\star = -\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}.$$

Ainsi on a :

$$d'^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k}\, \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J)$$

$$d''^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k}\, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J).$$

***Lemme* 4.4.1 (de Akizuki et Nakano).** *Dans* $\mathbb{C}^n$ *on a :* $[d''^\star, L] = id'$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que :

$$d''u = \sum_{k=1}^{n} d\overline{z}_k \wedge \left(\sum_{I,J} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \right) = \sum_{k=1}^{n} d\overline{z}_k \wedge \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}.$$

Ainsi vu que $d'' = \sum_k d\overline{z}_k \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$, on obtient : $d''^\star = -\sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \frac{\partial}{\partial z_k}$.

Alors :

$$[d''^\star, L]\, u = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \left(\frac{\partial}{\partial z_k}(\omega \wedge u) \right) + \omega \wedge \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, \frac{\partial u}{\partial z_k}.$$

Or $\dfrac{\partial}{\partial z_k}(\omega \wedge u) = \dfrac{\partial \omega}{\partial z_k} \wedge u + \omega \wedge \dfrac{\partial u}{\partial z_k} = \omega \wedge \dfrac{\partial u}{\partial z_k}$ vu que ω est à coefficients constants.
On a alors :

$$[d''^\star, L]u = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \left(\omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) - \omega \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) \right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, \omega \right) \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k}.$$

Enfin si l'on remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, \omega = -i\, dz_k$$

on obtient :

$$[d''^\star, L]\, u = i \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k} = i\, d'u.$$

□

***Théorème* 4.4.1.** *Si (X, ω) est une variété kählérienne alors :*

$$(i) : [d''^\star, L] = id' \; ; \; (ii) : [d'^\star, L] = -id'';$$

$$(iii) : [\Lambda, d''] = -id'^\star \; ; \; (iv) : [\Lambda, d'] = id''^\star.$$

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) : par conjugaison. (i) $\Rightarrow$ (iii) : par adjonction. (iii) $\Rightarrow$ (iv) : par conjugaison. Il nous suffit donc de montrer (i).
Soit (z_j) un système de coordonnées géodésiques en $x_0 \in X$, pour toutes (p, q)-formes u et v à support compact dans un voisinage de x_0, on a :

$$\ll u, v \gg = \int_X \left(\sum_{I,J} u_{I,J} \overline{v}_{I,J} + \sum_{I,J,K,L} a_{I,J,K,L} u_{I,J} \overline{v}_{K,L} \right) dV$$

où $a_{I,J,K,L}(z) = O(|\zeta|^2)$ en x_0.
Par intégration par parties, on montre que :

$$d''^\star u = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \lrcorner\, \frac{\partial u}{\partial z_j} + \sum_{I,J,K,L} b_{I,J,K,L} u_{I,J}\, dz_K \wedge d\overline{z}_L$$

où $b_{I,J,K,L}$ sont les dérivées de $a_{I,J,K,L}$.
Alors $b_{I,J,K,L} = O(|\zeta|)$; or $\dfrac{\partial u}{\partial z_k} = O(|\zeta|)$, donc en reprenant la preuve du lemme 4.4.1, on en déduit que :

$$[d''^{\star}, L]\, u = i\, d'u + O(|\zeta|)$$

et en $z = 0$, le point $x_0 \in X$ étant fixé, on a :

$$[d''^{\star}, L]\, u(x_0) = i\, d'u(x_0).$$

□

***Corollaire* 4.4.1.** *Si (X, ω) est kählérienne alors les opérateurs de Laplace-Beltrami complexes vérifient :*

$$\Delta' = \Delta'' = \frac{1}{2}\Delta.$$

Preuve : montrons d'abord que $\delta'' = \Delta'$. On remarque que $\Delta = [d, d^{\star}]$, $\Delta' = [d', d'^{\star}]$ et $\Delta'' = [d'', d''^{\star}]$. Donc par le (iv) du théorème 4.4.1 on a :

$$\Delta'' = -i\, [d'', [\Lambda, d']].$$

Or $[d', d''] = d'd'' + d''d' = 0$ et par le lemme 4.3.1 (l'identité de Jacobi) on obtient :

$$-[d'', [\Lambda, d']] + [\Lambda, [d', d'']] + [d', [d'', \Lambda]] = 0$$

ce qui nous implique que par le (iii) du théorème 4.4.1 :

$$\Delta'' = [d', -i\, [d'', \Lambda]] = [d', d'^{\star}] = \Delta'.$$

Calculons maintenant Δ :

$$\Delta = [d, d^{\star}] = [d', d'^{\star}] + [d'', d''^{\star}] + [d', d''^{\star}] + [d'^{\star}, d''] = \Delta' + \Delta'' + [d', d''^{\star}] + [d'^{\star}, d''].$$

Donc grâce au lemme 4.4.2 qui suit on conclut que :

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = 2\Delta' = 2\Delta''.$$

□

***Lemme* 4.4.2.** $[d', d''^{\star}] = [d'^{\star}, d''] = 0.$

Preuve : le lemme 4.3.1 (l'identité de Jacobi) nous donne :

$$-[d',[\Lambda,d']]+[\Lambda,[d',d']]+[d',[d',\Lambda]]=0.$$

Or $d'^{\,2}=0$ donc $[d',d']=0$ et on en déduit que :

$$[d',[d',\Lambda]]=[d',[\Lambda,d']]=[d',-[d',\Lambda]]$$

c'est-à-dire, grâce au (iv) du théorème 4.4.1 :

$$[d',d''^{\star}]=-i[d',[\Lambda,d']]=0$$

et par adjonction on en déduit que :

$$[d'^{\star},d'']=0.$$

□

***Corollaire* 4.4.2.** *Si (X,ω) est kählérienne alors Δ commute avec tous les opérateurs $\star$, d', d'', $d'^{\star}$, $d''^{\star}$, L et Λ.*

Preuve : vu que $d'^{\,2}=0$ et $d''^{\,2}=0$, on montre facilement que :

$$[d',\Delta']=0=[d'',\Delta''].$$

Donc par le corollaire 4.4.1, Δ commute avec d' et d''. Comme Δ' et Δ'' sont autoadjoints on montre par adjonction que :

$$[d'^{\star},\Delta']=0=[d''^{\star},\Delta'']$$

et toujours par le corollaire 4.4.1, Δ commute avec $d'^{\star}$ et $d''^{\star}$.
En sachant que $d^{\star}=-\star d\star$ et que $\star\star=-id$, on montre simplement que $[\star,\Delta]=0$ donc Δ et $\star$ commutent. Enfin remarquons que $[d',L]=d'\omega\wedge\bullet=0$ (car ω est kählérienne) et par le lemme 4.3.1 (l'identité de Jacobi) on obtient :

$$[L,[d',d'^{\star}]]+[d',[d'^{\star},L]]-[d'^{\star},[L,d']]=0$$

ce qui nous donne, grâce au fait que $[L,d']=-[d',L]$ et grâce au (ii) du théorème 4.4.1 :

$$[L,\Delta']=-[d',[d'^{\star},L]]=i[d',d'']=0.$$

Comme Δ' est autoadjoint, on obtient par adjonction que :

$$[\Delta',\Lambda]=0$$

et par le corollaire 4.4.1 on en conclut que Δ commute avec L et Λ.

□

4.5 Isomorphisme de Hodge et dualité de Serre

Soient (X, ω) une variété hermitienne compacte de dimension n et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r sur X. On note D_E la connexion de Chern de E, $D_E^\star = -\star D_E \star$ l'adjoint formel de D_E, $D_E'^\star$ et $D_E''^\star$ les composantes de $D_E^\star$ de type $(-1,0)$ et $(0,-1)$.

***Proposition* 4.5.1.** *$\Delta_E'' = D_E'' D_E''^\star + D_E''^\star D_E''$ est un opérateur elliptique autoadjoint de $\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^\star \otimes E)$.*

Preuve : comme dans la preuve de la proposition 3.2.1 on montre que :

$$\sigma_{D_E''}(x,\xi).s = \xi^{\,0,1} \wedge s, \; \forall\, \xi \in {}^{\mathbb{R}}T_X^\star = Hom_{\mathbb{R}}(T_X, \mathbb{R})$$

où $\xi^{\,0,1}$ est la partie de type $(0,1)$ de la 1-forme réelle ξ. Ainsi le symbole principal de Δ_E'' est, comme dans la preuve de la proposition 3.2.1 :

$$\sigma_{\Delta_E''}(x,\xi).s = -|\xi^{\,0,1}|^2 s.$$

Or $|\xi^{\,0,1}|^2 = \dfrac{1}{2}|\xi|^2$, on en déduit donc que :

$$\sigma_{\Delta_E''}(x,\xi).s = -\frac{1}{2}|\xi|^2 s$$

et de même on a :

$$\sigma_{\Delta_E'}(x,\xi).s = -\frac{1}{2}|\xi|^2 s$$

ce qui nous donne :

$$\sigma_{\Delta_E'} = \sigma_{\Delta_E''} = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_E}$$

ainsi le symbole principal de Δ_E'' est injectif et donc Δ_E'' est un opérateur elliptique.

□

***Définition* 4.5.1.** *L'espace des formes harmoniques de bidegré (p,q) relativement à l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_E'' est défini par :*

$$\mathcal{H}^{p,q}(X,E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^\star \otimes E) \,/\, \Delta_E'' s = 0\}.$$

Voici le théorème principal de décomposition en trois espaces, il va nous donner assez facilement *l'isomorphisme de Hodge* qui à tout élément du groupe de cohomologie de Dolbeault fait correspondre une et une seule forme harmonique.

***Théorème* 4.5.1.** $\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2$ *on a :*

$$\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q}\,T_X^\star\otimes E)=\mathcal{H}^{p,q}(X,E)\overset{\perp}{\oplus}Im\,D''_E\overset{\perp}{\oplus}Im\,D''^\star_E$$

où $Im\,D''_E=D''_E(\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q-1}\,T_X^\star\otimes E))$ *et* $Im\,D''^\star_E=D''^\star_E(\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q+1}\,T_X^\star\otimes E))$*.*

Preuve : on montre ce théorème de la même manière que le théorème 3.3.1 vu que Δ''_E est un opérateur elliptique.

□

***Corollaire* 4.5.1 (isomorphisme de Hodge).** *Soit E un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété kählérienne compacte X, alors :*

$$H^{p,q}(X,E)\simeq\mathcal{H}^{p,q}(X,E),\ \forall\,p\geq 0,\ \forall\,q\geq 0$$

et les groupes de cohomologie de Dolbeault sont de dimension finie.

Preuve : la preuve de ce corollaire est la même que celle du corollaire 3.3.1.

□

***Corollaire* 4.5.2 (dualité de Serre).** *L'accouplement :*

$$\begin{aligned}H^{p,q}(X,E)\times H^{n-p,n-q}(X,E^\star)&\to\mathbb{C}\\(s,t)&\mapsto\int_X s\wedge t\end{aligned}$$

définit une dualité entre $H^{p,q}(X,E)$ et $H^{n-p,n-q}(X,E^\star)$.

Preuve : il nous faut montrer que l'accouplement est une forme bilinéaire non-dégénérée.
Remarquons d'abord que $\forall s_1\in\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q}T_X^\star\otimes E)$ et $\forall s_2\in\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{n-p,n-q-1}T_X^\star\otimes E^\star)$, sachant que $s_1\wedge s_2$ est de bidegré $(n,n-1)$, on a :

$$d(s_1\wedge s_2)=d'(s_1\wedge s_2)+d''(s_1\wedge s_2)=d''(s_1\wedge s_2)=d''s_1\wedge s_2+(-1)^{p+q}s_1\wedge d''s_2.$$

On définit d'abord cet accouplement sur $\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q}T_X^\star\otimes E)\times\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{n-p,n-q}T_X^\star\otimes E^\star)$ et par la formule de Stokes on remarque assez facilement que cette application bilinéaire peut être étendue aux groupes de cohomologie. Comme dans la preuve du corollaire 3.3.2 on montre que :

$$D''_{E^\star}(\#\,s)=(-1)^{d^{\text{o}}s}\#\,D''^\star_E s,\ D''^\star_{E^\star}(\#\,s)=(-1)^{d^{\text{o}}s+1}\#\,D''_E s$$

et donc :

$$\Delta''_{E^\star}(\#\, s) = \#\, \Delta''_E s$$

où $D_{E^\star}$ est la connexion de Chern de $E^\star$. Ainsi :

$$\#\, s \in \mathcal{H}^{n-p,n-q}(X, E^\star) \Leftrightarrow s \in \mathcal{H}^{p,q}(X, E).$$

Montrons alors que la forme bilinéaire est non-dégénérée, par le corollaire 4.5.1 il nous suffit de prendre $s \in \mathcal{H}^{p,q}(X, E)\backslash\{0\}$, alors $\#s \in \mathcal{H}^{n-p,n-q}(X, E^\star)$ et on a :

$$\int_X s \wedge \#\, s = \int_X \langle s, s\rangle\, dV = \|s\|^2 \neq 0.$$

Donc l'accouplement est non-dégénéré à gauche, par symétrie on montre aussi qu'il est non-dégénéré à droite.

$\square$

Chapitre 5

Cohomologie des variétés kählériennes

5.1 Décomposition de Hodge

La difficulté du *théorème de décomposition de Hodge* résulte seulement du caractère canonique de la décomposition, pour montrer cela nous allons introduire le groupe de cohomologie de *Bott-Chern*.

***Définition* 5.1.1.** *Soit X une variété complexe non nécessairement compacte, on définit les groupes de cohomologie de Bott-Chern de X par :*

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q}\,T^\star_X) \cap \ker d \;/\; d'd''\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p-1,q-1}\,T^\star_X).$$

***Lemme* 5.1.1.** *Il existe des morphismes canoniques :*

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^k_{DR}(X,\mathbb{C}).$$

De plus on a :

$$\overline{H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C})} = H^{q,p}_{BC}(X,\mathbb{C}).$$

Preuve : la première flèche est bien définie car :

$$\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q}\,T^\star_X) \cap \ker d \subset \ker d''$$

et

$$d'd''\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p-1,q-1}\,T^\star_X) \subset d''\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{p,q-1}\,T^\star_X)$$

car si $d=0$ alors $d''=0$ et $d'd''=-d''d'$.

La deuxième flèche provient du fait que

$$\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q}\, T_X^\star) \cap \ker d \subset \ker d$$

et que :

$$d'd''\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p-1,q-1}\, T_X^\star) \subset \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q}\, T_X^\star) \cap d\, \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p+q-1}\, T_X^\star)$$

vu que $dd'' = d'd''$.
Enfin la symétrie provient des faits que :

$$\overline{\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q}\, T_X^\star)} = \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{q,p}\, T_X^\star)$$

$$\overline{\ker d} = \ker d$$

$$\overline{d'd''\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p-1,q-1}\, T_X^\star)} = d''d'\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{q-1,p-1}\, T_X^\star).$$

□

On suppose maintenant que (X, ω) est une variété kählérienne compacte. On sait, d'après la remarque faite à la suite de la définition 1.2.1, que :

$$\Lambda^k\, T_X^\star = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}\, T_X^\star$$

donc on a aussi :

$$\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^k\, \mathbb{C} \otimes T_X^\star) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q}\, T_X^\star).$$

Comme Δ'' est de bidegré (0,0), il préserve cette décomposition. Mais par le corollaire 4.4.1 on sait que $\Delta = 2\Delta''$ donc Δ préserve cette décomposition. Enfin, toujours par le même corollaire, on remarque que les composantes (p, q) d'une k-forme Δ-harmonique sont aussi Δ-harmonique (et même Δ''), on a donc :

$$\mathcal{H}^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

Remarquons également que, toujours par le corollaire 4.4.1, $\overline{\Delta''} = \Delta' = \Delta''$ donc :

$$\overline{\Delta'' u} = 0 \Leftrightarrow \Delta''\overline{u} = 0$$

donc on a :

$$\overline{\mathcal{H}^{p,q}(X, \mathbb{C})} = \mathcal{H}^{q,p}(X, \mathbb{C}).$$

On peut maintenant passer, à l'aide des deux isomorphismes de Hodge (corollaires 3.3.1 et 4.5.1), aux groupes de cohomologie de De Rham et de Dolbeault, mais l'isomorphisme ne sera pas canonique. Pour cela on utilise les groupes de cohomologie de Bott-Chern, car dans le cas kählérien les morphismes du lemme 5.1.1 sont des isomorphismes. Pour montrer ce résultat on a besoin du lemme suivant :

***Lemme* 5.1.2.** *Soit u une (p,q)-forme d-fermée, alors il y a équivalence entre :*
(a) : u est d-exacte
(b') : u est d'-exacte
(b'') : u est d''-exacte
(c) : u est $d'd''$-exacte
(d) : u est orthogonale à $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$.

Preuve : $(c) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (b')$ et $(c) \Rightarrow (b'')$ sont évidents.
$(a) \Rightarrow (d)$: c'est aussi évident car $\Delta''v = 0 \Leftrightarrow \Delta v = 0$ par le corollaire 4.4.1 donc $d^\star v = 0$.
On montre de même que $(b') \Rightarrow (d)$ et $(b'') \Rightarrow (d)$.
Il nous suffit donc de montrer que $(d) \Rightarrow (c)$.
On sait que $du = 0$ donc $d'u = d''u = 0$ et on suppose que $u \perp \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$.
Remarquons que le théorème 4.5.1 marche aussi pour d' (on le montre par conjugaison), on a alors :

$$u = h_1 + d''s + d''^\star w_1$$

pour $h_1 \in \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}),\ s \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q-1}\, T_X^\star),\ w_1 \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q+1}\, T_X^\star)$.
Or $u \perp \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$ donc $u \in Im\, d'' \overset{\perp}{\oplus} Im\, d''^\star$. Comme $d''u = 0$ il vient que :

$$u = d''s,\ s \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q-1}\, T_X^\star).$$

Par la remarque faite précédemment on peut écrire :

$$s = h + d'v + d'^\star w$$

pour $h \in \mathcal{H}^{p,q-1}(X,\mathbb{C}),\ v \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p-1,q-1}\, T_X^\star),\ w \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p+1,q-1}\, T_X^\star)$.
Ainsi :

$$u = d''d'v + d''d'^\star w$$

et par le lemme 4.4.2, on peut écrire :

$$u = -d'd''v - d'^\star d''w.$$

Or $d'u = 0$ donc on obtient que $d'd'^{\star}d''w = 0$, c'est-à-dire que $d'^{\star}d''w = 0$ et finalement :

$$u = -d'd''v.$$

$\square$

***Corollaire* 5.1.1.** *Soit X une variété kählérienne compacte, alors les morphismes naturels suivants sont des isomorphismes :*

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^k_{DR}(X,\mathbb{C}).$$

Preuve : montrons d'abord la surjectivité de la première flèche, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \arrow[r] & H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \\ \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

vu que $\Delta'' = \dfrac{1}{2}\Delta$ (par le corollaire 4.4.1) il vient que si $\Delta''u = 0$ alors $\Delta u = 0$ et donc $du = 0$. Ainsi le premier morphisme est bien surjectif. L'injectivité quant à elle résulte de l'équivalence $(b'') \Leftrightarrow (c)$ du lemme 5.1.2. Enfin le deuxième isomorphisme résulte de :

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

donc :

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^k(X,\mathbb{C}) \simeq H^k_{DR}(X,\mathbb{C}).$$

$\square$

***Théorème* 5.1.1 (de décomposition de Hodge).** *Soit X une variété kählérienne compacte. On a alors des isomorphismes canoniques (c'est-à-dire indépendants de la métrique kählérienne choisie) :*

$$H^k_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \quad \textit{(décomposition de Hodge)}$$

$$\overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})} \simeq H^{q,p}(X,\mathbb{C}) \quad \textit{(symétrie de Hodge)}$$

Preuve : le premier isomorphisme est une application du corollaire 5.1.1, le deuxième provient du lemme 5.1.1 et du corollaire 5.1.1.

□

Remarque : si E est un fibré hermitien plat on a aussi une décomposition canonique et une symétrie (via #) :

$$H^k_{DR}(X, E) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, E)$$

$$\overline{H^{p,q}(X, E)} \simeq H^{q,p}(X, E^\star).$$

Applications :

***Proposition* 5.1.1.** *Les groupes de cohomologie de Dolbeault de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *sont :*

$$H^{p,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \mathbb{C},\ 0 \leq p \leq n$$

$$H^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = 0,\ p \neq q.$$

Preuve : par le (ii) du corollaire 4.4.1, on sait que $H^{p,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ contient $\{\omega^p\} \neq 0$ et $H^{2p}_{DR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$, on a donc, par le théorème 5.1.1 :

$$\mathbb{C} = H^{2p}_{DR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{k_1+k_2=2p} H^{k_1,k_2}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

c'est-à-dire :

$$H^{p,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \mathbb{C},\ 0 \leq p \leq n$$

et

$$H^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = 0,\ p \neq q.$$

□

***Proposition* 5.1.2.** *Toute p-forme holomorphe sur une variété kählérienne compacte est d-fermée.*

Preuve : si u est holomorphe de type $(p, 0)$ alors $d''u = 0$. $d''^\star u$ est de type $(p, -1)$ donc $d''^\star u = 0$, par conséquent, par le corollaire 4.4.1,
$\Delta u = 2\, \Delta'' u = 0$ donc $du = 0$.

□

***Définition* 5.1.2.** *Les nombres de Betti de X sont les* $b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X, \mathbb{C})$. *Les nombres de Hodge de X sont les* $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$.

***Proposition* 5.1.3.** *Si X est une variété kählérienne compacte alors les nombres de Betti b_{2k+1} sont pairs. En particulier, si X est une surface compacte kählérienne alors b_1 est pair.*

Preuve : par le théorème 5.1.1 on a :

$$b_k = \sum_{p=0}^{k} h^{p,k-p} \text{ et } h^{q,p} = h^{p,q}$$

donc :

$$b_{2k+1} = 2\sum_{p=0}^{k} h^{p,k-p}.$$

□

Remarque : si X est compacte le corollaire 4.5.2 (le théorème de dualité de Serre) nous donne :

$$h^{p,q} = h^{n-p,n-q}.$$

Problème inverse : soit X une surface compacte telle que b_1 soit pair, est-elle kählérienne ? Grâce aux différents résultats de Kodaira, Chow, Miyaoka et Siu, on peut montrer que cette conjecture est vraie. Dans la deuxième partie de ce mémoire nous verrons une preuve unifiée de ce résultat due à Lamari qui repose essentiellement sur le théorème de régularisation de Demailly.

5.2 Décomposition primitive et théorème de Lefschetz difficile

Grâce à la représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\Lambda^{\bullet,\bullet} T_X^\star$ donnée par le corollaire 4.3.3, on va pouvoir démontrer le théorème de Lefschetz difficile à l'aide du théorème d'algèbre linéaire suivant :

***Théorème* 5.2.1.** *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to End(V)$ une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans V. Soient $L = \rho(l)$, $\Lambda = \rho(\lambda)$ et $B = \rho(b)$ trois endomorphismes de V tels que :*

$$l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soient les éléments de la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que B est semi-simple. On a alors :

a) $Sp(B) \subset \mathbb{Z}$ *et si* $V_\mu = \ker(B - \mu\, id)$ *est le sous-espace propre attaché à la valeur propre* μ *on a :*

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} V_\mu \ (somme\, finie).$$

On dit que $v \in V_\mu$ *est un élément de poids pur* μ.
b) L *et* Λ *sont nilpotents et :*

$$\forall\, \mu \in \mathbb{Z},\ L(V_\mu) \subset V_{\mu+2},\ \Lambda(V_\mu) \subset V_{\mu-2}.$$

c) On note $P = \ker \Lambda$ *et on l'appelle l'ensemble des éléments (vecteurs) primitifs. On a alors :*

$$V = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} L^r(P).$$

d) Si $P_\mu = P \cap V_\mu$ *alors :*

$$P_\mu = 0,\ \forall\, \mu > 0 \ et\ P = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}, \mu \leq 0} P_\mu.$$

De plus $L^r : P_{-m} \to V_{m+2r}$ *est injectif pour* $r \leq m$ *et nul pour* $r > m$ $(r, m \geq 0)$.
e) $V_\mu = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}, r \geq \mu} L^r(P_{\mu-2r})$ *où* $L^r : P_{\mu-2r} \to L^r(P_{\mu-2r})$ *est bijectif.*
f) $\forall\, r \in \mathbb{N},\ L^r : V_{-r} \to V_r$ *est bijectif.*

Preuve : remarquons tout d'abord que si $v \in V_\mu$ alors :

$$BLv = LBv + [B, L]v = \mu\, Lv + 2\, Lv = (\mu + 2)\, Lv$$

$$B\Lambda v = \Lambda Bv + [B, \Lambda]v = \mu\, \Lambda v - 2\, \Lambda v = (\mu - 2)\, \Lambda v$$

donc $L(V_\mu) \subset V_{\mu+2}$ et $\Lambda(V_\mu) \subset V_{\mu-2}$.
Supposons que $V \neq 0$ et que $v \in V_\mu$, $v \neq 0$. Si les $(\Lambda^k v)_{k \in \mathbb{N}}$ étaient tous non-nuls, on aurait une infinité de vecteurs propres de B de valeurs propres $\mu - 2k$ distinctes. Or ceci est impossible, donc il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda^r v \neq 0$ et $\Lambda^k v = 0$, $\forall\, k > r$.
Ainsi $\Lambda^r v$ est un élément primitif de poids pur $\mu - 2r$.
Soit donc $w \in P$ un élément non-nul de poids pur μ (il en existe un pour $\mu \in \mathbb{C}$ comme on vient de le voir). Comme précédemment on montre qu'il existe $m > 0$ tel que $L^m w \neq 0$ et $L^{m+1} w = 0$.
Soit $W = Vect(w, Lw, ..., L^m w)$, $\dim W = m + 1$, alors W est stable par l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, en effet :

si on note $w_k = L^k w$ pour $0 \leq k \leq m$ on a $Lw_k = w_{k+1} \in W$, $0 \leq k \leq m-1$ et $Lw_m = 0 \in W$. On remarque également que $Bw_k = (\mu + 2k)w_k \in W$. Enfin on montre facilement par récurrence sur k que :

$$\sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j-1}[L, \Lambda]L^j w = L^k \Lambda w - \Lambda L^k w.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Lambda w_k &= -\sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j-1} B L^j w \\
&= -\sum_{j=0}^{k-1} L^{k-j-1}(\mu + 2j) w_j \\
&= -\sum_{j=0}^{k-1} L^{k-1}(\mu + 2j) w \\
&= k(-\mu - k + 1) w_{k-1} \in W.
\end{aligned}$$

Pour $k = m+1$ on a : $\Lambda w_{m+1} = (m+1)(-\mu - m)w_m$, or $w_{m+1} = 0$ donc $\mu = -m \leq 0$. Ainsi $\Lambda w_k = k(m - k + 1)w_{k-1} \in W$ et donc W est bien stable par l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
On remarque alors que $B_{|W}$ est diagonalisable et a pour vecteurs propres w_k de poids entiers $2k - m$. De plus on montre facilement que :

$$P \cap W = \mathbb{C}w.$$

Montrons alors a), il est clair maintenant que $sp(B) \subset \mathbb{Z}$ vu que $\mu = -m \in \mathbb{Z}$. De plus comme B est semi-simple, il existe un supplémentaire B-stable de W vu que W est lui même B-stable et comme $B_{|W}$ est diagonalisable on montre facilement par récurrence sur la dimension de V que B est diagonalisable.
b) L et Λ sont nilpotents car on a vu que $\forall\, v \in V_\mu$, $\exists\, r, m$ tels que $\Lambda^{r+1} v = L^{m+1} v = 0$.
c) Par définition de W on a :

$$W = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} L^r(\mathbb{C}w) = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} L^r(P \cap W)$$

donc par récurrence sur la dimension de V on montre, comme dans a), que :

$$V = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} L^r(P).$$

d) Remarquons que P est stable par B donc :

$$P = \bigoplus_{\mu} P \cap V_\mu = \bigoplus_{\mu} P_\mu.$$

De plus on a vu que les éléments primitifs non-nuls w sont de poids pur $-m \leq 0$ donc $P_\mu = 0$ si $\mu > 0$. Si $w \neq 0 \in P_{-m}$ alors $Bw = -m\,w$ et $\Lambda w = 0$ donc $L^r w \neq 0$ si et seulement si $r \leq m$ donc $L^r : P_{-m} \to V_{m+2r}$ est injectif.
e) C'est une conséquence de d) car $V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P)$ donc
$V_\mu = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P) \cap V_\mu$. Or $V_\mu = L^r(V_{\mu-2r})$ donc $V_\mu = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P_{\mu-2r})$. Enfin $L^r(P_{\mu-2r}) = 0$ si et seulement si $r \leq -(\mu - 2r)$, c'est-à-dire si et seulement si $r \geq \mu$. On en conclut donc que :

$$V_\mu = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}, r\geq\mu} L^r(P_{\mu-2r}).$$

f) Soit $r \in \mathbb{N}$, on considère $L^r : V_{-r} \to V_r$, c'est-à-dire :

$$L^r : \bigoplus_{k\geq 0} L^k(P_{-r-2k}) \to \bigoplus_{k\geq r} L^k(P_{r-2k})$$

donc L^r est surjectif. Montrons qu'il est également injectif.
Si on note $W = P_{-r-k}$ alors on sait que W est engendré par $(L^k w)_{1\leq k\leq m}$ où $w \in W$ et m tel que $L^m w \neq 0$ et $L^{m+1} w = 0$. De là on en déduit l'injectivité car :

$$L^r(\sum_{k=0}^{m} a_k L^k w) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} a_k L^{k+r} w = 0 \Leftrightarrow a_k = 0.$$

□

Application : on prend $V = \Lambda^{\bullet,\bullet} T_X^\star$, on a alors $\Lambda^k (\mathbb{C} \otimes T_X)^\star = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T_X^\star$ qui s'identifie à l'espace propre V_μ de B de poids $\mu = k - n = p + q - n$ (par définition de B).

***Définition* 5.2.1.** *Une forme homogène $u \in \Lambda^k\,(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star$ est appelée primitive si $\Lambda u = 0$. L'espace des formes primitives de degré total k sera noté :*

$$Prim^k\, T_X^\star = \bigoplus_{p+q=k} Prim^{p,q}\, T_X^\star.$$

Remarque : par la remarque qui suit la proposition-définition 4.3.1 on sait que Λ commute pour l'action de $U(T_X) \simeq U_n(\mathbb{C})$ sur l'algèbre extérieure, il est clair que $Prim^{p,q}\, T_X^\star \subset \Lambda^{p,q}\, T_X^\star$ est un sous espace $U_n(\mathbb{C})$-invariant.

***Proposition* 5.2.1.** *On a* $Prim^k\, T_X^\star = 0, \forall\, k > n$. *De plus si* $u \in Prim^k\, T_X^\star$ *avec* $k \leq n$ *alors* $L^r u = 0$ *pour* $r > n - k$.

Preuve : on applique le d) du théorème 5.2.1.

□

***Théorème* 5.2.2 (formule de décomposition primitive).** *Pour tout* $u \in \Lambda^k\,(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star$, *il existe une unique décomposition :*

$$u = \sum_{r \geq (k-n)_+} L^r u_{k-2r},\ u_{k-2r} \in Prim^{k-2r}\, T_X^\star$$

car :

$$\Lambda^k\,(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star = \bigoplus_{r \geq (k-n)_+} L^r Prim^{k-2r}\, T_X^\star$$

et

$$\Lambda^{p,q}\, T_X^\star = \bigoplus_{r \geq (p+q-n)_+} L^r Prim^{p-r,q-r}\, T_X^\star.$$

Preuve : on applique le e) du théorème 5.2.1.

□

***Théorème* 5.2.3 (isomorphisme de Lefschetz).**

$$L^{n-k} : \Lambda^k\,(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star \to \Lambda^{2n-k}\,(\mathbb{C} \otimes T_X)^\star$$

et

$$L^{n-p-q} : \Lambda^{p,q}\, T_X^\star \to \Lambda^{n-p,n-q}\, T_X^\star$$

sont des isomorphismes pour tout $k \leq n$ *et tout couple* (p, q) *tel que* $p+q \leq n$.

Preuve : on applique le f) du théorème 5.2.1.

□

On va maintenant passer au théorème de Lefschetz difficile qui va utiliser les théorèmes précédents et l'isomorphisme de Hodge. *Pour cela on considère que X est une variété kählérienne compacte.*

***Lemme* 5.2.1.** *Si* $u = \sum_{r \geq (k-n)_+} L^r u_{k-2r}$ *est la décomposition primitive d'une k-forme harmonique u, alors toutes les composantes* u_{k-2r} *sont harmoniques.*

Preuve : la décomposition de u est donnée par le théorème 5.2.2 et on sait par le corollaire 4.4.2 que Δ et L commutent. On a donc :

$$0 = \Delta u = \sum_{r \geq (k-n)_+} L^r \Delta u_{k-2r}$$

et par unicité de la décomposition on a : $\Delta u_{k-2r} = 0$.

$\square$

***Définition* 5.2.2.** *On définit l'espace des k-formes harmoniques primitives par :*

$$\mathcal{H}^k_{prim}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{prim}(X, \mathbb{C}).$$

On note alors $h^{p,q}_{prim} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{p,q}_{prim}(X, \mathbb{C})$.

***Corollaire* 5.2.1.**

$$\mathcal{H}^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r \geq (p+q-n)_+} L^r \mathcal{H}^{p-r,q-r}_{prim}(X, \mathbb{C})$$

$$h^{p,q} = \sum_{r \geq (p+q-n)_+} h^{p-r,q-r}_{prim}.$$

Preuve : on applique le théorème 5.2.2 et le lemme 5.2.1.

$\square$

Remarque : on a :
si $p + q \leq n$ alors, $h^{p,q} = h^{p,q}_{prim} + h^{p-1,q-1}_{prim} + ...$
si $p + q \geq n$ alors, $h^{p,q} = h^{n-q,n-p}_{prim} + h^{n-q-1,n-p-1}_{prim} + ...$

***Corollaire* 5.2.2.** *a) Si* $p + q = k \leq n$ *alors* $h^{p,q} \geq h^{p-1,q-1}$ *et* $b_k \geq b_{k-2}$.
b) Si $p + q = k \geq n$ *alors* $h^{p,q} \geq h^{p+1,q+1}$ *et* $b_k \geq b_{k+2}$.

Preuve : on applique la remarque précédente, le corollaire 5.2.1 et le théorème 5.1.1 de décomposition de Hodge.

$\square$

***Théorème* 5.2.4 (de Lefschetz difficile).** *Soit X une variété kählérienne compacte, on a alors les isomorphismes :*

$$L^{n-k} : H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{2n-k}_{DR}(X, \mathbb{C}), \; k \leq n$$

$$L^{n-p-q} : H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{n-q,n-p}(X, \mathbb{C}), \; p + q \leq n.$$

Preuve : on sait, par le corollaire 4.4.2, que Δ et L commutent, on peut donc définir : $L^{n-k} : \mathcal{H}^k(X, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}^{2n-k}(X, \mathbb{C})$.
Or par le corollaire 3.3.1 il vient que $\mathcal{H}^k(X, \mathbb{C}) \simeq H^k_{DR}(X, \mathbb{C})$.
De plus on peut étendre le morphisme L définit sur les formes, en un morphisme définit sur la cohomologie, en effet :
si $du = 0$ alors $d(\omega \wedge u) = d\omega \wedge u = 0$ car ω est une forme kählérienne et si $u = dv$ alors $d(\omega \wedge v) = \omega \wedge dv = \omega \wedge u$.
Donc :

$$L^{n-k} : H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \to H^{2n-k}_{DR}(X, \mathbb{C})$$

est bien défini. Or par le d) du théorème 5.2.1 on sait que L^{n-k} est injectif sur les formes de degré k donc en particulier sur les formes harmoniques.
Enfin par le corollaire 3.3.2 (dualité de Poincaré) on a :

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \simeq H^{2n-k}_{DR}(X, \mathbb{C}^\star)$$

donc $\mathcal{H}^k(X, \mathbb{C})$ et $\mathcal{H}^{2n-k}(X, \mathbb{C})$ ont même dimension et on en déduit donc que L^{n-r} est un isomorphisme entre $H^k_{DR}(X, \mathbb{C})$ et $H^{2n-k}_{DR}(X, \mathbb{C})$ vu que, par le corollaire 3.3.1, ils sont de dimension finie.
Le deuxième isomorphisme est alors une conséquence du théorème 5.1.1 de décomposition de Hodge ou alors on refait pareil pour les (p, q)-formes.

□

Remarque : on a une répartition des nombres de Hodge symétrique par rapport à l'axe horizontal (isomorphisme de Lefschetz) et vertical (symétrie de Hodge) : c'est le *diamant de Hodge*.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (n,n) & & & \\
 & & \iddots & \vdots & \ddots & & \\
(n,0) & \cdots & & \vdots & & \cdots & (0,n) \\
 & & \ddots & \vdots & \iddots & & \\
 & & & (0,0) & & &
\end{array}$$

Remarque : le théorème de Lefschetz difficile peut être exprimé en terme de forme bilinéaire non-dégénérée :

$$Q(u, v) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \int_X u \wedge v \wedge \omega^{n-k}.$$

5.3 Description du groupe de Picard de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Le *groupe de Picard* d'une variété X est par définition le groupe des classes d'isomorphies des fibrés en droites (donc inversibles), on le note $Pic(X)$. On admet qu'il est isomorphe au groupe $H^1(X, \mathcal{O}_X^\star)$ où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes et $\mathcal{O}_X^\star$ celui des inversibles.
Soit X une variété kählérienne compacte et connexe, la suite exponentielle est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^\star \longrightarrow 1 .$$

Elle donne alors la suite longue :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^\star) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

en sachant que $exp(2i\pi\bullet) : H^0(X,\mathcal{O}_X) = \mathbb{C} \to H^0(X,\mathcal{O}_X^\star) = \mathbb{C}^\star$ est surjective.
Par le théorème 1.3.2 d'isomorphisme de Dolbeault on a :

$$H^{0,1}(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X).$$

On appelle alors *irrégularité* de X le nombre $q(X) = \dim H^{0,1}(X,\mathbb{C}) = h^{0,1}$.
Par le théorème 5.1.1 de décomposition de Hodge on sait que :

$$b_1 = h^{0,1} + h^{1,0} = 2q(X).$$

Enfin vu que $H^{0,1}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^q$ on a :

$$H^1(X,\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}^q$$

et toujours par le théorème 1.3.2 on a :

$$H^0(X,\Omega^1_X) \simeq H^{1,0}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^q.$$

***Lemme* 5.3.1.** *L'image de $H^1(X,\mathbb{Z})$ dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ est un réseau.*

Preuve : on a les inclusions :

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$$

ce qui nous implique :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

Comme les groupes de cohomologie de Čech à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ peuvent se calculer par des recouvrements finis constitués d'ouverts difféomorphes à

des ouverts convexes de même que toutes les intersections mutuelles ; il est clair que $H^1(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et l'image dans $H^1(X,\mathbb{R})$ est un réseau.
Il suffit donc de voir que $H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme. Or le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] & \mathcal{A}^{0,0} \arrow[r] & \mathcal{A}^{0,1} \arrow[r] & \mathcal{A}^{0,2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

montre que l'application $H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X)$ correspond pour la cohomologie de Dolbeault et de De Rham, via le théorème 1.3.2, à :

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \to H^{0,1}(X,\mathbb{C}).$$

Or par le théorème 5.5.1 on a :

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{1,0}(X,\mathbb{C}) \oplus \overline{H^{1,0}(X,\mathbb{C})}$$

et on sait que :

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \oplus \overline{H^1_{DR}(X,\mathbb{R})}.$$

Comme $H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ on a :

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \simeq H^{0,1}(X,\mathbb{C})$$

donc :

$$H^1(X,\mathbb{R}) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X).$$

$\square$

***Corollaire* 5.3.1.** $H^1(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2q}$.

***Définition* 5.3.1.** *Le tore complexe de dimension q, $H^1(X,\mathcal{O}_X) \,/\, H^1(X,\mathbb{Z})$ est appelé la variété jacobienne de X notée $Jac(X)$.*

Remarques : $Jac(X)$ est isomorphe au sous-groupe de $H^1(X,\mathcal{O}^\star_X)$ correspondant aux fibrés en droites de première classe de Chern nulle.
Par le théorème 1.3.2 on a $H^2(X,\mathcal{O}_X) \simeq H^{0,2}(X,\mathbb{C})$.

***Définition* 5.3.2.** *Considérons le noyau du morphisme $H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$, on sait que c'est l'image de c_1 dans $H^2(X,\mathbb{Z})$, on appelle alors ce sous-groupe le groupe de Néron-Severi de X noté $NS(X)$. Son rang $\rho(X)$ est appelé nombre de Picard de X.*

Remarque : on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Jac(X) \longrightarrow Pic(X) \xrightarrow{c_1} NS(X) \longrightarrow 0$$

donc le groupe de Picard est une extension du tore complexe $Jac(X)$ par le $\mathbb{Z}$-module de type fini $NS(X)$.

***Théorème* 5.3.1.** *$Pic(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$ avec $\mathcal{O}(1)$ comme générateur, c'est-à-dire tout fibré en droites sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'un des fibrés en droites $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve : grâce au théorème 1.3.2 et à la proposition 5.1.1 on a :

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}) = H^{0,k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = 0, \ k \geq 1.$$

Ainsi $Jac(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0$ et $NS(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ (car $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}) = 0$, donc c_1 est surjective). On a donc la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Pic(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donc :

$$Pic(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}.$$

Enfin comme $c_1(\mathcal{O}(1))$ est un générateur de $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ donc $\mathcal{O}(1)$ est un générateur de $Pic(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.
Ainsi si $L \in Pic(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ alors $L \simeq \mathcal{O}(1)^{\otimes k} = \mathcal{O}(k), \ k \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Deuxième partie

Caractérisation des surfaces compactes à premier nombre de Betti pair

Chapitre 6

Courants positifs et dualité

6.1 Quelques rappels sur les courants positifs

Soit X une variété complexe de dimension n, on note $\mathcal{D}'_{p,q}$ le faisceau des courants de bidimension (p, q) (ou de bidegré $(n-p, n-q)$) ; si U est un ouvert de X, $\mathcal{D}'_{p,q}(U)$ est le dual topologique de $\mathcal{A}^{p,q}_c(U)$ les (p, q)-formes $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U. On note également $\mathcal{D}'_{p,q} = \mathcal{D}'_{n-p,n-q}$. On munit les espaces de formes de la topologie $\mathcal{C}^\infty$ et les espaces de courants de la topologie faible.

***Définition* 6.1.1.** *Soit $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U)$, on dit que T est un courant positif si :* $\forall\, \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathcal{A}^{1,0}(U)$, $i^{p^2} T \wedge \alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p$ *est une mesure positive.*

***Proposition* 6.1.1.** *Soit T un courant positif de bidegré (p, p) sur U ouvert de X tel que :*

$$T = i^{p^2} \sum_{|I|=p, |J|=p} T_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Alors $T_{I,J}$ sont des mesures de Borel complexes sur U vérifiant :
$\overline{T}_{I,J} = T_{J,I}$ *pour* $|I| = p,\ |J| = p$
$T_{I,I} \geq 0$ *pour* $|I| = p$
$|T_{I,J}| \leq 2^p \sum_{|K|=p} T_{K,K}$.
On dit que T est un courant positif réel à coefficients mesures.

Remarque : l'ensemble des courants positifs, noté $\mathcal{D}'^{+}_{p,p}(X)$ est un cône convexe faiblement fermé dans $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$.

On munit X d'une métrique hermitienne et on note ψ la $(1, 1)$-forme positive associée. On admet alors la proposition suivante :

***Proposition* 6.1.2.** *Si X est compacte alors l'ensemble :*

$$\mathcal{C}_p(X) = \{T \in \mathcal{D}'^{+}_{p,p}(X) \,/\, \langle \psi^p, T \rangle = 1\}$$

est un convexe compact pour la topologie faible des courants.

Dans la partie II, on ne considère que des formes et des courants de bidegré ou de bidimension $(1,1)$.

***Définition* 6.1.2.** *Une forme ω de bidegré $(1,1)$ (resp. $(n-1,n-1)$) est strictement positive si $\langle \omega, T \rangle > 0, \forall\, T \in \mathcal{C}_1(X)$, (resp. $\mathcal{C}_{n-1}(X)$).*

Remarque : l'ensemble des formes strictement positives de bidegré $(1,1)$ (resp. $(n-1,n-1)$) est un cône convexe ouvert dans $\mathcal{A}^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ (resp. $\mathcal{A}^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$).

6.2 Groupes de cohomologie et dualité

Rappelons que pour $d = d' + d''$, on définit l'opérateur $d^c = \dfrac{i}{2\pi}(d'' - d')$ et donc $dd^c = \dfrac{i}{\pi}\, d'd''$. On notera, indifféremment, par souci de symétrie de notation dans la définition des composantes d'un bord, $d' = \partial$ et $d'' = \overline{\partial}$.

***Définition* 6.2.1.** *On définit les groupes d'Aeppli par :*

$$\Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) = \{T \in \mathcal{D}'^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \,/\, dT = 0\} \,/\, dd^c\mathcal{D}'^{0}_{\mathbb{R}}(X)$$

$$V^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X) = \frac{\{\omega \in \mathcal{A}^{n-1,n-1}_{R}(X) \,/\, dd^c\omega = 0\}}{\{\omega \in \mathcal{A}^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X) \,/\, \exists\, \beta \in \mathcal{A}^{n-1,n-2}_{\mathbb{R}}(X),\ \omega = \partial\overline{\beta} + \overline{\partial}\beta\}}.$$

Remarque : le faisceau $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ des fonctions pluriharmoniques réelles admet deux résolutions finies :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{dd^c} & \mathcal{A}^{1,1}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^3_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{dd^c} & \mathcal{D}'^{1,1}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}'^3_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

où j est l'injection des espaces de formes dans les espaces de courants.
Par le théorème 1.3.1 de De Rham-Weil on a :

$$\Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}).$$

Si X est compacte alors on admet que $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ et $V_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X)$ sont de dimension finie, de plus les sous-espaces suivants sont fermés :

$$dd^c \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^0(X) \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$$

$$dd^c \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^0(X) \subset \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$$

$$B_{1,1}(X) = \{T \in \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X) \,/\, \exists\, S \in \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-2}(X),\ T = \overline{\partial} S + \partial \overline{S}\}$$

$$B_{1,1}^{\infty}(X) = \{T \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X) \,/\, \exists\, S \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-2}(X),\ T = \overline{\partial} S + \partial \overline{S}\}.$$

On en déduit alors une dualité algébrique et topologique :

$$H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})^{\star} \simeq V_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X).$$

***Définition* 6.2.2.** *Un courant T de bidemension $(1,1)$ est composante d'un bord si :*

$$\exists\, S \in \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-2}(X),\ T = \overline{\partial} S + \partial \overline{S}$$

c'est-à-dire si $T \in B_{1,1}(X)$.

Remarque : une $(1,1)$-forme réelle α est d-fermée si et seulement si α est nulle sur $B_{1,1}(X)$. De même, une $(n-1,n-1)$-forme β est dd^c-fermée si et seulement si elle est nulle sur $dd^c\, \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^0(X)$.

On peut alors exprimer la dualité précédente sous la forme :

***Proposition* 6.2.1.** *Soit τ un courant réel de bidegré $(1,1)$, si $\langle \tau, \omega \rangle = 0$ pour toute $(n-1,n-1)$ forme réelle dd^c-fermée ω, il existe $\chi \in \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^0(X)$ tel que $\tau = dd^c\, \chi$. Si de plus τ est $\mathcal{C}^{\infty}$ alors χ l'est aussi.*
Soit T un courant réel de bidegré $(n-1,n-1)$, si $\langle \alpha, T \rangle = 0$ pour toute $(1,1)$-forme réelle d-fermée α, il existe $S \in \mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-2}(X)$ tel que $T = \overline{\partial} S + \partial \overline{S}$. Si de plus T est $\mathcal{C}^{\infty}$ alors on peut choisir S de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

6.3 Applications de la dualité

***Proposition* 6.3.1.** *Soit X une variété complexe compacte de dimension n. Alors, il existe sur X une $(n-1,n-1)$-forme strictement positive et dd^c-fermée.*

Preuve : on a vu à la proposition 6.1.2 que

$$\mathcal{C}_{n-1}(X) = \{T \in \mathcal{D'}^{+}_{n-1,n-1}(X) \,/\, \langle \psi^{n-1}, T \rangle = 1\}$$

est convexe et faiblement compact dans $\mathcal{D'}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$.

Or $\mathcal{C}_{n-1}(X) \cap dd^c\mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X) = \emptyset$, en effet, si $\langle \psi^{n-1}, T \rangle = 1$ et $T \in dd^c\mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$ alors comme $T = dd^c\chi$, $\chi \in \mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$ est positive, il vient que χ est plurisousharmonique (p.s.h.) sur X et comme X est compacte, par le principe du maximum pour les fonctions p.s.h. on en déduit que χ est constante et $T = 0$, ce qui est impossible.
Par le théorème de Hahn-Banach géométrique, il existe un hyperplan H fermé de $\mathcal{D}'^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ séparant strictement $\mathcal{C}_{n-1}(X)$ et $dd^c\mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$, c'est-à-dire qu'il existe une forme Ω de bidegré $(n-1, n-1)$ strictement positive sur $\mathcal{C}^{n-1}(X)$ et nulle sur $dd^c\mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$, de plus cette forme est dd^c-fermée.

$\square$

***Théorème* 6.3.1 (de Harvey-Lawson).** *Sur toute variété compacte non-kählérienne, il existe un courant positif T non-nul composante d'un bord.*

Preuve : notons U l'ensemble des $(1,1)$-formes strictement positives et E l'ensemble des $(1,1)$-formes réelles d-fermées. X n'étant pas kählérienne on a que $U \cap E = \emptyset$, de plus E est un fermé de $\mathcal{D}^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ et U est un ouvert convexe. Donc, par le théorème de Hahn-Banach géométrique, il existe $\varphi \in (\mathcal{D}^{1,1}_{\mathbb{R}}(X))'$ séparant U et E, stictement positive sur U et nulle sur E. Ainsi $\varphi \in \mathcal{D}'^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ est également un courant positif et par la proposition 6.2.1, il est composante d'un bord.

$\square$

Chapitre 7

Surfaces compactes et courants kählériens

7.1 Une caractérisation des surfaces compactes kählériennes

Notre but étant de savoir quand est-ce qu'une surface compacte est kählérienne, il nous faut donc caractériser les variétés kählériennes, ce que nous allons faire à l'aide des courants kählériens.

***Définition* 7.1.1.** *Soit (X, ψ) une variété hermitienne, un courant T de bidegré (1,1) est un courant kählérien s'il est d-fermé et s'il existe $C > 0$ telle que $T \geq C\psi$.*

Remarque : toute forme kählérienne est un courant kählérien.

***Proposition* 7.1.1.** *Soit (X, ψ) une variété hermitienne compacte, alors il y a équivalence entre :*
a) il existe un courant kählérien sur X.
b) il existe un sous-espace analytique S de codimension au moins 2 et une (1,1)-forme réelle ω, d-fermée, $\mathcal{C}^\infty$ sur $X \backslash S$, tels que :

$$\omega \geq \psi_{|X \backslash S}.$$

Preuve : on admet ce théorème, il repose essentiellement sur le théorème de régularisation de Demailly (voir [De2]) et le théorème de Shiffman (voir [Shi]).

□

Remarque : en dimension 2, l'ensemble S est fini, le théorème suivant va nous donner une caractérisation des surfaces kählériennes.

***Théorème* 7.1.1 (de Miyaoka).** *Soit ω une forme kählérienne sur $B(0,1)\backslash\{0\}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Alors il existe une forme kählérienne sur $B(0,1)$ égale à ω en dehors de $B(0, \frac{1}{2})$.*

Preuve : on admet également ce théorème qui repose sur le théorème de Shiffman (voir [Shi]).

□

***Corollaire* 7.1.1.** *Une surface compacte est kählérienne si et seulement si elle possède un courant kählérien.*

Preuve : comme toute forme kählérienne est un courant kählérien, il nous suffit juste de montrer que si la surface possède un courant kählérien alors elle est kählérienne. Pour cela on utilise la proposition 7.1.1, l'ensemble S étant de codimension 2, il est réduit à un point ; pour conclure on se ramène de manière locale sur $\mathbb{C}^2$ et on applique le théorème 7.1.1 de Miyaoka.

□

7.2 Critère d'existence des courants kählériens

Considérons (X, ψ) une variété hermitienne compacte de dimension n. Si $T = \alpha + dd^c\chi \geq \psi$ est un courant kählérien et ω une $(n-1, n-1)$-forme positive dd^c-fermée, on a :

$$\langle T, \omega\rangle = \langle \alpha, \omega\rangle \text{ car } \omega \text{ est } dd^c\text{-fermée}$$
$$\langle T, \omega\rangle \geq \langle \psi, \omega\rangle \text{ car } \omega \text{ est positive.}$$

Ainsi $\langle \alpha, \omega\rangle \geq \langle \psi, \omega\rangle$. En particulier, si ω est composante d'un bord, on aura $\langle \alpha, \omega\rangle = 0$, ce qui nous donne $\langle \psi, \omega\rangle = 0$ et donc $\omega = 0$.
Cette remarque vaut aussi pour les courants qui sont limites faibles de telles formes.
On va caractériser les courants kählériens à l'aide des courants qui sont limites faibles de $(n-1, n-1)$-formes positives dd^c-fermées, pour cela on va avoir besoin du lemme suivant :

***Lemme* 7.2.1.** *Soit θ une $(1,1)$-forme, si $\langle \theta, \omega\rangle \geq 0$ pour toute $(n-1, n-1)$-forme positive dd^c-fermée ω, il existe $\chi \in \mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$ tel que $\theta + dd^c\chi \geq 0$ (au sens des courants).*

Preuve : on note U l'ensemble des $(n-1,n-1)$-formes strictement positives, c'est un ouvert convexe de $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X)$. On note E l'ensemble des $(n-1,n-1)$-formes réelles dd^c-fermées et $V = U \cap E$ l'ensemble des formes strictement positives dd^c-fermées, c'est un ouvert convexe de E. Comme θ définit une forme linéaire sur E, $\theta_{|V} \geq 0$ nous donne deux cas :
1) s'il existe $\omega_0 \in V$ telle que $\langle \theta, \omega_0 \rangle = 0$, alors :

$$\theta_{|E} = 0.$$

En effet, soit $\alpha \in E$, pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\alpha$ et $f(t) = \langle \theta, \omega_t \rangle$, f est donc une fonction affine. Pour t proche de 0, vu que V est ouvert, on a que $\omega_t \in V$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $f(\varepsilon) \geq 0$ et $f(-\varepsilon) \geq 0$. Comme $f(0) = 0$ alors $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $\langle \theta, \alpha \rangle = f(1) = 0$. Donc $\theta_{|E} = 0$, ainsi par la proposition 6.2.1, il existe $\chi \in \mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$ tel que $\theta = -dd^c\chi$ donc $\theta + dd^c\chi = 0$.
2) si $\theta_{|V} > 0$, notons $G = \{\omega \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X) \;/\; \langle \theta, \omega \rangle = 0\}$ et $F = G \cap E$. Alors le sous-espace F est un hyperplan de E. Remarquons que :

$$U \cap F = U \cap E \cap G = V \cap G = \emptyset$$

car $\theta_{|V} > 0$. D'après le théorème de Hahn-Banach géométrique on peut séparer U et F par un courant τ de bidegré $(1,1)$ strictement positif sur U et nul sur F.
Soit $\omega_1 \in V$, on a $\langle \theta, \omega_1 \rangle > 0$ et $\langle \tau, \omega_1 \rangle > 0$, donc $\langle \theta, \omega_1 \rangle = \lambda \langle \tau, \omega_1 \rangle$ pour un $\lambda > 0$. Comme F est de codimension 1 dans E, le courant $\theta - \lambda\tau$ est nul sur E (car nul sur F et sur $\mathbb{R}\omega_1$). D'après la proposition 6.2.1, il existe $\chi \in \mathcal{D}'^0_{\mathbb{R}}(X)$ tel que $\theta - \lambda\tau = -dd^c\chi$. Ainsi $\theta + dd^c\chi = \lambda\tau$ est positif.

$\square$

Définition 7.2.1. *Un courant de bidimension $(1,1)$ est nef pluriharmonique s'il est limite faible de $(n-1,n-1)$-formes positives dd^c-fermées.*

Théorème 7.2.1. *Soit (X,ψ) une variété hermitienne compacte, il y a équivalence entre :*
a) il existe un courant kählérien sur X.
b) il existe une $(1,1)$-forme réelle α d-fermée telle que $\langle \alpha, \omega \rangle \geq \langle \psi, \omega \rangle$ pour toute $(n-1,n-1)$-forme positive dd^c-fermée ω.
c) tout courant nef pluriharmonique composante d'un bord est nul.

Preuve : *a)* $\Rightarrow$ *b)* : on note τ un courant kählérien sur X, on écrit $\tau = \alpha + dd^c\chi \geq \psi$. Si T est nef pluriharmonique alors $T = \lim\limits_{p\to+\infty} \omega_p$, où les ω_p sont positives dd^c-fermées. Or on a vu au début de la section 7.2 que

pour tout p, $\langle \alpha, \omega_p \rangle \geq \langle \psi, \omega_p \rangle$ et donc par passage à la limite on obtient $\langle \alpha, T \rangle \geq \langle \psi, T \rangle$.
Si $T = \partial \overline{S} + \overline{\partial} S$ alors $\langle \alpha, T \rangle = 0$ vu que α est d-fermée. Ainsi $\langle \psi, T \rangle = 0$ donc $T = 0$ car $\psi > 0$.
$c) \Rightarrow b)$: on reprend les notations introduites dans la preuve du lemme 7.2.1 et on note $A = \{\omega \in V \,/\, \langle \psi, \omega \rangle = 1\}$ et K l'adhérence faible de A dans $\mathcal{D}'^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$, c'est un convexe faiblement compact.
On a vu, dans la section 6.2, que $B_{1,1}(X)$ est faiblement fermé dans $\mathcal{D}'^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$. La condition c) nous dit en fait que $K \cap B_{1,1}(X) = \emptyset$ et donc par le théorème de Hahn-Banach géométrique, il existe $\beta \in \mathcal{A}^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ telle que $\beta_{|K} > 0$ et $\beta_{|B_{1,1}(X)} = 0$.
La condition sur $B_{1,1}(X)$ nous donne $d\beta = 0$. La compacité de K et la condition $\beta_{|K} > 0$ impliquent qu'il existe $C > 0$ telle que $\langle \beta, T \rangle \geq C$, pour $T \in K$.
Ainsi si $\omega \in V$ alors $\dfrac{\omega}{\langle \psi, \omega \rangle} \in A$ et $\langle \beta, \omega \rangle \geq C \langle \psi, \omega \rangle$ et on conclut alors en prenant $\alpha = \dfrac{\beta}{C}$.
$b) \Rightarrow a)$: on applique le lemme 7.2.1 avec $\theta = \alpha - \psi$, il vient donc que $\tau = \alpha + dd^c\chi \geq \psi$ est un courant kählérien.

$\square$

Chapitre 8

Surfaces compactes à premier nombre de Betti pair

8.1 Cohomologie des surfaces compactes

Rappelons que si X est une surface compacte alors les 2-formes holomorphes sont fermées. On sait, grâce au théorème 1.3.2 d'isomorphisme de Dolbeault, que :

$$H^{i,j}(X, \mathbb{C}) \simeq H^j(X, \Omega_X^i), \ \forall\, 1 \leq i, j \leq 2.$$

On va démontrer que dans le cas des surfaces compactes, il existe des isomorphismes entre les différents groupes de cohomologie de Dolbeault.

***Proposition* 8.1.1.** *Soit X une surface complexe compacte, on a alors :*
a) la conjuguaison $j_2 : H^0(X, \Omega_X^2) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme, c'est-à-dire :

$$H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \simeq \overline{H^{0,2}(X, \mathbb{C})}.$$

b) les 1-formes holomorphes sont d-fermées.
c) la conjugaison $j_1 : H^0(X, \Omega_X^1) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est injective, c'est-à-dire :

$$H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \hookrightarrow \overline{H^{0,1}(X, \mathbb{C})}.$$

Preuve : a) soit ω une 2-forme holomorphe, alors la $(0,2)$-forme $\overline{\omega}$ est $\overline{\partial}$-fermée, ce qui nous définit donc l'application j_2.
Montrons que j_2 est injective, soit donc $\omega \in \ker j_2$, alors :

$$j_2(\omega) = 0 \Leftrightarrow \exists\, \beta \ (1,0)\text{-forme telle que } \overline{\omega} = \overline{\partial \beta}.$$

Comme ω est holomorphe alors $\overline{\partial}\omega = 0$ et donc $\partial\overline{\omega} = 0$ et on a :

$$\omega \wedge \overline{\omega} = \partial\beta \wedge \overline{\omega} = \partial(\beta \wedge \overline{\omega}).$$

Comme $\beta \wedge \overline{\omega}$ est de bidegré $(1,2)$ alors $\overline{\partial}(\beta \wedge \overline{\omega}) = 0$ et donc $\omega \wedge \overline{\omega} = d(\beta \wedge \overline{\omega})$. Ainsi par le théorème de Stokes :

$$\int_X \omega \wedge \overline{\omega} = 0.$$

Comme la forme $\omega \wedge \overline{\omega}$ est positive, il vient que $\omega \wedge \overline{\omega} = 0$ et donc que $\omega = 0$. Ainsi j_2 est injective.
Enfin par le corollaire 4.5.2 (dualité de Serre), j_2 est un isomorphisme car les deux espaces sont de même dimension.
b) Soit α une 1-forme holomorphe, alors $d\alpha$ est une 2-forme holomorphe et $d\alpha = \partial\alpha$. Or $j_2(d\alpha) = [\overline{\partial\alpha}] = 0$ donc par a) il vient que $d\alpha = 0$.
c) j_1 est bien définie par b). Montrons qu'elle est injective, soit donc α une 1-forme holomorphe telle que $j_1(\alpha) = 0$, alors il existe f telle que $\overline{\alpha} = \overline{\partial} f$.
On a alors :

$$\partial\overline{\partial} f = \partial\overline{\alpha} = \overline{\overline{\partial}\alpha} = 0.$$

Donc f est pluriharmonique sur X qui est compacte donc f est constante et donc $\alpha = 0$. Ainsi j_1 est injective.

$\square$

Remarque : la proposition 8.1.1 implique que, sur une surface complexe compacte, toute forme holomorphe ∂-exacte est nulle.

Soit $d\mathcal{O}_X$ le faisceau des 1-formes holomorphes d-fermées sur X. La suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow d\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(X, d\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \cdots$$

Par le b) de la proposition 8.1.1 on a que $H^0(X, \Omega^1_X) = H^0(X, d\mathcal{O}_X)$ ce qui nous donne l'inégalité :

$$b_1 \leq h^{1,0} + h^{0,1}. \tag{8.1}$$

***Corollaire* 8.1.1.** *Soit X une surface compacte telle que $b_1 = 2h^{0,1}$. Alors la conjugaison $j_1 : H^0(X, \Omega^1_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme, c'est-à-dire :*

$$H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \simeq \overline{H^{0,1}(X, \mathbb{C})}.$$

Par dualité de Serre, la conjugaison $H^1(X, \Omega^2_X) \to H^2(X, \Omega^1_X)$ est aussi un $\mathbb{R}$-isomorphisme, c'est-à-dire :

$$H^{2,1}(X, \mathbb{C}) \simeq \overline{H^{1,2}(X, \mathbb{C})}.$$

Preuve : l'injectivité de j_1 donnée par le c) de la proposition 8.1.1 nous dit que $h^{1,0} \leq h^{0,1}$ et grâce à l'inégalité (8.1) on obtient :

$$b_1 = 2h^{0,1} \leq h^{1,0} + h^{0,1} \leq 2h^{0,1}.$$

Ainsi $h^{1,0} = h^{0,1}$ et comme j_1 est injective par le c) de la proposition 8.1.1, on en déduit que c'est un isomorphisme.

□

8.2 Courants kählériens et premier nombre de Betti pair

La suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

nous donne la suite exacte en cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{i} H^2(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

ce qui nous donne alors :

$$b_1 = 2h^{0,1} \Leftrightarrow i \text{ est injective.}$$

Par dualité on obtient la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^0(X, \Omega^2_X) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{p} V^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \Omega^2_X) \longrightarrow \cdots$$

Si $b_1 = 2h^{0,1}$ alors p est surjective et donc toute $(1,1)$-forme réelle dd^c-fermée est la composante $(1,1)$ d'une 2-forme réelle d-fermée.
On veut montrer que toute surface compacte à b_1 pair est kählérienne, pour cela on va utiliser le corollaire 7.1.1, c'est-à-dire qu'il nous faut trouver un courant kählérien sur cette surface. Le théorème 7.2.1 nous donne une

manière de trouver un tel courant à l'aide des courants nef pluriharmoniques composante d'un bord, ce que nous allons faire.
On pose :

$$Z^{1,1}_{dd^c}(X) = \{\omega \in \mathcal{A}^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \;/\; dd^c\omega = 0\}$$

et :

$$Z^2_d(X) = \{\omega \in \mathcal{A}^2_{\mathbb{R}}(X) \;/\; d\omega = 0\}.$$

***Proposition* 8.2.1.** *Soit X une surface complexe telle que $b_1 = 2h^{0,1}$. Alors il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $S : Z^{1,1}_{dd^c}(X) \to Z^2_d(X)$ telle que :*
a) $S(\omega) = \partial\gamma + \omega + \overline{\partial}\overline{\gamma}$ où γ est une $(1,0)$-forme.
b) $S(\partial\overline{\sigma} + \overline{\partial}\sigma) = d(\sigma + \overline{\sigma})$.

Preuve : soit ω une $(1,1)$-forme dd^c-fermée donc la forme $\partial\omega$ est $\overline{\partial}$-fermée.
Notons $f : H^1(X, \Omega^2_X) \to H^2(X, \Omega^1_X)$ la conjugaison, alors $f([\partial\omega]) = 0$. Par le corollaire 8.1.1, on sait que f est un $\mathbb{R}$-isomorphisme donc $[\partial\omega] = 0$ dans $H^1(X, \Omega^2_X)$. Ainsi il existe une $(2,0)$-forme β telle que $\partial\omega = -\overline{\partial}\beta$.
Soit $\tilde{\theta} = \beta + \omega + \overline{\beta}$, il est facile de voir que c'est une 2-forme d-fermée.
Remarquons que $\overline{\beta}$ est une $(0,2)$-forme $\overline{\partial}$-fermée, par le a) de la proposition 8.1.1, il existe une 2-forme holomorphe η et une $(1,0)$-forme γ telles que $\overline{\beta} = \overline{\eta} + \overline{\partial\gamma}$.
On a alors :

$$\tilde{\theta} = \eta + \partial\gamma + \omega + \overline{\eta} + \overline{\partial\gamma} = \partial\gamma + \omega + \overline{\partial}\overline{\gamma} + (\eta + \overline{\eta}).$$

Enfin la 2-forme réelle $\theta = \tilde{\theta} - (\eta + \overline{\eta})$ est d-fermée et de composante $(1,1)$ égale à ω.
Ainsi on vient de montrer qu'il existe une 2-forme d-fermée réelle θ telle que $\theta^{1,1} = \omega$ et telle que $\theta^{0,2}$ est $\overline{\partial}$-exacte. Montrons qu'il y a également unicité.
Soient $\theta_i = \partial\gamma_i + \omega + \overline{\partial}\overline{\gamma}_i$, pour $i = 1, 2$, on a :

$$d\theta_i = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial}\partial\gamma_i + \partial\omega + \overline{\partial}\omega + \partial\overline{\partial}\overline{\gamma}_i = 0.$$

Or γ_i est telle que $\overline{\beta}_i = \overline{\eta}_i + \overline{\partial}\overline{\gamma}_i$ donc $\overline{\overline{\partial}\beta_i} = \overline{\overline{\partial}\eta_i} + \partial\overline{\partial}\overline{\gamma}_i$, c'est-à-dire $-\overline{\partial}\omega = \partial\overline{\partial}\overline{\gamma}_i$, vu que η_i est holomorphe et que ω est réelle. Ainsi :

$$d\theta_i = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial}\partial\gamma_i + \partial\omega = 0.$$

Il vient alors que :

$$\overline{\partial}\partial(\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$$

On en déduit donc que la $(2,0)$-forme $\partial(\gamma_1 - \gamma_2)$ est holomorphe et exacte, par le a) de la proposition 8.1.1, il vient que $\partial(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$ et donc que $\theta_1 = \theta_2$, ce qui prouve l'unicité.

On pose maintenant $S(\omega) = \theta$, la linéarité de S ainsi que la propriété b) se déduisent alors facilement de l'unicité de θ.

$\square$

Notons maintenant :

$$s : V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \to H^2(X, \mathbb{R})$$

l'application induite par S, elle est bien définie grâce à la propriété b) de la proposition 8.2.1. De plus, l'application :

$$\begin{aligned} \pi^{1,1} : Z_d^2(X) &\to Z_{dd^c}^{1,1}(X) \\ \theta &\mapsto \theta^{1,1} \end{aligned}$$

passe à la cohomologie et induit :

$$p : H^2(X, \mathbb{R}) \to V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X).$$

Comme $\pi^{1,1} \circ S = id$, alors $p \circ s = id$.

***Proposition* 8.2.2.** *Soit X une surface complexe telle que $b_1 = 2h^{0,1}$. Alors l'application :*

$$p \circ i : H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \to V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$$

est un isomorphisme.

Preuve : $Im\, i$ est l'ensemble des classes représentables par des $(1,1)$-formes réelles d-fermées. Si ω est une $(1,1)$-forme réelle dd^c-fermée, alors $\tilde{\omega} = \omega - (\overline{\partial}\gamma - \partial\overline{\gamma})$ est une $(1,1)$-forme et on a $\tilde{\omega} = \theta - d(\gamma + \overline{\gamma})$, où γ et θ sont données par la preuve de la proposition 8.2.1. Ainsi $\tilde{\omega}$ est d-fermée et $S(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$.
Ainsi $s([\omega]) = \{\tilde{\omega}\}$ et comme $p \circ s = id$ on en déduit donc que :

$$Im\, s = Im\, i.$$

Il est alors immédiat de voir que $p_{|Im\, i} = p_{|Im\, s}$ est un isomorphisme. Or $b_1 = 2h^{0,1}$, donc i est injective et donc c'est un isomorphisme de $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ sur $Im\, i$.
On en conclut donc que $p \circ i : H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \to V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ est un isomorphisme.

$\square$

***Lemme* 8.2.1.** *Soient X une surface complexe compacte telle que $b_1 = 2h^{0,1}$ et T un courant positif d-fermé de bidegré $(1,1)$ composante d'un bord. Alors $T = 0$.*

Preuve : soit α la classe de T dans $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$. On a :

$$p \circ i(\alpha) = [T] = [\overline{\partial}\sigma + \partial\overline{\sigma}] = 0$$

ceci dans $V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. Ainsi $\alpha = 0$ car, d'après la proposition 8.2.2, $p \circ i$ est un isomorphisme.
On en conclut donc que $T = dd^c\varphi$, mais T est un courant positif, donc φ est p.s.h. sur X compacte, c'est-à-dire φ est constante et $T = 0$.

□

On arrive maintenant au théorème principal de cette partie, dans la proposition 5.1.3 on a vu que si une surface était kählérienne alors $b_1 = 2h^{0,1}$, le théorème suivant montre que la reciproque est vraie.

***Théorème* 8.2.1.** *Soit X une surface complexe compacte telle que $b_1 = 2h^{0,1}$, alors elle est kählérienne.*

Preuve : par le corollaire 7.1.1 il nous suffit juste de montrer qu'il existe un courant kählérien sur X, pour cela, grâce au théorème 7.2.1, on montre que tout courant nef pluriharmonique composante d'un bord est nul.
Soit donc $T = \lim\limits_{p \to +\infty} \omega_p$ (limite au sens faible), où $(\omega_p)_p$ est une suite de $(1,1)$-formes positives dd^c-fermées et T est un courant de bidegré $(1,1)$ composante d'un bord.
Notons $\theta_p = S(\omega_p)$, on a donc $\lim\limits_{p \to +\infty} [\omega_p] = 0$ dans $V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. On en déduit donc que $\lim\limits_{p \to +\infty} s([\omega_p]) = 0$ dans $H^2(X, \mathbb{R})$ vu que s est un morphisme entre espaces vectoriels de dimension finie donc continu.
Ainsi $\lim\limits_{p \to +\infty} \{\theta_p\} = \lim\limits_{p \to +\infty} \{S(\omega_p)\} = 0$, toujours dans $H^2(X, \mathbb{R})$.
Comme θ_p est d-fermée, par le théorème de Stokes, on en déduit que :

$$\int_X \theta_p \wedge \theta_p = \{\theta_p\}^2$$

ne dépend que de la classe de $\{\theta_p\}$ dans $H^2(X, \mathbb{R})$. Ainsi :

$$\lim_{p \to +\infty} \int_X \theta_p \wedge \theta_p = \lim_{p \to +\infty} \{\theta_p\}^2 = 0.$$

On sait que, par la preuve de la proposition 8.2.1, la 2-forme θ_p s'écrit $\theta_p = \beta_p + \omega_p + \overline{\beta}_p$, où $\beta_p = \partial\gamma_p$ est une $(2,0)$-forme. Or :

$$\theta_p \wedge \theta_p = 2\beta_p \wedge \overline{\beta}_p + \omega_p \wedge \omega_p \geq 2\beta_p \wedge \overline{\beta}_p \geq 0$$

car $\omega_p \wedge \omega_p$ et $\beta_p \wedge \overline{\beta}_p$ sont des $(2,2)$-formes positives. Ainsi, on en déduit que :

$$\lim_{p\to+\infty} \int_X \beta_p \wedge \overline{\beta}_p = 0.$$

Soit ζ une $(0,2)$-forme, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\left| \int_X \beta_p \wedge \zeta \right| \leq \left(\int_X \beta_p \wedge \overline{\beta}_p \right)^{1/2} \left(\int_X \overline{\zeta} \wedge \zeta \right)^{1/2}.$$

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_X \beta_p \wedge \zeta = 0$ pour toute $(0,2)$-forme ζ.
Ainsi $\beta_p \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{D}'^{0,2}(X)$, lorsque $p \to +\infty$. Il vient alors que, dans $\mathcal{D}'^{0,2}(X)$:

$$\lim_{p\to+\infty} \theta_p = \lim_{p\to+\infty} \beta_p + \omega_p + \overline{\beta}_p = \lim_{p\to+\infty} \omega_p = T$$

et comme $d\theta_p = 0$, on en conclut que $dT = 0$. En appliquant le lemme 8.2.1 on en déduit que $T = 0$.

$\square$

On peut améliorer le résultat du théorème 8.2.1 en l'étendant à toutes les surfaces compactes à b_1 pair grâce au théorème de Kodaira.

***Théorème* 8.2.2 (de Kodaira).** *Soit X une surface complexe compacte, alors :*
a) $b_1 = h^{1,0} + h^{0,1}$.
b) si b_1 est pair alors $h^{1,0} = h^{0,1}$ et $b_1 = 2h^{0,1}$.
c) si b_1 est impair alors $h^{1,0} = h^{0,1} - 1$ et $b_1 = 2h^{0,1} - 1$.

Preuve : on admet la preuve de ce théorème qui repose essentiellement sur le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

$\square$

***Corollaire* 8.2.1.** *Une surface complexe compacte est kählérienne si et seulement si elle est à b_1 pair.*

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$: on applique la proposition 5.1.3.
$\boxed{\Leftarrow}$: on applique le théorème 8.2.2 de Kodaira et le théorème 8.2.1.

$\square$

Bibliographie

[BDIP] J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et synthèses, Société Mathématique de France, 1996.

[BPV] W. Barth, C.Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*,Springer, 1984.

[De1] J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry.*

[De2] J.-P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Alg. Geom., 1992.

[Lam] A. Lamari, *Courants kählériens et surfaces compactes*, Annales de l'institut Fourier, tome 49, 1999.

[Sab] C. Sabbah, *Théorie de Hodge et théorème de Lefschetz difficile*, Notes de Cours, 2000-2001.

[Shi] B. Shiffman, *Extension of positive line bundles and meromorphic maps*, Invent. Math., 15, 1972.

[Voi] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, Société Mathématique de France, 2002.