1 La crise des fondements des mathématiques

Au début du 20ème siècle, à la suite des travaux de Cantor, Frege et Russell, plusieurs mathématiciens et philosophes s'interrogent sur les fondements et la nature de l'activité mathématique. Les actes d'un congrès sur les fondations des mathématiques qui s'est tenu à Leiden en 1931 montrent qu'à cette époque s'étaient déjà dégagés trois points de vue distincts sur ces questions, défendus par les écoles logicistes, formalistes et intuitionistes.

L'école logiciste, la plus ancienne, a ses racines dans les 'Principia Mathematica' publiés par Russell et Whitehead entre 1910 et 1913. Dans cet ouvrage, les auteurs définissent un langage formel et donnent des axiomes logiques ainsi que des principes de déduction et leur but est double. D'une part, il cherchent à formuler les principes logico-grammaticaux sous-tendant toute activité scientifique et mathématique et d'autre part il espèrent montrer que ces principes conduisent aux notions mathématiques de base, ç-à-d à la notion de nombre naturel et par delà ce dernier à la notion de nombre réel. Ces dernières notions en main, on peut construire l'ensemble des objets des mathématiques classiques. On appelle 'logiciste' l'approche des Principia Mathematica dans la mesure où on espère y montrer que la constitution des objets mathématiques fondamentaux ne nécessite que les axiomes logiques des base, accompagnés éventuellement de quelques postulats supplémentaires, dont l'on cherche à réduire autant que possible le nombre.

Pour fixer les idées, voici quelques exemples d'axiomes logiques. Soit A, B, C des propositions. Alors les propositions

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$((A \Rightarrow B) \;\&\; (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

et le 'principe du tiers exclu', ou 'tertium non datur'

$$A \vee \neg A$$

sont des axiomes logiques. Il y a deux règles de déduction : le 'modus ponens' qui permet de passer de A et $A \Rightarrow B$ à B et la 'généralisation' (que nous ne définissons pas formellement).

Les Principia doivent d'emblée faire face à un problème technique d'envergure, qui est le 'Paradoxe de Russell'. Ce paradoxe apparaît si l'on s'autorise à faire des énoncés logiques quelconques sur les ensembles. En voici une version simple. Soit E l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas des éléments d'eux-mêmes. Alors soit $E \in E$ soit $E \notin E$. Dans le premier cas, on conclut que E est un élément de lui-même, ce qui n'est pas possible.

Dans le deuxième cas, on conclut à l'inverse que E est un élément de lui-même, ce qui n'est pas possible non plus. Ce paradoxe conduit Russell et Whitehead à leur 'théorie des types', qui restreint les formules logiques autorisées en les stratifiant, de manière à interdire une auto-référence comme celle qui a lieu dans le paradoxe susmentionné.
Dans une veine parallèle, l'école formaliste, dont le plus grand défenseur était le mathématicien D. Hilbert, se donne un arsenal formel semblable - ç-à-d un langage formel et des règles de déduction - mais cherche à constituer pour chaque domaine des mathématiques un système d'axiomes simples dans lequel on peut puiser pour démontrer les résultats principaux de ce domaine. D. Hilbert avait déjà accompli en 1899 un pareil travail d'axiomatisation avec la géométrie plane dans son livre 'Die Grundlagen der Geometrie', dans lequel il reprend et complète le système des axiomes des Éléments d'Euclide. À l'échelle de toutes les mathématiques, E. Zermelo constitue en 1908 un système d'axiomes pour la théorie des ensembles qui est suffisant pour construire les nombres entiers et réels et plus généralement tous les ensembles considérés dans les mathématiques classiques. Ce système donne une base formelle précise à la théorie des ensembles initiée par G. Cantor vingt ans plus tôt.
À la différence de l'approche logiciste, on accepte dans le formalisme d'ajouter des axiomes arbitraires aux axiomes logiques, pourvu qu'ils soient en petit nombre. Le fait que cette adjonction ne peut être justifiée de manière universelle - ç-à-d indépendente de contingences culturelles et historiques - ne préoccupe pas le formaliste, qui souhaite essentiellement avoir un cadre formel confortable et sûr dans lequel travailler. Comme l'écrivait D. Hilbert :
'Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.'
(Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926), S. 170).
Voici un exemple de point contentieux opposant l'école logiciste et formaliste. Dans la théorie des ensembles de E. Zermelo, on trouve l'axiome de l'infini, qui dit en substance qu'il existe un ensemble E tel que E est en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble E' de E tq $E' \neq E$ (par ex. $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ et donc $\mathbb{N}$ est infini). Ce postulat, qui est nécessaire pour définir l'ensemble des nombres naturels, n'est pas une conséquence d'axiomes plus simples sur les ensembles et semble complètement arbitraire du point de vue logiciste. Il est cependant fort utile pour développer les bases des mathématiques à partir de l'ensemble vide !
Voici encore deux remarques sur les points de vue logicistes et formalistes.
- Le logicisme a par rapport au formalisme le désavantage important qu'il nécessite en dernier ressort d'introduire un méta-langage, ç-à-d celui de la théorie des types. Autrement dit, pour pouvoir pratiquer les mathématiques logicistes, il est nécessaire de

pouvoir parler en termes logiques des formules avec lesquelles on travaille, car il faut pouvoir déterminer leurs types. Cet aspect auto-référentiel du logicisme est au coeur de la critique que Wittgenstein fait des Principia Mathematica dans son Tractatus Logico-Philosophicus. Le système de E. Zermelo permet de se défaire de cette 'logique à deux étages' en restreignant d'emblée les formules aux ensembles construits au moyen des axiomes à partir de l'ensemble vide. On notera que la notion de méta-langage n'apparaît pas explicitement dans les Principia et ne sera formalisée que dans les années vingt. L'idée du méta-langage est mentionnée explicitement, peut-être pour la première fois, dans la préface par Russell au Tractatus Logico-Philosophicus de Wittgenstein.

- Avant les travaux de K. Gödel, les logicistes ainsi que les formalistes espéraient qu'ils parviendraient à démontrer la consistence et la complétude de leurs systèmes. La consistence est un problème épineux, car une approche formelle à la consistence d'un système formel demande l'usage d'un méta-système formel consistent et on doit ainsi faire face à nouveau à un problème d'auto-référence, cette fois-ci multiplié à l'infini ! En ce qui concerne la complétude, l'espoir d'axiomatiser simplement les mathématiques classiques a été ruiné par un fameux théorème de Gödel, qui prédit que dans tout système quelque peu sophistiqué (comme celui de E. Zermelo, par exemple), il existe des énoncés qui ne sont pas des conséquences des axiomes.

L'intuitionisme, quant à lui, fait sa première apparition en 1907 dans la thèse du mathématicien hollandais L.E.J. Brouwer. Ses préoccupations sont tout d'abord de nature constructiviste. Grosso modo, il considère que les objets mathématiques qui ne sont pas explicitement construits par des algorithmes finis n'existent pas. De ce fait, il rejette le principe logique du 'tiers exclu', qui postule que toute proposition est soit fausse, soit vraie (cf. plus haut). La raison de ce rejet est le fait que le tiers exclu permet d'assurer l'existence d'objets impossibles à construire lorsqu'on travaille avec des ensembles infinis. Voici un exemple, tiré de l'article de Brouwer 'Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie', publié en 1923.

On considère le nombre

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288 42\ldots$$

et on définit le nombre k_1 comme le premier indice dans la suite des décimales de π tel que la suite 0123456789 apparaît à partir de cet indice. Ensuite on définit la suite de nombres rationnels $(c_\nu)_{\nu\leq 1}$ par la régle $c_\nu = (-1/2)^{k_1}$ si $\nu \geq k_1$ et $c_\nu = (-1/2)^\nu$ sinon.

D'un point de vue 'classique' (ç-à-d incluant le principe du tiers exclu), la suite des c_ν converge soit vers 0, soit vers $(-1/2)^{k_1}$. Brouwer argumente que la suite des c_ν converge bien vers un nombre réel r (mettons) mais que r ne vérifie aucune des propriétés suivantes : $r = 0$, $r < 0$, $r > 0$. En particulier, la droite réelle ne forme pas un ensemble

totalement ordonné. Sa justification 'intuitioniste' est la suivante : nous ne connaissons aucun moyen de calculer le nombre k_1 (ou de déterminer s'il existe) donc le problème du calcul de k_1 est en pratique indécidable (ç-à-d n'est pas une conséquence des axiomes - un notion encore floue à l'époque). Donc nous n'avons aucun moyen de déterminer si $r = 0$, $r < 0$ où $r > 0$, ce qui par le Diktat intuitioniste implique que r n'a aucune de ces propriétés.
La reformulation 'intuitioniste' du principe du tiers exclu que Brouwer donne dans un exposé au 10ème congrès international de philosophie en 1948 résume bien le point de vue illustré par cet exemple :
'Every assignment τ of a property to a mathematical entity can be judged, ie either proved or reduced to absurdity.'
Il est important de comprendre que Brouwer ne s'oppose pas à l'idée de l'infini. On peut considérer une suite infinie de nombres rationnels mais tout énoncé de comparaison entre deux telles suites doit être justifié de manière finitiste. Par ailleurs, Brouwer ne s'intéresse initialement pas au problème de savoir s'il est possible de montrer a priori que l'énoncé $(r < 0) \vee (r \geq 0)$ est ou n'est pas démontrable dans un système formel particulier. Il affirme au contraire que les mathématiques sont indépendantes de toute expression linguistique, sont 'intuitives a priori', et que les principes logiques apparaissent comme un sous-produit de la pratique mathématique. Il est facile de voir que le principe du tiers exclu est redondant si l'on ne manipule que des ensembles finis et il argumente que dans les mathématiques infinitistes qui se sont développées pendant les temps modernes, le principe du tiers exclu, 'intuitif' dans le cas fini, a été étendu par erreur au cadre des ensembles infinis. Nous reviendrons plus tard sur cette dernière explication, qui reflète en fait un point de vue sur le tiers exclu qui diffère du point de vue constructif illustré par l'exemple précédent.
La pensée de Brouwer contient ainsi plusieurs lignes dialectiques :
(a) Les mathématiques sont le fruit d'une certaine intuition a priori, dont tout être connaissant est capable (ceci fait songer à Kant mais Brouwer ne semble pas s'être inspiré directement de ce dernier).
(b) Cette connaissance, tout comme la connaissance du monde physique, est finitiste et on ne peut adéquatement parler que de connaissance d'objets mathématiques définis par des processus constructifs finis. En fait, seuls les objets définis de manière finitiste existent.
(c) Le caractère a priori de l'intuition mathématique lui donne un statut autonome qui la rend indépendante du langage. Brouwer est ainsi opposé à une formalisation complète des mathématiques, qui ne joue selon lui qu'un rôle subalterne.

Après la thèse de Brouwer, le mathématicien A. Heyting a cherché malgré tout à donner une base formelle aux mathématiques intuitionistes, afin de clarifier les différences techniques entre les mathématiques de type intuitioniste et les mathématiques logicistes et formalistes (son travail a été accompli pour obtenir un prix de la société mathématique des Pays-Bas en 1927). Il a exhibé un système d'axiomes logiques pour l'intuitionisme qui coïncide avec les axiomes traditionnels des Principia, si on y adjoint le principe du tiers exclu. L'intuitionisme s'est par la suite développé sur ces base formelles mais on peut argumenter, à la suite de M. Detlefsen, que l'intuitionisme après Heyting n'est que partiellement compatible avec le point de vue initial de Brouwer.

2 La critique Wittgensteinienne du principe du tiers exclu I

Il est possible de démontrer plusieurs résultats sur la logique intuitioniste. Par exemple :
- La logique classique est consistente si et seulement si la logique intuitioniste l'est (Gödel-Gentzen).
- une proposition A est démontrable classiquement si et seulement si $\neg\neg A$ est démontrable en logique intuitioniste (Glivenko)
- une proposition du type $A \Rightarrow \neg B$ est démontrable en logique classique si et seulement si elle est démontrable en logique intuitioniste (Gödel).

En particulier, on pourrait penser que l'approche intuitioniste est sans grand intérêt car le principe du tiers exclu ne pourrait entrainer de contradictions qu'au prix de l'inconsistence de la logique intuitioniste. Ceci était déjà connu de Brouwer, qui ne se laisse pas désarçonner par ce fait, car
'...an incorrect theory, even if it cannot be inhibited by any contradiction that would refute it, is none the less incorrect, just as criminal policy is none the less criminal even if it cannot be inhibited by any court that would curb it.' (trad. S. Bauer-Mengelberg)
('Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie', publié en 1923)
Pour mieux comprendre la nature de l'attitude intuitioniste, il faut aller au-delà de ces aspects formels et faire une analyse critique du discours des intuitionistes lorsqu'ils refusent de faire usage du tiers exclu.
C'est ici que l'apport de Wittgenstein, dont on rappelle qu'il décrit dans le Tractatus Logico-Philosophicus la philosophie comme une critique du langage (TLP 4.0031), est précieux. Afin de décrire son analyse du discours intuitioniste, qui est parsemée dans son livre 'Remarques sur les fondements des mathématiques' et dans les notes de ses

cours à Cambridge sur les fondements des mathématiques, il nous sera utile de rappeler quelques notations usuelles en logique du premier ordre.
Soit T un ensemble d'énoncés en logique du premier ordre faits dans une langage fixé $\mathcal{L}$. On dira que l'ensemble M est un modèle de T si toutes les constantes et relations apparaissant dans le langage sont réalisées par des 'vraies' constantes et relations dans M et si tous les énoncés de T sont 'vrais' dans M. Soit A un autre ensembles d'énoncés. On écrit $A \models_M T$ si les énoncés de T sont vrais dans le modèle M de A (ceci implique que$M$ est aussi un modèle de T). Si les énoncés de T sont vrais dans *tous* les modèles de A, on écrit simplement $A \models T$ On écrit par ailleurs $A \vdash T$ si les énoncés de T sont des conséquences formelles des axiomes de la logique du premier ordre classique ainsi que des énoncés de A. Un théorème fondamental de la logique du premier ordre dit que $A \vdash T$ *si et seulement si* $A \models T$.
Considérons maintenant la phrase 'Soit la séquence 123456789 apparaît dans la suite des décimales de π, soit elle n'apparait pas.' Un pareille phrase semble inacceptable à Brouwer, qui explique que cette disjonction est inacceptable, car si on n'est pas en mesure d'exhiber une endroit dans la suite des décimales de π où cette séquence apparaisse ou de produire une démonstration de la non-existence de cette séquence dans la suite des décimales, alors la phrase ci-dessus est fausse, car on n'a pas connaissance de l'ensemble de la suite des décimales, qui est infini. On notera que ce problème ne surgirait pas si la suite des décimales était finie, car dans ce cas là, la donnée de la suite permettrait de fournir une démonstration de l'existence où de la non-existence de la séquence 123456789.
Voici une tentative de traduction symbolique de l'explication de Brouwer. Soit A un système d'axiomes - de l'arithmétique, ou de l'analyse ou de la théorie des ensembles - qui soit licite pour obtenir des démonstrations putatives d'existences ou de non-existence de séquences de nombres entiers dans une suite de nombres entiers. Un tel système d'axiomes est implicite chez Brouwer car sinon il serait impossible de manipuler logiquement les données, en particulier de parler de démonstration. Soit M le modèle de A dans lequel on travaille lorsqu'on considère le nombre π et ses décimales. Soit P la proposition 'La séquence 123456789 apparaît dans la suite des décimales de π.' Le principe du tiers exclu permet d'affirmer que

$$A \models_M P \wedge \neg P$$

et donc on peut conclure que soit l'énoncé $A \models_M P$ est vrai soit il n'est pas vrai.
La disjonction que considère Brouwer est cependant d'un autre type. Il affirme qu'il n'est pas vrai qu'on ait soit $A \vdash P$ soit $A \vdash \neg P$. En particulier, le modèle M semble absent dans sa présentation car il ne peut jouer de rôle dans la fabrication d'une démonstration de P ou de $\neg P$. L'énoncé 'il n'est pas vrai qu'on ait soit $A \vdash P$ soit $A \vdash \neg P$' peut effectivement

être vrai, car il est possible que P et $\neg P$ ne soient pas des conséquences des énoncés de A.
Il semble donc que le principe du tiers exclu considéré par Brouwer n'est pas un énoncé en logique du premier ordre. Il s'agit d'un énoncé fait dans le méta-langage utilisé pour en parler, dont les signes $\models$ et $\vdash$ font partie.
Dans les termes de Wittgenstein, 'l'alternative de l'existence ou de la non-existence d'une telle règle [pour déterminer la présence de la séquence 123456789 dans la suite des décimales de π] n'est en tout cas pas une alternative mathématique' (extrait de 'Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik', trad. Bouveresse).
Le principe du tiers exclu que Brouwer veut invalider n'est donc pas l'énoncé mathématique $A \models_M P \wedge \neg P$ et ne peut donc lui être comparé.
Cependant, un intuitioniste argumenterait probablement que le fait de considérer un modèle d'un ensemble d'énoncés est contraire à la nature des mathématiques, qui sont constituées d'objets vivant dans 'l'a priori intuitioniste', où ils existent une fois pour toutes. Le fait de pouvoir varier les modèles ne serait qu'une possibilité perverse issue de la représentation des mathématiques dans un langage.
Cependant on se retrouve alors dans une situation epistémologique délicate. En effet, selon Brouwer on doit identifier ce que l'on sait démontrer sur cet objet universel intuitioniste avec ce qu'il est. Ceci est compatible avec le fait qu'il est un objet connu a priori et donc antécédent à l'expérience. En particulier, si l'on ne peut déterminer constructivement la présence de la séquence 123456789 dans les décimales de π alors il n'est pas vrai que cette séquence apparaît, ç-à-d il est vrai que cette séquence n'apparaît pas. Ce fait étant établi, on doit donc pouvoir, par hypothèse, le démontrer. On a donc établi le principe du tiers exclu pour notre objet universel, ce qui contredit l'assertion de Brouwer.
La raison de fond pour ceci est le fait que le principe du tiers exclu est utilisé implicitement lorsqu'on dit qu'on doit choisir entre l'affirmation de la présence de la séquence 123456789 ou l'affirmation de son absence. On remarquera cependant que ici, le principe du tiers exclu est utilisé au niveau du méta-langage et sa présence au niveau du méta-langage se transfère à l'objet universel.
Cette difficulté de l'intuitionisme, qui apparaît dès que cette doctrine veut identifier le 'constructible' ou le démontrable avec ce qui est, est déjà discutée dans les travaux du philosophe anglais M. Dummett.
Pour résumer en une phrase le noyau de la difficulté du refus du tiers-exclu intutioniste, on peut dire qu'il réside dans une confusion entre les expressions $A \models_M \neg P$ et $\neg(A \vdash P)$.
Cette confusion n'est possible que parce qu'on a identifié en amont l'énoncé 'affirmer que non-P' et l'énoncé 'il n'est pas vrai qu'on peut affirmer que P' et ainsi confondu

deux niveaux de langage.
La critique du tiers-exclu intuitioniste que nous venons de présenter se recoupe avec la présentation du problème de la négation chez Wittgenstein que J.-Ph. Narboux donne dans son article 'Négation et Totalité dans le Tractatus'. Par exemple : nous avons vu plus haut qu'il est possible qu'on ait à la fois $\neg(A \vdash P)$ et $\neg(A \vdash \neg P)$. En particulier la négation de $A \vdash P$ n'est pas $A \vdash \neg P$ mais bien $\neg(A \vdash P)$. L'énoncé $A \vdash \neg P$ implique bien que $\neg(A \vdash P)$ mais beaucoup d'autres énoncés pourraient impliquer $\neg(A \vdash P)$. Ceci est parallèle à la discussion de l'existence et de l'unicité de la négation telle qu'elle est présentée dans la première partie de l'article de J.-Ph. Narboux, qui attribue cette distinction à E. Anscombe (dans son introduction au Tractatus).
Revenons maintenant à l'objet universel intuitioniste. Il est intéressant d'examiner plus avant cet objet d'un point de vue logique, même si on accepte maintenant le principe du tiers exclu. Selon Brouwer, toutes les vérités concernant l'objet universel sont des conséquences des axiomes, lesquels doivent être fournis 'par lecture directe' par l'objet lui-même. Si on revient sur la présentation formelle que nous avons faite plus haut et que l'on insiste pour que l'objet universel soit un modèle M d'un système d'axiomes A alors on se trouve dans la situation ou le système A est complet, ie que tout énoncé E ou sa négation $\neg E$ est une conséquence des énoncés dans A. On peut par exemple obtenir un pareil système en remplaçant A par un plus gros système, qui dépendrait alors de M. Ceci est une manière de relier a priori notre connaissance de M à la totalité de M. Cette procédure est évidemment problématique car il s'agit encore une fois d'un passage à une strate logique différente de celle du langage $\mathcal{L}$ utilisé pour parler de M.

3 La critique Wittgensteinienne du principe du tiers-exclu II

Dans l'optique de Wittgenstein, les lois logiques sont des règles que nous suivons nécessairement lorsque nous faisons des énoncés sur la réalité. Elles sont de ce fait vide de sens et ne peuvent faire l'objet d'une vérification à la manière d'un énoncé empirique. Par exemple, voici une illustration de la règle logique du syllogisme

$$A\&(A \Rightarrow B) \Rightarrow B.$$

Considérons
$A =$Ce champignon est une amanite tue-mouches.
$B =$Ce champignon est vénéneux.

Supposons que l'on se trouve en présence d'une amanite tue-mouches qui n'est pas vénéneuse. Alors on concluerait que la proposition $A \Rightarrow B$, à savoir que les amanites tue-mouches sont vénéneuses, est incorrecte. On ne concluerait pas que la règle logique du syllogisme est fausse !
Qu'en est-il alors du principe du tiers exclu ? Serait-il d'une autre nature ? Précisons bien que, selon Wittgenstein, le tiers exclu classique fait bien partie des règles logiques :
'Cela fait partie, en effet, de la grammaire du mot "règle", que $p\&\neg p$ ne soit pas une règle (si "p" est une règle).' (extrait de 'Philosophische Grammatik', trad. J. Bouveresse)
et cela signifie simplement (pour citer J. Bouveresse) que 'si nous découvrons une contradiction entre ces règles, nous cessons d'appeler certaines d'entre elles règle'. D'où provient la gêne que ressent Brouwer (et pas seulement lui) devant un principe aussi simple ?
Il donne dans son exposé au 10ème congrès international de philosophie une autre explication sur son aversion pour le tiers exclu, qui est plus élémentaire que celle que nous avons discutée plus haut et qui met en lumière l'origine de son rejet. Comme nous allons le voir, cette explication est d'une nature bien différente :
'...$c_1, \ldots, c_m$ being real numbers, neither the simultaneous supposition, for each of the values $1, \ldots, m$ of ν, that the assertion c_ν *is rational*, has been proved to be either true or contradictory, can lead to a contradiction. However, the simultaneous supposition for *all* real numbers c that the assertion : c *is rational*, has been proved to be either true or contradictory, does lead to a contradiction.'
En d'autres termes, on se trouve en présence d'un ensemble infini, ç-à-d les nombres réels, et une des règles de logique seulement adaptée aux ensembles finis ne trouve plus application. Cependant, à nouveau selon Wittgenstein, on ne se trouve en réalité pas devant un ensemble infini. Il s'agit là bien plutôt d'une illusion engendrée par l'image que nous nous faisons d'un ensemble fini. Plus exactement :
- La notion de finitude est liée aux notions logiques car on peut faire des disjonctions finies de propositions, par ex.
'$c_1 \in \mathbb{Q}$ ET $c_2 \in \mathbb{Q} \ldots$ jusqu'à ET $c_{10} \in \mathbb{Q}$'
- ensuite, on est tenté, lorsqu'on est en présence d'un ensemble infini de considérer une disjonction infinie de propositions

et ceci n'a pas de sens.
Ce que Wittgenstein objecte, c'est que la notion de finitude apparaît bien implicitement dans le calcul propositionel de la logique du premier ordre mais que en revanche la notion d'ensemble infini est une construction mathématique. Par exemple, dans la théorie des ensembles de Zermelo, on postule l'existence d'un ensemble infini en le définissant comme un ensemble qui peut se mettre en relation biunivoque avec l'un de ses sous-

ensembles propres (cf. plus haut). Cette définition est axiomatique et les énoncés mathématiques concernant l'infini se bornent à énoncer, dans le langage de la théorie des ensembles, des conséquences de cet axiome et d'autres axiomes de cette théorie. De ce fait, les énoncés mathématiques ne contiennent jamais de références implicites à l'infini, à la manière où une disjonction finie fait une référence à la finitude par sa construction même. On peut même aller plus loin : même une disjonction finie ne fait pas référence à la finitude car la finitude en tant que notion ne se trouve pas syntactiquement au même niveau, ou autrement dit : une disjonction finie ne peut faire référence à sa propre finitude. Celle-ci ne peut s'exprimer que dans un méta-langage.
Pour résumer : la finitude d'une disjonction et la finitude d'un ensemble mathématique ne sont pas comparables et leur identification frauduleuse nous mène à vouloir transférer l'infini mathématique du côté logique. Il s'agit donc encore une fois d'une illusion 'auto-référentielle'.

4 Conclusion

Si l'on en croit Wittgenstein, les deux justifications Brouweriennes du refus du principe du tiers-exclu sont en fin de compte des non-sens. Par ailleurs, comme on l'a vu, même un univers intuitioniste pourvu du tiers exclu est logiquement problématique. Ceci conforte l'idée que les préoccupations de Brouwer n'étaient pas (au sens ou elles ne pouvaient pas l'être !) d'ordre logique mais plutôt d'ordre épistémologique. C'est ce point de vue qui est développé dans l'article 'Brouwerian intuitionism' de M. Detlefsen (Mind 1990).