Sur la distance p-adique entre un point d'ordre fini et une courbe de genre supérieur ou égal à deux

On the p-adic distance between a point of finite order and a curve of genus higher or equal to two

Damian RÖSSLER *

Résumé

Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{C}_p$ (p premier) et $V \hookrightarrow A$ une sous-variété fermée. La conjecture de Tate-Voloch prédit que la distance p-adique entre un point de torsion $T \notin V(\mathbb{C}_p)$ et la variété V est bornée inférieurement par une constante strictement positive. Cette conjecture est démontrée par Hrushovski et Scanlon, lorsque A a un modèle sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Dans le cas où V est une courbe plongée dans sa jacobienne et possède un modèle sur un corps de nombres, nous donnons une formule explicite pour cette constante, qui dépend d'invariants analytiques et arakeloviens.

Résumé en anglais / English abstract

Let A be an abelian variety over $\mathbb{C}_p$ (p a prime number) and $V \hookrightarrow A$ a closed subvariety. The conjecture of Tate-Voloch predicts that the p-adic distance from a torsion point $T \notin V(\mathbb{C}_p)$ to the variety V is bounded below by a strictly positive constant. This conjecture is proven by Hrushovski and Scanlon, when A has a model over $\overline{\mathbb{Q}}_p$. We give an explicit formula for this constant, in the case where V is a curve embedded into its Jacobian and V has a model over a number field. This explicit formula involves analytic and arakelovian invariants of the curve.

1 Introduction

Soit A une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}_p$, la complétion de la clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Soit V une sous-variété fermée de A. La *conjecture de Tate-Voloch*

*Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, C.N.R.S., Case Postale 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France, E-mail : dcr@math.jussieu.fr

(cf. [15, avant la Prop. 3]) prédit l'existence d'une constante $M_V > 0$, avec la propriété suivante. Pour tout point de torsion $T \in \mathrm{Tor}(A(\mathbb{C}_p))$, si $\mathrm{d}_p(V, T) < M_V$ alors $T \in V(\mathbb{C}_p)$. Ici $\mathrm{d}_p(\cdot, \cdot)$ est la distance p-adique entre T et V (voir plus bas pour cette notion). Cette conjecture est démontrée par Hrushovski et Scanlon ([9, Introduction] et [14]) lorsque A a un modèle sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Le propos du présent texte est de donner une formule explicite pour la constante M_V, dans le cadre suivant : V est définie sur un corps de nombres et l'immersion $V \hookrightarrow A$ est le plongement jacobien défini par un point rationnel. Pour obtenir cette formule, nous combinons une technique de preuve de la conjecture de Tate-Voloch pour les courbes due à Buium (cf. plus bas) avec des résultats de Moret-Bailly en théorie d'Arakelov. Nous montrons que la constante M_V peut être choisie comme une fonction d'invariants analytiques et arakeloviens (Th. 1.1). Dans le cas où la courbe a bonne réduction partout, ces invariants peuvent être approximés numériquement, si l'on dispose d'équations pour la courbe C (cf. Prop. 1.2). Par ailleurs, notre formule est uniforme en le nombre premier p dans la mesure où les invariants sont indépendants du nombre premier p.

L'idée de base de la démonstration est que le théorème du cube dans sa forme arakelovienne permet de comparer la distance p-adique d'un point de torsion au diviseur Θ avec la distance p-adique de l'origine au diviseur Θ. Cette comparaison à elle seule donne une forme très faible de la conjecture de Tate-Voloch, dans la mesure où la distance p-adique y est bornée par une fonction du degré du point de torsion. Il reste alors à estimer ce degré ; on l'estime par la procédure suivante. La méthode de Buium donne une estimée du degré résiduel du point de torsion ; cette estimée implique une estimée pour l'ordre du point de torsion via les estimées de Hasse-Weil. Enfin l'estimée de l'ordre donne une estimée évidente pour le degré.

Venons en à la description précise de notre formule pour la constante M_V.

Soit C une courbe de genre $g \geqslant 2$, définie sur un corps de nombre K_0. Soit $P_0 \in C(K_0)$ un point et $j = j_{P_0} : C \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$ l'immersion jacobienne associée.

Soit K une extension finie de K_0 et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier dans $\mathcal{O}_K$.

On note $\mathcal{N}(C_K)$ le modèle de Néron de $\mathrm{Jac}(C_K)$ sur $\mathcal{O}_K$.

Si $\mathfrak{l} \in \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$, on écrit $\Phi(\mathfrak{l})$ pour le groupe des composantes connexes de la fibre $\mathcal{N}(C_K)_{\kappa(\mathfrak{l})}$ de $\mathcal{N}(C_K)$ au-dessus de $\mathfrak{l}$. On note

$$\mathfrak{n}_K = \mathrm{ppcm}\{\#\Phi(\mathfrak{l}) | \mathfrak{l} \in \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K\}.$$

Soit $\widetilde{C}_{\mathfrak{p}}$ la clôture de Zariski $\mathrm{Zar}(C_K)$ de C_K sur dans $\mathcal{N}(C_K)_{\mathfrak{p}} := \mathcal{N}(C_K) \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$. Ici $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$

est la localisation de $\mathcal{O}_K$ en $\mathfrak{p}$. Soit $P \in \mathrm{Jac}(C)(K) = \mathcal{N}(C_K)_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}})$. On définit alors

$$\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(P, C_K) := \sup_{j \geqslant 0}\{j | P \pmod{\mathfrak{p}^j} \in \widetilde{C}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^j)\}.$$

On notera que $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(P, C_K)$ vaut éventuellement ∞. À partir de là, on définit *la distance* $\mathfrak{p}$-*adique* entre P et C par la formule

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(P, C) := p^{-\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(P, C_K)/\mathrm{e}_{\mathfrak{p}}}.$$

Ici $\mathrm{e}_{\mathfrak{p}}$ est le degré de ramification de $\mathfrak{p}$ sur K_0. Par construction, la distance $\mathfrak{p}$-adique est invariante par extension du corps de nombres K et de la place $\mathfrak{p}$.

On définit la fonction de m

$$\mathrm{Bu}_m := (m(2g-2) + 6g) \cdot m^{2g} \cdot 3^g \cdot g!$$

et la fonction de m et n

$$\mathrm{L}_{n,m} := [n^{\mathrm{Bu}_m \cdot g} + (2^{2g} - 2g - 1)n^{\mathrm{Bu}_m(g-1)} + 2gn^{\mathrm{Bu}_m(g-1/2)}]^{4g^2}.$$

Enfin, on définit la fonction de m

$$\mathrm{H}_m := L_{m^{[K_0:\mathbb{Q}]},m}$$

Si $Y \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$ est un sous-variété fermée, on notera

$$\mathrm{Exc}(Y) := \mathrm{Zar}(Y(\overline{K}_0) \cap \mathrm{Tor}(\mathrm{Jac}(C)(\overline{K}_0)))$$

Le sous-ensemble $\mathrm{Exc}(Y) \hookrightarrow Y_{\overline{K}_0}$ est naturellement $\mathrm{Gal}(\overline{K}_0|K_0)$-invariant et nous le considérerons donc comme un sous-schéma fermé réduit de Y. On rappelle que la conjecture de Manin-Mumford (théorème de Raynaud [13]) prédit que les composantes irréductibles géométriques de $\mathrm{Exc}(Y)$ sont des translatées de sous-variétés abéliennes de $\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}_0}$.

Soit S l'ensemble des nombres premiers que divise un idéal premier de mauvaise réduction de C sur K_0. Soit

$$R := 2 \cdot \mathcal{D}_{K_0/\mathbb{Q}} \cdot \mathfrak{n}_{K_0} \cdot \prod_{l \in S} l$$

où $\mathcal{D}_{K_0/\mathbb{Q}}$ est le discriminant de K_0 sur $\mathbb{Q}$.

Si G est un groupe abélien et $n \in \mathbb{Z}$, notons $\mathrm{Tor}^n(G)$ l'ensemble des éléments de G qui sont d'ordre fini premier à n.

Théorème 1.1. *On suppose que la courbe C a réduction semi-stable sur K_0. Soit $L \subseteq \overline{K}_0$ l'extension maximale de K_0 qui est non-ramifiée au-dessus des idéaux premiers de mauvaise réduction de C sur K_0.*

Soit

$$D := 2 \cdot [K_0 : \mathbb{Q}] \cdot \big| \log \Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}_0}) + [K_0 : \mathbb{Q}]^{-1} \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0) \big|.$$

Soit p un nombre premier tel que $(p, R) = 1$. Soit $\underline{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{O}_L$ un idéal premier divisant p. Alors l'inégalité

$$d_{\underline{\mathfrak{p}}}(T, C) \;\; \geqslant \;\; p^{-\left(1 + D \cdot \mathrm{H}_p\right)}$$

est vérifiée pour tout $t \in \mathrm{Tor}^p(\mathrm{Jac}(C)(L))$ tel que

$$(g-1)T \notin \mathrm{Exc}(W_{g-1})(\overline{K}_0) \cup [-1]^* \mathrm{Exc}(W_{g-1})(\overline{K}_0).$$

La proposition suivante relie l'invariant $[K_0 : \mathbb{Q}]^{-1} \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0)$ apparaissant dans le Théorème 1.1 à des invariants plus classiques.

Proposition 1.2. *Si C a bonne réduction partout sur K_0, alors l'égalité*

$$[K_0 : \mathbb{Q}]^{-1} \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0) = \frac{1}{4} \mathrm{NT}(j(\omega_C)) + \frac{1}{2} \mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}_0}) + \frac{g}{4} \log(4\pi).$$

est vérifiée.

La fonction $\mathrm{NT} : A(\overline{K}_0) \to \mathbb{R}$ est la hauteur de Néron-Tate sur $\mathrm{Jac}(C)$ associée au diviseur Θ sur $\mathrm{Jac}(C)$. Le diviseur ω_C est le diviseur canonique de C.

L'invariant $\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0)$ est un invariant arakelovien. Nous allons utiliser les notations usuelles de la théorie d'Arakelov globale, comme décrites dans [7, Par. 3.1]. Nous allons travailler sur $\mathcal{O}_{K_0}$, que nous considérons comme un anneau arithmétique, que nous munissons comme tel de tous ses plongements dans $\mathbb{C}$. Si W est un schéma sur $\mathcal{O}_{K_0}$, on écrira donc

$$W_\iota := W \times_{\mathcal{O}_{K_0}, \iota} \mathbb{C}$$

pour tout plongement ι de $\mathcal{O}_{K_0}$ dans $\mathbb{C}$ et

$$W_{\mathbb{C}} := \coprod_{\iota : \mathcal{O}_{K_0} \hookrightarrow \mathbb{C}} W_\iota$$

(cf. [7, Par. 3.2.1]). On note $W_{g-1} := C + C \cdots + C$ ($(g-1)$ fois). On note $\mathrm{Zar}(W_{g-1})$ l'adhérence schématique de W_{g-1} dans $\mathcal{N}(C)$. On note $\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))$ le fibré hermitien que l'on obtient en munissant $\mathcal{O}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))$ de l'unique métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont la forme de courbure est invariante par translation et telle que

$$\int_{\mathrm{Jac}(C)_\iota} \langle s, s \rangle \, \mathrm{d}\mu_\iota = 2^{-g/2},$$

pour tout plongement ι de K_0 dans $\mathbb{C}$. Ici $\mathrm{d}\mu_\iota$ est la mesure de Haar sur $\mathrm{Jac}(C)_\iota$ de masse totale 1 et s est la section canonique de $\mathcal{O}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))$ (cf. [11, Par. 3., (3.2.1)]). On rappelle que l'opération $\widehat{\deg}(\cdot)$ associe à chaque fibré en droites hermitien sur Spec $\mathcal{O}_{K_0}$ un nombre réel ; cf. [2, Par. 2.1.2, (2.1.8)] pour la définition. On note enfin $\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0$ la restriction de $\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))$ à Spec $\mathcal{O}_{K_0}$ via la section nulle. La définition $\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0)$ est maintenant élucidée.

La hauteur de Faltings (ou hauteur modulaire) $\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\cdot)$ est définie de la manière suivante (cf. [6, Par. 3]). Soit $\omega_{\mathcal{N}(C)}$ la restriction de $\det(\Omega_{\mathcal{N}(C)/\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_0}})$ à Spec $\mathcal{O}_{K_0}$ via la section nulle. Sur $\mathcal{N}(C)_{K_0} = \mathrm{Jac}(C)$, on dispose d'une identification naturelle $\omega_{\mathcal{N}(C),K_0} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{Jac}(C), \Omega^g_{\mathrm{Jac}(C)/K_0})$. Munissons $\omega_{\mathcal{N}(C)}$ de la métrique hermitienne donnée sur chaque composante $\mathcal{N}(C)_\iota$ de $\mathcal{N}(C)_{\mathbb{C}}$ par la formule

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int_{\mathcal{N}(C)_\iota(\mathbb{C})} a \wedge \overline{\beta}.$$

Alors

$$\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}_0}) = [K_0 : \mathbb{Q}]^{-1} \widehat{\deg}(\overline{\omega}_{\mathcal{N}(C)}).$$

Comme l'indique la notation, la quantité $\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}_0})$ ne dépend que de $C_{\overline{K}_0}$ et non de $\mathcal{N}(C)$.

La constante $\Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}_0})$ est un élément de $\mathbb{R}^*_+$ qui ne dépend que des points complexes de C pour les divers plongements de K_0 dans $\mathbb{C}$. Elle est définie de la manière suivante. Soit M une surface de Riemann compacte de genre g (donc l'ensemble des points complexes d'une courbe algébrique lisse et projective de genre g sur $\mathbb{C}$). Fixons $a_1, \dots a_g, b_1, \dots, b_g$ une base symplectique de $\mathrm{H}_1(M, \mathbb{Z})$. Soit $\omega_1, \dots, \omega_g$ la base de l'espace des 1-formes holomorphes $\mathrm{H}^0(M, \omega_M)$ de M, qui est duale à $a_1, \dots, a_g$ pour l'accouplement $\int_\gamma \eta$ ($\gamma \in \mathrm{H}_1(M, \mathbb{C})$, $\eta \in \mathrm{H}^0(M, \omega_M)$). Soit τ la matrice $g \times g$

$$\tau := \Big[\int_{b_j} \omega_i \Big]_{i,j}.$$

La fonction θ de Riemann (qui dépend du choix de la base symplectique) est alors par définition la fonction sur $\mathbb{C}^g$

$$\theta(z) = \theta(z,\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(2i\pi(\frac{1}{2}\,{}^t m\tau m + {}^t mz))$$

où l'on a identifié les élément de $\mathbb{Z}^g$ à des matrices colonne. Soit Θ le lieu des zéros de θ ; c'est une sous variété analytique complexe fermée de $\mathbb{C}^g$. Le lieu Θ est invariant sous l'action par translation des vecteurs colonne de la matrice $[\mathrm{Id},\tau]$, qui a g lignes et $2g$ colonnes. Le lieu Θ définit ainsi une sous-variété analytique complexe fermée du quotient $\mathbb{C}^g/[\mathrm{Id},\tau]$ de $\mathbb{C}^g$ par le réseau engendré par les vecteurs colonnes de $[\mathrm{Id},\tau]$. On le note aussi Θ par abus de notation. Le quotient $\mathbb{C}^g/[\mathrm{Id},\tau]$ (qui est un tore complexe) s'identifie à la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(M)$ de M. Il existe une unique métrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathcal{O}(\Theta)$ telle que la forme de courbure associée à $(\mathcal{O}(\Theta),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ soit invariante par translation et telle que

$$\int_{\mathrm{Jac}(M)} \langle s,s\rangle \;\mathrm{d}\mu = 2^{-g/2},$$

où $\mathrm{d}\mu$ est la mesure de Haar sur $\mathrm{Jac}(M)$ de masse totale 1 et s est la section canonique de $\mathcal{O}(\Theta)$. Moret-Bailly ([11, Par. 3.2, (3.2.2)]) démontre la formule explicite

$$\langle s(z), s(z)\rangle := \det(\Im(\tau)^{\frac{1}{2}} \exp(-2\pi\,{}^t y(\Im(\tau))^{-1}y)|\theta(x+iy,\tau)|^2,$$

où $z = x+iy \in \mathbb{C}^g$. On identifie ici z avec son image dans $\mathbb{C}^g/[\mathrm{Id},\tau]$. On définit enfin

$$\Theta_{\mathrm{Max}}(M) := \sup_{t\in\mathrm{Jac}(M)} \sqrt{\langle s(t), s(t)\rangle}.$$

Cette constante n'est pas infinie, au vu de la compacité de $\mathrm{Jac}(M)$. Enfin, on définit

$$\Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}}) := \sup_{\iota:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \Theta_{\mathrm{Max}}(C_\iota(\mathbb{C})).$$

On constatera que la constante $\Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}})$ ne dépend que de $C_{\overline{K}}$.

Le cas des courbes de genre 2. On remarquera que si $g = 2$ et que P_0 est fixé par une involution hyperelliptique de $C_{\overline{K}_0}$, alors $\mathrm{NT}(j(\omega_C)) = 0$ car $j(\omega_C)$ est alors un point de 2-torsion. Dans la même situation, la condition sur $(g-1)T$ est aussi superflue, car alors

$$\mathrm{Exc}(W_{g-1})(\overline{K}_0) \cup [-1]^*\mathrm{Exc}(W_{g-1})(\overline{K}_0) \subseteq j(C(\overline{K}_0)).$$

Le Théorème 1.1 et la Proposition 1.2 sont démontrées dans la section 3, la section 2 étant réservée a des préliminaires. On démontrera en fait dans la section 3 un théorème un peu plus fort que le Théorème 1.1 (le Théorème 3.1) mais dont l'énoncé est plus abscons. La section 3 traite l'exemple de la courbe $y^2+y=x^5$. Il y est fait un usage essentiel des calculs faits dans l'article [3].

Remerciements. Je remercie V. Maillot pour nombre de discussions intéressantes et J. Boxall pour ses remarques et pour avoir signalé une erreur de calcul dans une version antérieure de cet article. Mes remerciements vont aussi à L. Moret-Bailly pour sa très utile monographie [12], sans laquelle cet article n'aurait pas vu le jour. Enfin, je suis reconnaissant à J.-F. Mestre, pour plusieurs calculs qu'il a fait dans le contexte du présent article et pour avoir partagé avec moi sa connaissance des fonctions thêta.

2 Préliminaires

Dans cette section, on rappelle les cas particuliers des résultats de Moret-Bailly et Buium dont nous aurons besoin.

2.1 Fibrés en droites cubistes, selon L. Breen et L. Moret-Bailly

Soit L un corps de nombre et $B := \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_L$.

Soit maintenant $\pi : \mathcal{A} \to B$ un schéma en groupes commutatif lisse et de type fini sur B, tel que $\mathcal{A}_L$ est une variété abélienne. Soit $u : B \to \mathcal{A}$ la section nulle. Soit g la dimension relative de $\mathcal{A}$ sur B.

Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathcal{A}$. Nous dirons que $\overline{\mathcal{L}}$ est *cubiste*, si les conditions suivantes sont remplies : on requiert que $\mathcal{L}$ soit cubiste (cf. [12, chap. I] ou [4, chap. 2]) pour cette notion), que $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})_{\mathbb{C}})$ soit une forme différentielle invariante par translation et enfin que l'isomorphisme $u^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_B$ obtenu de la structure cubiste de $\mathcal{L}$ soit une isométrie. On a muni ici le terme $\mathcal{O}_B$ de la métrique triviale. On rappelle que l'on appelle *rigidification* (de $\mathcal{L}$) un isomorphisme $u^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_B$.

Proposition 2.1 (Grothendieck ; Breen ; Moret-Bailly). *On suppose que $\mathcal{A}$ est semi-stable sur B et que les fibres de $\mathcal{A}$ sur B sont connexes. Alors le foncteur d'oubli de la catégorie des fibrés en droites cubistes sur $\mathcal{A}$ vers la catégorie des fibrés en droites rigidifiés sur $\mathcal{A}$ est une équivalence de catégorie.*

Dans la Proposition 2.1, les morphismes de la catégorie des fibrés en droites cubistes (resp. des fibrés en droites rigidifiés) sont les isomorphismes des fibrés en droites qui respectent les structures cubistes (resp. les rigidifications). Pour la démonstration de la Proposition 2.1, voir par exemple [12, I, Par. 2.6].

Pour chaque $P \in B$, soit $c_P(\mathcal{A})$ l'ordre du groupe des composantes connexes de la fibres de $\mathcal{A}$ au-dessus de P. Soit $c(\mathcal{A}) := \mathrm{ppcm}\{c_P(\mathcal{A}) | P \in B\}$.

Proposition 2.2 (Moret-Bailly)**.** *Soit $\mathcal{M}$ un fibré cubiste sur $\mathcal{A}_L$. On suppose que les points de $2 \cdot c(\mathcal{A})^2$-torsion de $\mathcal{A}_{\overline{L}}$ sont définis sur L et que $\mathcal{M}$ est symétrique. On suppose aussi que $\mathcal{A}$ est semi-stable sur B. Il existe alors une unique extension du fibré en droites cubiste $\mathcal{M}$ à un fibré en droite cubiste sur $\mathcal{A}$.*

Pour la preuve, voir [12, II, 1.2.8].

Théorème 2.3 (Moret-Bailly)**.** *Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien cubiste sur $\mathcal{A}$. Soit $z : B \to \mathcal{A}$ une section. Alors $[L : \mathbb{Q}]^{-1}\widehat{\deg}(z^*\overline{\mathcal{L}})$ est la hauteur de Néron-Tate associé au fibré en droite $\mathcal{L}_L$ et au point $z_L \in \mathcal{A}(L)$.*

Pour la preuve, voir [12, III, 4.4.1].

Enfin, nous allons citer le cas particulier de la « formule clé » de Moret-Bailly dont nous ferons usage.

Nous considérons $\mathcal{O}_L$ comme un anneau arithmétique, que nous munissons comme tel de tous ses plongements dans $\mathbb{C}$.

On suppose que $\mathcal{A}$ est semi-stable sur B et que $\mathcal{A}_L$ est une variété abélienne sur L. Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien cubiste symétrique sur $\mathcal{A}$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrique hermitienne sur $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$. On munit l'image directe $\pi_*\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ de la métrique hermitienne donnée par la formule

$$\int_{\mathcal{A}_\iota} \langle \cdot, \cdot \rangle \, \mathrm{d}\mu_\iota \tag{1}$$

où $\mathrm{d}\mu_\iota$ est la mesure de Haar sur $\mathcal{A}_\iota$. On notera $\mathrm{K}(\mathcal{L}_L)$ le noyau de l'isogénie $\mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L^\vee$ définie par $\mathcal{L}_L$.

Théorème 2.4 (Moret-Bailly)**.** *On suppose que l'adhérence de Zariski $\mathrm{K}(\mathcal{L}_L^{\otimes 2})$ est finie sur B. L'image directe $\pi_*\mathcal{L}$ est alors localement libre de rang 1. Par ailleurs, on dispose d'une trivialisation canonique du fibré en droites*

$$(\pi_*\overline{\mathcal{L}})^{\otimes 8} \otimes \omega_{\mathcal{A}}^{\otimes 4}$$

dont la norme est $(2\pi)^{2g}$.

Ici $\pi_*\overline{\mathcal{L}}$ est le fibré hermitien associé au fibré en droites $\pi_*\mathcal{L}$ et à la métrique (1) sur $\pi_*\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ décrite plus haut. Pour la preuve, voir [12, chap. VIII].

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est un schéma abélien sur B. Soit D un diviseur effectif, symétrique, tel que la restriction de $\mathcal{O}(D)$ à chaque fibre géométrique de π donne lieu à une polarisation principale. On munit $\mathcal{O}(D)$ de sa métrique de Moret-Bailly. Le Théorème 2.4 implique en particulier

Théorème 2.5 (Moret-Bailly)**.** *Il existe une trivialisation canonique du fibré en droites*

$$\mathcal{O}(D)_0^{\vee,\otimes 8} \otimes \omega_{\mathcal{A}}^{\otimes 4}.$$

La norme de cette trivialisation est $(4\pi)^{2g}$*.*

2.2 La géométrie modulo l^2 des courbes de genre $\geqslant 2$, selon A. Buium

Soit R un anneau de valuation discrète, absolument non-ramifié et de corps résiduel de caractéristique l. Soit F son corps de fractions.

Soit $\widetilde{E}$ une courbe propre et lisse sur Spec R. On suppose que les fibres géométriques de $\widetilde{E}$ sont de genre $g \geqslant 2$. On suppose donné un point $Q \in \widetilde{E}(F)$. La propriété universelle des modèles de Néron implique que le plongement jacobien $\widetilde{E}_F \hookrightarrow \mathrm{Jac}(\widetilde{E}_F)$ s'étend en un plongement $\widetilde{E} \to \mathcal{N}(\widetilde{E}_F)$ dans le modèle de Néron $\mathcal{N}(\widetilde{E}_F)$ de $\mathrm{Jac}(\widetilde{E}_F)$ sur R.

Le théorème ci-dessous a été établi par Buium dans le cadre de sa démonstration effective de la conjecture de Manin-Mumford pour les courbes :

Théorème 2.6 (Buium)**.** *L'inégalité*

$$\#\widetilde{E}(R/l^2R) \cap l \cdot \mathcal{N}(\widetilde{E}_F)(R/l^2R) \leqslant \mathrm{Bu}_l$$

est vérifiée.

Pour la démonstration, voir [5, fin de la preuve du Th. 1.11].

3 Démonstration de 1.1 et 1.2

Nous allons d'abord démontrer le Théorème 1.1.

Ce théorème est impliqué par le Théorème 3.1 ci-dessous.

Soit K une extension finie de K_0 et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$. Soit $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_{K_0}$ et soit p le générateur positif de $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Soit $q := \#\mathcal{O}_{K_0}/\mathfrak{p}_0$.

Théorème 3.1. *Soit $T \in \mathrm{Tor}(\mathrm{Jac}(C)(K))$. On suppose que*

(1) *la courbe C a réduction semi-stable sur K_0 ;*

(2) *$p > 2$;*

(3) *$\mathfrak{p}_0$ est une place de bonne réduction de C ;*

(4) *$\mathfrak{p}_0$ est non-ramifié sur $\mathbb{Z}$;*

(5) *$(\mathrm{ordre}(T), p) = 1$;*

Alors l'inégalité

$$d_{\mathfrak{p}}(T, C) \quad \geqslant \quad p^{-(1 + D \cdot \mathrm{H}_p)} \tag{2}$$

est vérifiée chaque fois que

$$(g-1)T \notin \mathrm{Exc}(W_{g-1})(\overline{K}) \cup [-1]^* \mathrm{Exc}(W_{g-1})(\overline{K}).$$

Ici

$$D := \#\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{\mathrm{K}_0}) \cdot [\mathrm{K}_0 : \mathbb{Q}] \cdot \left| \log \Theta_{\mathrm{Max}}(\mathrm{C}_{\overline{\mathrm{K}}}) + \frac{1}{4}\mathrm{NT}(\mathrm{j}(\omega_{\mathrm{C}})) + \frac{1}{2}\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\mathrm{Jac}(\mathrm{C})_{\overline{\mathrm{K}}_0}) + \frac{\mathrm{g}}{4}\log(4\pi) \right|.$$

Preuve. Puisque $\mathcal{N}(C_K)_{\mathfrak{p}}$ est un schéma en groupes sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, on a

$$\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(T, C_K) \leqslant \mathrm{v}_{\mathfrak{p}}((g-1)T, W_{g-1,K})$$

et on est donc ramené à estimer $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}((g-1)T, W_{g-1,K})$.

On rappelle qu'il existe un point $\kappa \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K}_0)$ telle que $W_{g-1,\overline{K}_0} + \kappa$ est un diviseur Θ. En particulier, $\Theta := W_{g-1,\overline{K}_0} + \kappa$ est alors symétrique. On peut montrer que $-2\kappa = j(\omega_C)$ (cf. [1, I, 5.]).

Si $\mathfrak{l}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$, on écrira $\mathrm{N}_{\mathfrak{l}} := \#\mathcal{O}_K/(\mathfrak{l} \cap \mathbb{Z})$.

Soit H le corps de classe de Hilbert de K_0. Soit H_1 le corps de définition de κ au-dessus de $H.K$. Soit H_2 l'extension minimale de H_1 telle que tous les points de $2 \cdot \mathfrak{n}_{H_1}$-torsion sont rationnels.

Soit K' une extension de K avec les propriétés suivantes :

- le point κ est K'-rationnel ;
- les points de $2\mathfrak{n}^2_{K(\kappa)}$-torsion sont K'-rationnels ;
- le fibré $\omega_{\mathcal{N}(C_{K'})}$ est trivial ;

Soit k : Spec $\mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{N}(C)$ la section correspondant à κ. Soit $T' := (g-1)T$. Soit t : Spec $\mathcal{O}_{H_2} \to \mathcal{N}(C_K)$ la section correspondante à T'.

Soit λ une section trivialisante de $\omega_{\mathcal{N}(C_{H_2})}$. On munit $\mathcal{O}(\Theta)_0^{\otimes 8}$ de la trivialisation induite par $\lambda_{H_2}^{\otimes 4}$ via le Théorème **??**. On munit enfin $\mathcal{O}(\Theta)_0$ d'une trivialisation sur une extension H_3 de H_2, dont la 8-ème puissance tensorielle est celle de $\mathcal{O}(\Theta)_0^{\otimes 8}$. On munit le fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}}(Theta)$ de la structure cubiste correspondante. Par ..., il existe un fibré en droites hermitien cubiste $\overline{\mathcal{L}}$ étendant $\overline{\mathcal{O}}(\Theta)$ sur $\mathcal{N}(C_{H_3})$. Il existe alors

Soit

$$\overline{M} := \overline{L} \otimes [-1]^*\overline{L} \otimes \overline{L}_0^{\vee,\otimes 2}.$$

On peut supposer sans restriction de généralité que K est la clôture galoisienne du corps de définition de T sur K_0.

On calcule

$$\begin{aligned}
v_{\mathfrak{p}}(T', W_{g-1,K}) &\leqslant v_{\mathfrak{p}}(T', W') \overset{(a)}{\leqslant} \sum_{\mathfrak{l}\in \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K} \log(\mathrm{N}_{\mathfrak{l}}) \cdot v_{\mathfrak{l}}(T', W') \\
&\overset{(b)}{=} (2\mathfrak{n}_K)^{-1}\widehat{\deg}(t^*(\overline{L} \otimes [-1]^*\overline{L})^{\otimes 2\mathfrak{n}_K}) + \frac{1}{2}\sum_{\iota: K\hookrightarrow \mathbb{C}} \log\langle s_L(T'), s_L(T')\rangle_L \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\iota: K\hookrightarrow \mathbb{C}} \log\langle s_L(-T'), s_L(-T')\rangle_L \\
&\overset{(c)}{\leqslant} (2\mathfrak{n}_K)^{-1}\widehat{\deg}(t^*\overline{M}^{\otimes 2\mathfrak{n}_K}) + 2[K:\mathbb{Q}]\log \Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}}) + 2[K:K_0]\widehat{\deg}(\overline{L}_0) \\
&\overset{(d)}{=} 2[K:\mathbb{Q}]\log \Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}}) + 2[K:K_0]\widehat{\deg}(\overline{L}_0).
\end{aligned}$$

L'inégalité (a) est justifiée par la condition (2) du Théorème 3.1. L'égalité (b) est justifié par la définition du degré arithmétique $\widehat{\deg}(\cdot)$. L'égalité (c) est justifiée par le fait que

$$[K:K_0]\widehat{\deg}(\overline{L}_0) = \widehat{\deg}(\overline{L}_{\mathcal{O}_K,0}).$$

En effet, les composantes neutres de $\mathcal{N}(C)_K$ et de $\mathcal{N}(C_K)$ coïncident à cause de la condition de semi-stabilité (1) du Théorème 3.1 ; par ailleurs, la clôture de Zariski commute aux changements de base plat (cf. [8, IV, 2.4.11]). L'égalité (d) est justifiée par les Théorèmes 2.2, 2.1 et 2.3 ainsi que la condition (6) du Théorème 3.1.

Nous allons maintenant estimer la quantité $[K:\mathbb{Q}]$ au moyen des résultats de Buium. On remarque tout d'abord que la condition (6) du Théorème 3.1 est invariante par restriction ou extension du corps K. Ceci est à nouveau une conséquence de la condition de semi-stabilité, qui assure que les composantes neutres de $\mathcal{N}(C)_K$ et de $\mathcal{N}(C_K)$ coïncident. On peut donc sans restriction de la généralité supposer que K est le corps engendré au-dessus de K_0 par les corps de définition des points de N-torsion de $\mathrm{Jac}(C)(\overline{K}_0)$, où $N := \mathrm{ordre}(T)$. Ce corps est par construction galoisien sur K_0 ; par ailleurs, comme $(N,p) = 1$, il est non-ramifié au-dessus de $\mathfrak{p}_0$. On peut aussi supposer sans restriction de la généralité que $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(T, C_K) > 1$, vu la forme de la partie droite de l'inégalité (2) du Théorème 3.1.

Soit

$$E := C(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^2) \cap p \cdot \mathcal{N}(C)(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^2).$$

Soit $\mathbb{F} := \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Le corps $\mathbb{F}$ est par construction une extension de $\mathcal{O}_{K_0}/\mathfrak{p}_0$ et l'on identifie ce dernier corps à $\mathbb{F}_q$. Soit $G_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathrm{Gal}(K|K_0)$ le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$. Les conditions (5) et (3) du Théorème 3.1 assurent que K est non-ramifié au-dessus de $\mathfrak{p}_0$ et on dispose donc d'une identification canonique $G_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$. L'ensemble E est naturellement $G_{\mathfrak{p}}$ invariant et l'application naturelle $\phi : E \to \mathcal{N}(C)(\mathbb{F})$ est $G_{\mathfrak{p}}$-équivariante. On remarque maintenant que le Théorème 2.6 implique l'inégalité $\#E \leqslant \mathrm{Bu}_p$ (on a utilisé ici les conditions (3) et (4) du Théorème 3.1). On en déduit que pour tout $e \in E$, on a

$$\deg_{\mathbb{F}_q}(\phi(e)) \leqslant \mathrm{Bu}_p.$$

On remarque qu'il y des flèches naturelles injectives

$$\mathrm{Tor}^p(\mathcal{N}(C)(K)) = \mathrm{Tor}^p(\mathcal{N}(C)(\mathcal{O}_K)) \hookrightarrow \mathrm{Tor}^p(\mathcal{N}(C)(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^2)) \hookrightarrow \mathrm{Tor}^p(\mathcal{N}(C)(\mathbb{F})).$$

Puisque $\mathrm{Tor}^p(\mathcal{N}(C)(K)) \subseteq p \cdot \mathcal{N}(C)(K)$ et $T \pmod{\mathfrak{p}^2} \in C(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^2)$, on voit que

$$\deg_{\mathbb{F}_q}(T \pmod{\mathfrak{p}}) =: d \leqslant \mathrm{Bu}_p.$$

Les estimées de Hasse-Weil (cf. par ex. [10, Par. 19, Th. 19.1]) impliquent que

$$\#\mathcal{N}(C)(\mathbb{F}_{q^d}) \leqslant q^{d\cdot g} + (2^{2g} - 2g - 1)q^{d(g-1)} + 2gq^{d(g-1/2)}.$$

Rappelons que $N = \mathrm{ordre}(T)$. Puisque $N|\#\mathcal{N}(C)(\mathbb{F}_{q^d})$, on déduit que

$$N \leqslant q^{\mathrm{Bu}_p\cdot g} + (2^{2g} - 2g - 1)q^{\mathrm{Bu}_p(g-1)} + 2gq^{\mathrm{Bu}_p(g-1/2)}.$$

Remarquons maintenant que par construction

$$[K : K_0] \leqslant \#\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \leqslant N^{4g^2}.$$

On obtient pour finir

$$[K : K_0] \leqslant [q^{\mathrm{Bu}_p\cdot g} + (2^{2g} - 2g - 1)q^{\mathrm{Bu}_p(g-1)} + 2gq^{\mathrm{Bu}_p(g-1/2)}]^{4g^2} =: L_q. \quad \square$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.1.

Nous allons maintenant passer à la démonstration de la Proposition 1.2.

On suppose que C_{K_0} a bonne réduction partout.

On rappelle qu'il existe un point $\kappa \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K}_0)$ telle que $W_{g-1,\overline{K}_0} + \kappa$ est un diviseur Θ. En particulier, $W_{g-1,\overline{K}_0} + \kappa$ est alors symétrique. Comme l'égalité de la Proposition 1.2 est invariante par extension du corps K_0, on peut supposer sans restriction de généralité que κ est défini sur K_0. On peut montrer que $-2\kappa = j(\omega_C)$ (cf. [1, I, 5.]). Soit $k : \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{K_0} \to \mathcal{N}(C)$ la section correspondant à κ. On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned}
[K_0:\mathbb{Q}]^{-1}\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}))_0) &= [K_0:\mathbb{Q}]^{-1}\widehat{\deg}(k^*\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}+\kappa))) \\
&= [K_0:\mathbb{Q}]^{-1}\widehat{\deg}(k^*\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}+\kappa)) \otimes \overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}+\kappa))_0^{\vee}) \\
&\quad +[K_0:\mathbb{Q}]^{-1}\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{O}}(\mathrm{Zar}(W_{g-1}+\kappa))_0) \\
&\overset{(a)}{=} \mathrm{NT}(\kappa) + \frac{1}{2}\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}_0}) + \frac{g}{4}\log(4\pi) \\
&\overset{(b)}{=} \frac{1}{4}\mathrm{NT}(j(\omega_C)) + \frac{1}{2}\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}_0}) + \frac{g}{4}\log(4\pi).
\end{aligned}$$

L'égalité (a) est justifiée par le Théorème 2.3 et par le Théorème 2.4. L'égalité (b) est justifiée par le fait que la hauteur de Néron-Tate est quadratique.

Ceci conclut la démonstration de la Proposition 1.2.

4 La courbe $y^2 + y = x^5$

Nous nous servons dans cette section des calculs fait dans [3] pour obtenir une borne explicite pour la distance p-adique dans le cas de la courbe C donné en coordonnée affine sur $\mathbb{Q}$ par l'équation $y^2 + y = x^5$. Soit

$$K_0 := \mathbb{Q}(\sqrt{1-\exp(2i\pi/5)}, \sqrt[5]{2}).$$

On vérifie que $[K_0 : \mathbb{Q}] = 40$ et que seuls 2 et 5 se ramifient dans K_0. Il est montré dans [3, Par. 4.1] que C est de genre 2 et qu'elle acquiert bonne réduction partout sur K_0. Soit $\zeta_5 := \exp(2i\pi/5)$. On montre dans [3, Par. 4.4] qu'il existe une base symplectique de $H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ telle que

$$\tau = \begin{pmatrix} -\zeta_5^4 & \zeta_5^2+1 \\ \zeta_5^2+1 & \zeta_5^2-\zeta_5^3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\Theta_{\mathrm{Max}} = \sup_{x+iy\in\mathbb{C}^2} \det(\Im(\tau))^{\frac{1}{4}} \exp(-\pi {}^t y(\Im(\tau))^{-1}y) |\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \exp(2i\pi(\frac{1}{2}{}^t m\tau m + {}^t mz))|.$$

La constante Θ_{Max} peut être approximée par ordinateur. J.-F. Mestre a eu la gentillesse de me communiquer l'approximation suivante, réalisée avec le programme MAPLE :

$$\Theta_{\mathrm{Max}} \approx 1.066392773691362066710540 75$$

Par ailleurs, on a

$$\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(C_{\overline{\mathbb{Q}}}) = 2\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\Gamma(1/5)^5\Gamma(2/5)^3\Gamma(3/5)\Gamma(4/5)^{-1}\right) \approx -1.4525092396456446503177070 42$$

Pour cela, voir [3, Par. 4.4, Prop. 12]. Ainsi

$$\log\Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}}) + \frac{1}{2}\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(C_{\overline{\mathbb{Q}}})) + \frac{1}{2}\log(4\pi) \approx 0.603539217162787640475284 74$$

J.-F. Mestre me communique également que le nombre ci-dessus ressemble à s'y méprendre au nombre $\frac{3}{8}\log(5)$. Après le changement de variable $z = 2y + 1$ et $t = \sqrt[5]{4}\cdot x$, la courbe C_{K_0} admet l'équation affine

$$z^2 = t^5 + 1.$$

Soit p non-ramifié dans K_0 (i.e. $p \notin \{2, 5\}$). Soit P_0 le point donné par les coordonnées $z = 1$, $t = 0$. Le point P_0 est invariant par l'involution hyperelliptique $z \to -z$, $t \to t$.

Soit C_p la courbe obtenue sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ à partir de C. Soit $C_p \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C_p)$ le plongement jacobien obtenu à partir de j_{P_0}.

Le Théorème 3.1 et la Proposition 1.2 impliquent maintenant que

$$d_p(T, C_p) \;\; \geqslant \;\; p^{\left(1 + 80\cdot \mathrm{L}_q \cdot \left|\log\Theta_{\mathrm{Max}}(C_{\overline{K}}) + \frac{1}{2}\mathrm{h}_{\mathrm{Fal}}(C_{\overline{\mathbb{Q}}})) + \frac{1}{2}\log(4\pi)\right|\right)}$$

pour tout point de torsion $T \in \mathrm{Jac}(C_p)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ telle que $(\mathrm{ordre}(T), p) = 1$ et tel que $T \notin C_p(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

On rappelle que $q := \#\mathcal{O}_{K_0}/\mathfrak{p}_0$. On a ainsi l'estimée $q \leqslant p^{40}$. On remarque qu'il est préférable de choisir des nombres premiers p tels que q est petit, car la fonction L_q est doublement exponentielle en p.

Références

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 4, 903–1027.

[3] J.-B. Bost, J.-F. Mestre, and L. Moret-Bailly, *Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre* 2, Astérisque **183** (1990), 69–105. Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988).

[4] Lawrence Breen, *Fonctions thêta et théorème du cube*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 980, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[5] Alexandru Buium, *Geometry of p-jets*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 2, 349–367.

[6] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366 (German).

[7] Henri Gillet and Christophe Soulé, *Arithmetic intersection theory*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **72** (1990), 93–174 (1991).

[8] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960-1967).

[9] Ehud Hrushovski, *The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields*, Ann. Pure Appl. Logic **112** (2001), no. 1, 43–115.

[10] J. S. Milne, *Abelian varieties*, Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), Springer, New York, 1986, pp. 103–150.

[11] Laurent Moret-Bailly, *Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann*, Compositio Math. **75** (1990), no. 2, 203–217.

[12] ———, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque **129** (1985), 266 (French, with English summary).

[13] M. Raynaud, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*, Arithmetic and geometry, Vol. I, Progr. Math., vol. 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 327–352.

[14] Thomas Scanlon, *The conjecture of Tate and Voloch on p-adic proximity to torsion*, Internat. Math. Res. Notices **17** (1999), 909–914.

[15] John Tate and José Felipe Voloch, *Linear forms in p-adic roots of unity*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1996), 589–601.