Über die Manin-Mumford Vermutung

T ein komplexer algebraischer Torus;

i.e.: $T = \mathbb{C}^g/L$, wobei L ein Gitter vom Rang $2 \cdot g$ ist und es gibt eine hermitesche Metrik H auf $\mathbb{C}^g$, sodass $H(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$.

$S \subseteq T$ eine Menge von Punkten endlicher Ordnung;

$\overline{S}$ ist der Durchschnitt von allen abgeschlossenen analytischen Untervarietäten von T, die S enthalten;

Vermutung von Manin-Mumford [Thm. Raynaud]. $\overline{S}$ ist eine endliche Vereinigung von Translaten von komplexen Untertori von T.

Geschichte der Beweise der Vermutung von Manin-Mumford

Bogomolov [1980] gibt einen partiellen Beweis, der auf den feineren Eigenschaften der Operation von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ auf den Punkten endlicher Ordnung beruht.

Raynaud [1985] gibt einen Beweis, der Methoden aus der algebraischen Geometrie à la Grothendieck benutzt.

Serre-Hindry [1988] vervollständigen den Beweis von Bogomolov.

Szpiro-Ullmo-Zhang [1995] geben einen Beweis, der Methoden der diophantischen Approximation benutzt.

Geschichte. . . (Fortführung)

Hrushovski [1996] gibt einen Beweis, der Methoden aus der Modelltheorie (mathematische Logik) benutzt.

Pink-R. [2001] geben einen kurzen Beweis, der sich an dem Beweis von Hrushovski orientiert.

Die zwei letzten Beweise benutzen auch Eigenschaften der Operation von Aut($\mathbb{C}$) auf Punkte endlicher Ordnung.

?? [??] analytischer Beweis.

Beweis der Vermutung von Manin-Mumford nach Pink.-R., I

Vereinfachung des Problems.

T ist analytisch isomorph zu einer projektiven Varietät (Lefschetz).

Durch die Inklusion $\overline{S} \subseteq T$, wird $\overline{S}$ auch zu einer projektiven Varietät (Serre).

Genauer kann man dann T durch Gleichungen

$$\{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid P_1(x_0, \dots, x_n) = 0, \dots, P_r(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

beschreiben, wobei $P_1, \dots, P_r$ komplexe homogene Polynome sind, mit Variablen $x_0, \dots x_n$.

Ähnliches gilt für $\overline{S}$.

Beweis. . . II

Die Operation von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ auf den Punkten endlicher Ordnung.

$G_0 := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \mid \sigma$ fixiert die Koeffizienten der Polynome, die T und $\overline{S}$ definieren$\}$

Satz. [Weil-Serre] $\exists a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}$ und $\exists \sigma \in G_0$, sodass

$$a_0 \cdot [x_0, \ldots, x_n] + a_1 \cdot [\sigma(x_0), \ldots, \sigma(x_n)] + \ldots$$
$$\cdots + [\sigma^d(x_0), \ldots, \sigma^d(x_n)] = 0$$

für alle $\underline{x} := [x_0, \ldots, x_n]$, sodass $\underline{x} \in T$ und sodass $\underline{x}$ endliche Ordnung in T hat.

Weiter darf man annehmen, dass

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{d-1} z^{d-1} + z^d = 0 \implies |z| > 1.$$

Beweis... III

Linearisierung. Schreiben wir

$$a_0 \cdot \underline{x} + \cdots + a_{d-1} \cdot \sigma^{d-1}(\underline{x}) + \sigma^d(\underline{x}) = 0$$

für die Gleichung des Satzes von Weil-Serre.
Diese Gleichung ist äquivalent zum System

$$\underline{x}_1 = \sigma(\underline{x}_0)$$

$$\underline{x}_2 = \sigma(\underline{x}_1)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\underline{x}_{d-1} = \sigma(\underline{x}_{d-2})$$

$$-a_0 \cdot \underline{x}_0 - a_1 \cdot \underline{x}_1 - \cdots - a_{d-1} \cdot \underline{x}_{d-1} = \sigma(\underline{x}_{d-1}).$$

Anders geschrieben:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{d-2} \\ \underline{x}_{d-1} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{d-2} \\ \underline{x}_{d-1} \end{bmatrix}$$

Wir werden $(*)$ für dieses System schreiben und M für die entsprechende Matrix.

Beweis. . . IV

Geometrie der Lösungen von (*). Man betrachte die Menge

$$\Delta := \{(\underline{x}, \sigma(\underline{x}), \ldots, \sigma^{d-1}(\underline{x})) \in T^d \mid \underline{x} \in \overline{S} \text{ et } \underline{x} \text{ hat endliche Ordnung in } T\}$$

Die Matrix M operiert auf T^d. Aus Konstruktion gilt $M(\Delta) = \Delta$ und man sieht, dass

$$M(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}$$

Man bemerke, dass die Menge $\overline{S}$ die Projektion von $\overline{\Delta}$ auf den ersten Faktor von T^d ist.

Beweis. . . (Ende)

Geometrie der Lösungen von de (*) (Fortführung). Es sei

$A := \mathbb{C}^{g_a}/L_a$ ein komplexer algebraischer Torus;

$\varphi : \mathbb{C}^{g_a} \to \mathbb{C}^{g_a}$ eine lineare Abbildung, sodass $\varphi(L_a) \subseteq L_a$; man nimmt an, dass wenn $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ ist, dann $|z| > 1$.

Man bemerke, dass φ einen analytischen Homomorphismus $\varphi : A \to A$ induziert.

Satz. [Pink-R.] Es sei Z eine analytische Untervarietät, sodass $\varphi(Z) = Z$. Dann ist Z eine endliche Vereinigung von Translaten von komplexen Untertori von A.

Man wende diesen Satz auf den Spezialfall

$$\boxed{A = T^d,\ \varphi = M \text{ et } Z = \overline{\Delta}}$$

an. Damit ist der Beweis beendet.

Ergänzungen I: die Vermutung von Mordell-Lang

Es sei T ein komplexer algebraischer Torus wie oben;

$G \subseteq T$ eine Untergruppe, sodass $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ endlich viele Erzeugende Elemente hat.

$S \subseteq G$;

Vermutung von Mordell-Lang [Thm. Faltings et al.] $\overline{S}$ ist eine endliche Vereinigung von Translaten von komplexen Untertori von T

Der Beweis der Vermutung von Mordell-Lang beruht auf diophantischer Approximation.

Ergänzungen II: der Satz von Hrushovski

Es sei T eine komplexer Torus;

Annahme : wenn $T_1 \subseteq T_2$ Untertori von T sind, dann ist T_2/T_1 nicht algebraisch.

Satz. [Hrushovski] Es sei Z eine abgeschlossene analytische Untervarietät von T; dann ist Z eine endliche Vereinigung von Translaten von Untertori von T.