1 Formule explicite pour la hauteur de Néron-Tate sur une courbe elliptique via le théorème de Riemann-Roch arithmétique

On se donne un schéma régulier, intègre et affine $\mathcal{B}$, quasi-projectif sur un anneau arithmétique D de corps de fractions K. On se donne aussi un schéma intègre et régulier $\mathcal{E}$ et un morphisme projectif, plat et génériquement lisse de $f : \mathcal{E} \to B$. On note $B := \mathcal{B}_K$ (resp. $E := \mathcal{E}_K$) la fibre générique de B (resp. $\mathcal{E}$) sur D.

On suppose que E est un schéma elliptique sur B. On se donne par ailleurs un fibré en droite $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}$ de degré 0 sur les fibres de f_K et on suppose que $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ est muni d'une trivialisation canonique le long de la section unité. On munit $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ de l'unique métrique de courbure invariante par translation sur les fibres de $f_{\mathbb{C}}$ et telle que la trivialisation soit une isométrie. On munit $E_{\mathbb{C}}$ de l'unique structure de fibration Kählerienne telle que le morphisme d'adjonction $f_{\mathbb{C}}^* f_{\mathbb{C}*} Tf_{\mathbb{C}} \simeq Tf_{\mathbb{C}}$ est une isométrie et que le volume des fibres est 1. On applique maintenant le théorème de Riemann-Roch arithmétique à $\overline{\mathcal{L}}$. On obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \widehat{c}_1(R^0 f_* \overline{\mathcal{L}}) - \widehat{c}_1(R^1 f_* \overline{\mathcal{L}}) &= f_*(\widehat{\mathrm{Td}}(\overline{Tf})\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{L}}))^{[1]} + \\ &\quad \tau(\overline{\mathcal{L}}) - \int_{E_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}} \mathrm{Td}(Tf_{\mathbb{C}})\mathrm{ch}(L_{\mathbb{C}})R(Tf_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{B})$. Comme $\mathcal{L}$ n'a pas de section globale non-nulle (une telle section couperait la fibre générique et L n'a pas de section globale non-nulle), on a $\widehat{c}_1(R^0 f_* \overline{\mathcal{L}}) = 0$. Par ailleurs, le fibré $R^1 f_* \mathcal{L}$ est invariant par tout changement de base. En utilisant la dualité de Serre sur chaque fibre et la formule de projection, on déduit :

Proposition 1.1. *Supposons que E se prolonge en un schéma elliptique $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{B}$ tout entier et que $\mathcal{L}$ est de degré 0 et non-trivial sur toutes les fibres de f. Alors on a*

$$f_*(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^2) = -\tau(\overline{\mathcal{L}})$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{B})_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 1.2. *Supposons que $\mathcal{B} = \mathrm{Spec\ D}$ et que D est l'anneau d'entiers d'un corps de nombres muni de tous ses plongements dans $\mathbb{C}$. Alors on a*

$$f_*(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^2) = -\frac{1}{12} f_*(\widehat{c}_2(\overline{Tf})) - \tau(\overline{\mathcal{L}}) - \widehat{c}_1(R^1 f_* \overline{\mathcal{L}})$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(D)_{\mathbb{Q}}$.

On remarque que par dualité de Serre sur la fibre générique de f, le fibré $R^1 f_* \mathcal{L}$ est nul sur un ouvert de $\mathcal{B}$; l'élément $\widehat{c}_1(R^1 f_* \overline{\mathcal{L}})$ ne dépend donc pas de la métrique de $\overline{\mathcal{L}}$. Par ailleurs, la conjecture de Bloch implique que

$$\frac{1}{12} f_*(\widehat{c}_2(\overline{Tf})) = \frac{1}{12} f_*(\widehat{c}_2(\overline{\Omega})) = -\frac{1}{12} A(\mathcal{E}/D)$$

où $A(\mathcal{E}/D)$ est le conducteur de $\mathcal{E}$ sur D, considéré comme comme cycle à support dans les idéaux premiers de D au-dessus desquels $\mathcal{E}$ a une fibre singulière.

Corollaire 1.3. *Supposons que $\mathcal{L}^{\otimes k} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et que $\mathcal{E}$ a partout bonne réduction sur D. Supposons aussi que k est minimal et a deux facteurs premiers distincts. Alors le nombre réel $\exp(\tau(\mathcal{L}_{\sigma,\mathbb{C}}))$ est une unité algébrique pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$.*

Dans l'article de Ray-Singer, p. 165, on montre que si $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ est une courbe elliptique (munie de n'importe quelle métrique de Kähler invariante par translation), alors la torsion analytique du fibré plat de rang 1 donné par le caractère $\chi(m\tau + n) = \exp(2\pi i(m \cdot u + n \cdot v))$ ($u, v \in [0, 1[$) est

$$\log |e^{i\pi(v^2\tau - \tau v + \tau/6)} \prod_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{2i\pi(|k|\tau + \epsilon_k \tau v - \epsilon_k u)})|.$$

Si on écrit $z = v\tau - u$, $w := e^{2i\pi z}$, $q := e^{2i\pi\tau}$, cette dernière expression se réécrit comme

$$\frac{1}{2}B_2(\frac{\Im(z)}{\Im(\tau)})\log|q| + \log|1-w| + \sum_{k\geq 1}\log|(1-q^k w)(1-q^k w^{-1})|$$

où $B_2(T) := T^2 - T + 1/6$ est le deuxième polynôme de Bernoulli. Cette dernière expression coïncide avec l'opposé de la hauteur locale archimédienne $\lambda(z)$ du Th. 3.4, p. 468 du Silverman II. On conclut

Corollaire 1.4. *Soit $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ une courbe elliptique telle que $j(\tau)$ est un entier algébrique. Soit $z = v\tau - u$, où $v = a/b$ et $u = c/d$ sont des nombres rationnels dans $[0,1[$ et $(a,b) = (c,d) = 1$. Alors si le nombre bd a au moins deux facteurs premiers distincts, le nombre complexe $e^{\lambda(z)}$ est une unité algébrique.*

En particulier, on peut trouver des unités algébriques au moyen de courbes elliptique CM. On peut contrôler le corps de définition de ces unités en utilisant le théorème de RR de Deligne ainsi que les théorèmes de Raynaud explicitant les corps de définition où une courbe potentiellement de bonne réduction acquiert bonne réduction. On remarquera aussi que dans le cas CM, on peut écrire une formule de réciprocité évidente pour $e^{\lambda(z)}$. La fonction $e^{\lambda(z)}$ est la fonction de Siegel du livre Elliptic Functions de Lang, p. 262.

2 Formule explicite pour la hauteur de Néron-Tate sur une courbe elliptique via la théorie de l'intersection arithmétique

Les hypothèses sont celles de la première section et on suppose les hypothèses de la Proposition 1.2 satisfaites. On suppose pour commencer que $\mathcal{E}$ est le modèle régulier minimal de E sur D et que $\mathcal{E}$ est semi-stable sur D. Quitte à étendre D, on peut étendre $\mathcal{O}$(origine) en un un fibré en droites $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}$, satisfaisant le théorème du cube sur le modèle de Néron de E (qui est un ouvert dans $\mathcal{E}$). Si $\mathcal{E}$ a bonne réduction partout, il n'est pas nécessaire de faire cette extension de D. On munit $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ de l'unique norme hermitienne $||\cdot||$ dont la forme de courbure est invariante par translation et telle que l'intégrale du carré de la norme de sa section canonique pour la mesure de Haar vaut $1/\sqrt{2}$ (cf. Moret-Bailly, article dans Compositio, par. 3.2, p. 215). On écrira $\overline{\mathcal{M}}_0$ pour la restriction de $\overline{\mathcal{M}}$ à la section unité ; il s'agit d'un fibré en droites hermitien sur D. Soit s une section ($\neq$ section unité) de $\mathcal{E}$ sur D. Soit P le point auquel elle correspond sur K. Un théorème de Moret-Bailly dit alors que la hauteur de Néron-Tate (relative, non-normalisée par $[K:\mathbb{Q}]$) de P est

$$\widehat{c}_1(s^*(\overline{\mathcal{M}} \otimes (s^* f^* \overline{\mathcal{M}}_0)^\vee)) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(D).$$

(quelle que soit la structure du cube). La formule clé de Moret-Bailly (cf. loc. cit., intro.) ainsi que quelques tricheries permet de calculer la norme de l'isomorphisme d'adjonction à l'origine (sur $\mathbb{C}$) et implique que

$$4\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_0) + \frac{1}{2}\log(|\Delta(\tau)|^2\Im(\tau)^{12}) - 4\log(2\pi) = -4\cdot\widehat{c}_1(\overline{\omega}_0)$$

[l'une des tricheries est d'utiliser le fait que $m_0 = 0$: voir plus bas] où on a muni le fibré canonique de sa *mauvaise* métrique de Faltings, i.e. celle où on omet π. Par ailleurs, on sait par (une légère généralisation de) Silverman (cf. Cornell-Silverman) que

$$12\cdot\widehat{c}_1(\overline{\omega}_0) = [\Delta_{\mathcal{E}/D}, -\log(|\Delta(\tau)|^2\Im(\tau)^{12})].$$

où τ est un choix d'invariant τ pour $E_{\mathbb{C}}$ (un pour chaque plongement de D dans $\mathbb{C}$). On notera $\theta(z,\tau)$ la fonction θ de Jacobi $\theta_1 = \theta_{11}$. Cette fonction décrit la section canonique de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ sur le recouvrement universel de $E_{\mathbb{C}}$. On sait (Moret-Bailly, Compositio) que

$$||\theta(z,\tau)|| = \Im(\tau)^{\frac{1}{4}} e^{-\pi y^2/\Im(\tau)}|\theta(z,\tau)|$$

Conséquemment, on obtient pour **la hauteur de Néron-Tate** NT(P) **de** P :

$$\begin{aligned} 24\cdot \mathrm{NT}(P) &= -24\log\left(\Im(\tau)^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi y^2/\Im(\tau)}|\theta(z(P),\tau)|^2\right)+24\cdot\widehat{c}_1(\overline{\omega}_0)-3\log(2\pi)^8 \\ &\quad +3\log(|\Delta(\tau)|^2\Im(\tau)^{12})+24\cdot\text{contr. finies} \\ &= -24\log\left(\Im(\tau)^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi y^2/\Im(\tau)}|\theta(z(P),\tau)|^2\right)+\log(|\Delta(\tau)|^2\Im(\tau)^{12}) \\ &\quad -3\log(2\pi)^8+2[\Delta_{\mathcal{E}/D},0]+24\cdot(\text{contr. finies}) \end{aligned}$$

Fixons une place $\mathfrak{p}$ de D. Ecrivons

$$C+m_0C_0+\cdots+m_rC_r$$

pour un diviseur représentant $\mathcal{M}$. Ici C est l'image de la section unité et C_0 est la composante irréductible de la fibre $\mathcal{E}_\mathfrak{p}$ coupant C. Les autre fibres sont ordonnées selon l'intersection successive (on fixe une "orientation" - les formules n'en dépendront pas). Ecrivons S pour l'image de s. La contribution finie en $\mathfrak{p}$ est

$$(C+m_0C_0+\cdots+m_rC_r)\cdot S = C\cdot S+\sum_{k=0}^{r} m_0(C_k\cdot S)$$

où $C_k\cdot S$ est nul pour un seul k seulement et vaut 1 dans ce cas-là (c'est dû essentiellement au fait que S et $\mathcal{E}$ sont plats sur D). On calcule dans Moret-Bailly, Pinceau des variétés abéliennes, que

$$m_k=\frac{k(k-r)}{2r}.$$

Pour calculer $C\cdot S$, on procède ainsi. Il y a deux cas possibles : soit S coupe C, soit C ne coupe pas C. Dans le deuxième cas, la contribution finie est simplement $m_k=m_k(S\cdot C_k)$, où C_k est la fibre que coupe S. Dans le premier cas, il s'agit de calculer $C\cdot S$, i.e. par définition la longueur du $D_\mathfrak{p}$-module associé à e^*S, où $e=e_\mathfrak{p}$ est la section unité Spec $\mathrm{D}_\mathfrak{p}\to\mathcal{E}$ localisée en $\mathfrak{p}$. On va expliciter cette définition au moyen d'une équation de Weierstrass. On va supposer pour simplifier que $\mathfrak{p}$ est premier à 2 et 3. On dispose alors d'une équation de Weierstrass affine de la forme

$$y^2=x^3+Ax+B$$

où $A,B\in D$. Si on réécrit l'équation pour les coordonnées homogènes x,z, on obtient l'équation

$$z=x^3+Axz^2+Bz^3.$$

Le schéma affine $W:=$ Spec $\mathrm{D}_\mathfrak{p}[\mathrm{x,z}]/(\mathrm{z}-\mathrm{x}^3+\mathrm{Axz}^2+\mathrm{Bz}^3)$ de cette dernière équation contient C. Le morphisme e est maintenant décrit par le morphisme d'anneau

$$D_\mathfrak{p}[x,z]\to D_\mathfrak{p} \tag{1}$$

qui envoie x et z sur 0. Par ailleurs, le sous-schéma $S\cap W$ de W est décrit par l'idéal I noyau du morphisme $D_\mathfrak{p}[x,z]/(z-x^3+Axz^2+Bz^3)\to D_\mathfrak{p}$ envoyant x sur la première coordonnée de P dans le système de coordonnées x,z et z sur la deuxième coordonnée de P. Soit $P=(x_0,y_0)$ dans le système de coordonnées (x,y) standard. On a alors $P=(x_0/y_0,1/y_0)$ dans le système de coordonnées x,z. Abrégeons $a:=x_0/y_0$ et $b:=1/y_0$. Il faut donc calculer la longueur comme $D_\mathfrak{p}$-module de l'image de I par le morphisme (1). Soit $Q(x,z)=\sum_{i,j}q_{i,j}x^iz^j$ un élément de I. Soit $m:=\min(v(a),v(b))$ le minimum des valuations de a et b dans $D_\mathfrak{p}$. Comme $Q(x,z)$ est dans I, on sait que $\mathfrak{p}^m$ divise $Q(a,b)=0$. Comme par ailleurs $\mathfrak{p}^m$ divise $q_{i,j}a^ib^j$ si $(i,j)\neq 0$, on voit que $\mathfrak{p}^m$ divise $q_{0,0}$. Enfin, remarquons que les polynômes $x-a$ et $z-b$ sont dans I. En mettant ensemble ces remarques, on voit que l'image de I par le morphisme (1) est l'idéal $\mathfrak{p}^m$. Il faut donc calculer m en termes de l'équation de Weierstrass. Remarquons qu'on peut écrire

$$\frac{1}{y}=(\frac{x}{y})^3+A\frac{x}{y^3}+\frac{B}{y^3}$$

Comme $v(A), v(B), v(a), v(b) \geqslant 0$, on en déduit que $3v(a) = v(b)$, ou en d'autres termes que $3v(x_0) - 3v(y_0) = -v(y_0)$, i.e. $v(x_0) = (-1/3+1)v(y_0)$. Donc

$$v(a) = m = v(x_0) - v(y_0) = (1-3/2)v(x_0) = -\frac{1}{2}v(x_0).$$

La **contribution finie en $\mathfrak{p}$** est donc

$$[\mathfrak{p}^{-\frac{1}{2}v(x_0)}, 0]$$

si S coupe C. Sinon elle vaut

$$[\mathfrak{p}^{\frac{k(k-r_\mathfrak{p})}{2r_\mathfrak{p}}}, 0]$$

où k est l'indice de la composante de $\mathcal{E}_\mathfrak{p}$ rencontrée par S.

Il s'agit maintenant de comparer cette expression avec celle de Tate-Silverman (cf. la fin de Silverman II). On suppose pour simplifier que $D = \mathbb{Z}$. On rappelle que cette expression est la suivante :

$$\mathrm{NT}(P) = -\log|e^{-z(P)\eta(z(P))}\sigma(z(P))^2\Delta(\tau)^{\frac{1}{6}}| + \text{contr. finies}$$

(la formule du paragraphe 1 de ces notes est une alternative, aussi donnée dans Silverman II) et la contribution finie est

$$[\mathfrak{p}^{-\frac{1}{2}v(x_0)+\frac{1}{12}v(\Delta(\mathcal{E})_\mathfrak{p}}, 0]$$

si S coupe C. Sinon elle vaut

$$[\mathfrak{p}^{(k/r_\mathfrak{p})^2-(k/r_\mathfrak{p})+1/6)\frac{r_\mathfrak{p}}{2}}, 0]$$

où k est comme avant l'indice de la composante de $\mathcal{E}_\mathfrak{p}$ rencontrée par S. On examine tout d'abord la contribution infinie. Il faut évaluer l'expression

$$-24\log\left(\Im(\tau)^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi y^2/\Im(\tau)}|\theta(z(P),\tau)|^2\right) + \log(|\Delta(\tau)|^2\Im(\tau)^{12}) - 3\log(2\pi)^8$$

en terme de la fonction σ. On utilise Whittaker et Watson, 21.43, p. 473. On calcule

$$|\theta(z,\tau)|^2 = |\sigma(z)2\pi e^{-\eta(1)z^2/2}G(\tau)^{-1}|^2 \tag{2}$$

où $z = z(P)$ et

$$G := e^{-\pi i\tau/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2n\pi i\tau})^{-3} = \Delta(\tau)^{-1/8}(2\pi)^{3/2}$$

donc pour finir

$$|\theta(z,\tau)|^2 = |\sigma(z)(2\pi)^{-1/2}e^{-\eta(1)z^2/2}\Delta(\tau)^{1/8}|^2 = |\sigma^2(z)(2\pi)e^{-\eta(1)z^2}\Delta(\tau)^{\frac{1}{4}}|.$$

On rappelle que η désigne l'application quasi-période. En rassemblant les termes, on obtient pour (2)

$$-24\log\left(\Im(\tau)^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi y^2/\Im(\tau)}|\sigma^2(z)(2\pi)^{-1}e^{-\eta(1)z^2}\Delta(\tau)^{\frac{1}{4}}|\right) + \log(|\Delta(\tau)|^2\Im(\tau)^{12}) - 3\log(2\pi)^8$$

On va montrer plus bas que

$$|e^{-2\pi y^2/\Im(\tau)}e^{-\eta(1)z^2}| = |e^{-z\eta(z)}|. \tag{3}$$

En tenant compte de cela, on obtient que (2) vaut

$$-24\log\left(e^{-z\eta(z)}|\sigma^2(z)\Delta(\tau)^{\frac{1}{6}}|\right)$$

ce qui identifie les contributions infinies. En ce qui concerne les contributions finies, on voit qu'elles s'identifient après un simple examen, tenu compte compte du fait que $r_\mathfrak{p} = v(\Delta(\mathcal{E})_\mathfrak{p})$ et de la présence du facteur $2[\Delta_{\mathcal{E}/D}, 0]$ dans notre formule, dont la contribution en $\mathfrak{p}$ est $[\mathfrak{p}^{2r_\mathfrak{p}}, 0]$.

On montre maintenant l'équation (3). Ecrivons $z = x + iy$. On rappelle l'identité

$$\eta(\tau) - \tau\eta(1) = 2i\pi$$

(cf. Silverman II, p. 41). On aura besoin d'exprimer z dans la base réelle $1, \tau$ de $\mathbb{C}$. On calcule facilement que

$$x + iy = x_1 + \tau y_1 = x_1 + (y/\Im(\tau))\tau$$

et donc $y_1 = y/\Im(\tau)$ (nous n'aurons pas besoin de la valeur de x_1). On calcule maintenant

$$\begin{aligned} & |e^{-z\eta(z)}e^{\eta(1)z^2}| = \exp(-(x_1 + \tau y_1)(\eta(1)x_1 + \eta(\tau)y_1) + \eta(1)(x_1 + \tau y_1)^2) \\ = \; & \exp(-(x_1 + \tau y_1)(\eta(1)x_1 + (2\pi i + \tau\eta(1))y_1) + \eta(1)(x_1 + \tau y_1)^2) = \exp(-2\pi\Im(\tau)y_1) = \exp(-2\pi y^2/\Im(\tau)) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'identité (3).