Géométrie algébrique/*Algebraic geometry*

Un théorème du point fixe de Lefschetz en géométrie d'Arakelov

Kai KÖHLER

Mathematisches Institut, Wegelerstr. 10, D-53115 Bonn, Allemagne, E-mail: koehler@rhein.iam.uni-bonn.de

Damian ROESSLER

Institut fuer Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Allemagne, E-mail: roessler@mathematik.hu-berlin.de

Résumé– *On considère des variétés arithmétiques munies d'une action du schéma en groupes des n-ième racines de l'unité et on définit la K_0-théorie arithmétique équivariante pour ces variétés. On énonce ensuite un théorème de Riemann-Roch pour la transformation naturelle de la K_0-théorie arithmétique équivariante induite par la restriction au schéma des points fixes et on montre qu'il implique une version de la conjecture de Bismut d'un théorème de Riemann-Roch arithmétique équivariant.*

A Lefschetz fixed point theorem in Arakelov geometry

Abstract – *We consider arithmetic varieties endowed with an action of the group scheme of n-th roots of unity and we define equivariant arithmetic K_0-theory for these varieties. We then state a Riemann-Roch theorem for the natural transformation of equivariant arithmetic K_0-theory induced by the restriction to the fixed point scheme and we show that it implies a version of Bismut's conjecture of an equivariant arithmetic Riemann-Roch theorem.*

1 Préliminaires

Soit $\mu_n := \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[T]/(1-T^n)$ le schéma en groupes des n-ièmes racines de l'unité. On fixe un générateur g de $\mu_n(\mathbf{C})$. Un schéma μ_n-équivariant admettant une immersion fermée équivariante dans un espace projectif muni d'une action de μ_n sera dit μ_n-projectif (sur $\mathbf{Z}$). Soit $f : Y \to \mathbf{Z}$ un schéma régulier, μ_n-projectif et plat sur $\mathbf{Z}$. On dénote par Y_{μ_n} le sous-schéma fermé des points fixes de Y; c'est un schéma régulier (voir [10, Prop. 3.1, p. 455]) que l'on supposera plat sur $\mathbf{Z}$ pour simplifier. On écrira $Y(\mathbf{C})$ pour la variété analytique des points complexes de Y. Cette variété porte par construction l'action holomorphe du groupe $\mu_n(\mathbf{C})$ des n-ièmes racines de l'unité. La conjugaison complexe induit un automorphisme antiholomorphe F_∞ de $Y(\mathbf{C})$. On définit $A^{p,p}(Y_{\mu_n})$ comme l'ensemble des formes différentielles complexes ω de type (p,p) sur $Y_{\mu_n}(\mathbf{C})$ satisfaisant l'équation $F_\infty^*\omega = (-1)^p\omega$. On pose alors $\widetilde{A}(Y_{\mu_n}) := \oplus_{p\geq 0}(A^{p,p}(Y_{\mu_n})/(\mathrm{Im}\partial + \mathrm{Im}\overline{\partial}))$.
On appelle **fibré hermitien équivariant** $\overline{E} := (E,h,a)$ la donnée d'un fibré vectoriel algébrique sur Y muni d'une action a de μ_n relevant l'action de μ_n sur Y (voir [11, Par. 1]) et d'une métrique hermitienne h sur le fibré holomorphe $E_{\mathbf{C}}$ associé à E sur $Y(\mathbf{C})$, invariante par F_∞ et a. Si l'action de μ_n sur Y est triviale, on appellera simplement **fibré hermitien**, un fibré hermitien équivariant muni également d'une action triviale.
Fixons un fibré hermitien équivariant $\overline{E}$. Les propriétés des schémas en groupes diagonalisables (voir [9, Par. 3.4, p. 47]) montrent que la donnée de l'action de μ_n sur la restriction $E|_{Y_{\mu_n}}$ de E à Y_{μ_n} est équivalente à la donnée d'une $\mathbf{Z}/(n)$-graduation sur $E|_{Y_{\mu_n}}$. Les termes de cette graduation sont orthogonaux entre eux. On obtient ainsi une décomposition canonique en somme directe orthogonale de fibrés hermitiens équivariants $\overline{E}_m$: $\overline{E}|_{Y_{\mu_n}} \simeq \bigoplus_{m\in\mathbf{Z}/(n)}\overline{E}_m$. Par ailleurs, écrivons $\Omega^E \in C^\infty(Y(\mathbf{C}), \mathrm{End}(E_{\mathbf{C}}) \otimes A^{1,1}(Y(\mathbf{C})))$ pour la forme de courbure associée à l'unique

connexion de $E_{\mathbf{C}}$ qui est de type $(1,0)$ et est compatible avec la structure hermitienne. On écrira alors $\mathrm{ch}_g(\overline{E})$ pour la forme différentielle complexe $\mathrm{Tr}(g.\exp(\frac{i}{2\pi}\Omega^E))$ sur $Y_{\mu_n}(\mathbf{C})$, où g dénote l'automorphisme de $E_{\mathbf{C}}|_{Y_{\mu_n}(\mathbf{C})}$ défini par l'élément $g \in \mu_n(\mathbf{C})$ fixé plus haut. Dénotons par $\overline{E}_{m\neq 0}$ le fibré hermitien équivariant $\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}/(n),m\neq 0}\overline{E}_m$. On écrira alors $\mathrm{Todd}_g(\overline{E})$ pour la forme différentielle $\mathrm{Todd}(\overline{E}_0).\Big(\sum_{i=0}^{rg(E_{m\neq 0})}(-1)^i\mathrm{ch}_g(\Lambda^i(\overline{E}^{\vee}_{m\neq 0}))\Big)^{-1}$. Ici $\mathrm{Todd}(\overline{E}_0)$ est la forme de Todd associée par les formules de Chern-Weil à l'unique connexion de $E_{0\mathbf{C}}$ qui est de type $(1,0)$ et est compatible avec la structure hermitienne; $\Lambda^i(\overline{E}^{\vee}_{m\neq 0})$ est la i-tième puissance extérieure du dual de $\overline{E}_{m\neq 0}$, munie de sa structure équivariante et hermitienne naturelle. Si $\mathcal{E} : 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels équivariants sur Y et $\overline{\mathcal{E}}$ est la donnée de $\mathcal{E}$ et de métriques hermitiennes invariantes par g et F_∞ sur $E'_{\mathbf{C}}$, $E_{\mathbf{C}}$ et $E''_{\mathbf{C}}$, on dispose d'une classe de Bott-Chern secondaire équivariante $\widetilde{ch}_g(\overline{\mathcal{E}}) \in \widetilde{A}(Y_{\mu_n})$ (cf. [1, VI]).

2 Le théorème

Définition. *Le groupe de Grothendieck arithmétique équivariant $\widehat{K}_0^{\mu_n}(Y)$ de Y est le groupe abélien libre engendré par les éléments de $\widetilde{A}(Y_{\mu_n})$ et par les classes d'isomorphismes isométriques équivariants de fibrés hermitiens équivariants, soumis aux relations*

(a) *Pour toute suite exacte $\overline{\mathcal{E}}$ comme plus haut, on a $\widetilde{ch}_g(\overline{\mathcal{E}}) = \overline{E}' - \overline{E} + \overline{E}''$.*

(b) *Si $\eta \in \widetilde{A}(Y_{\mu_n})$ est la somme dans $\widetilde{A}(Y_{\mu_n})$ de η' et η'', alors $\eta = \eta' + \eta''$ dans $\widehat{K}_0^{\mu_n}(Y)$.*

Choisissons maintenant une métrique de Kähler sur $Y(\mathbf{C})$, invariante par $\mu_n(\mathbf{C})$ et F_∞. Soit ω_Y sa forme de Kähler. On peut alors associer à tout fibré hermitien equivariant $\overline{E}$ sur Y sa torsion analytique equivariante $T_g(\omega_Y, \overline{E}) \in \mathbf{C}$ (pour la déf., voir [8, Par. 1]). Soit (E,h,a) un fibré hermitien équivariant sur Y tel que E est acyclique et soit $\eta \in \widetilde{A}(Y_{\mu_n})$. On dénote par f_*E le $\mathbf{Z}$-module de type fini qui est l'image directe de E, par f_*a la structure équivariante de f_*E héritée de E par fonctorialité et enfin on dénote par f_*h la métrique de $(f_*(E))_{\mathbf{C}}$ héritée de E par integration le long des fibres (pour la déf., voir [12, 9.2, p. 278]). On démontre qu'il existe un unique morphisme de groupes $f_* : \widehat{K}_0^{\mu_n}(Y) \to \widehat{K}_0^{\mu_n}(\mathbf{Z})$, tel que $f_*(\overline{E}+\eta) = (f_*E, f_*a, f_*h) - T_g(\omega_Y, (E,a,h)) + \int_{Y(\mathbf{C})}\mathrm{Todd}_g(\overline{TY_{\mathbf{C}}})\eta$ dans $\widehat{K}_0^{\mu_n}(\mathbf{Z})$, pour tout fibré hermitien équivariant $\overline{E}$ comme plus haut.

Par ailleurs, soit $\theta \in \mathbf{R}$. Pour $s \in \mathbf{C}$ avec $s > 0$, on définit $\zeta(\theta,s) := \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^s}$ et $\eta(\theta,s) := \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^s}$. Soit $R(\theta,t)$ la série formelle de puissances

$$\sum_{n\geq 1, n\ impair}(2\zeta'(\theta,-n) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\zeta(\theta,-n)}{j})\frac{t^n}{n!} + i.\sum_{n\geq 0, n\ pair}(2\eta'(\theta,-n) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\eta(\theta,-n)}{j})\frac{t^n}{n!}$$

(voir [2]). Nous aurons besoin de $R(\theta,(\cdot))$ qui est l'unique classe caractéristique additive définie sur les fibrés holomorphes telle que $R(\theta,L) = R(\theta,c^1(L))$ pour tout fibré en droites L.

Soit V un fibré vectoriel équivariant sur Y. Sur $Y_{\mu_n}(\mathbf{C})$, il existe une decomposition canonique en somme directe $V_{\mathbf{C}}|_{Y_{\mu_n}(\mathbf{C})} \simeq \oplus_{k=1}^{rg(V)}V_{\theta_k}$ où $\theta_1, \dots \theta_{rg(F)} \in [0,2\pi[$ et V_{θ_k} est le plus grand sous-fibré de $V_{\mathbf{C}}|_{Y_{\mu_n}(\mathbf{C})}$ sur lequel l'action relevant g agit comme multiplication par $e^{i\theta_k}$. On définit $R_g(V) := \sum_{k=1}^{rg(V)}R(\theta_k, V_{\theta_k})$. Enfin, pour formuler le théorème du point fixe, on définit l'homomorphisme ρ : $\widehat{K}_0^{\mu_n}(Y) \to \widehat{K}_0^{\mu_n}(Y_{\mu_n})$; c'est l'unique homomorphisme qui associe à un fibré hermitien équivariant

sa restriction à Y_{μ_n} et à un élément de $\widetilde{A}(Y_{\mu_n})$ ce même élément. Soit encore $\overline{E}$ un fibré hermitien équivariant sur Y. On écrit $\lambda_{-1}(\overline{E})$ pour l'élément $\sum_{i=0}^{rg(E)}(-1)^i\Lambda^i(\overline{E})$ de $\widehat{K}_0^{\mu_n}(Y)$. Soit $R(\mu_n)$ le groupe de Grothendieck des $\mathbf{Z}$-modules projectifs et de type fini sur $\mathbf{Z}$ qui sont munis d'une structure de μ_n-comodule. Il existe un isomorphisme canonique $R(\mu_n) \simeq \mathbf{Z}[T]/(1-T^n)$. On considère le corps $\mathbf{C}$ comme une $R(\mu_n)$-algèbre via l'unique morphisme d'anneaux $R(\mu_n) \to \mathbf{C}$ qui envoie T sur g. Soit maintenant le fibré hermitien $\overline{F}$ tel que $F_m = 0$ si $m \neq 1$ et tel que $\overline{F}_1$ est le fibré trivial $\mathcal{O}_{Y_{\mu_n}}$ muni de sa structure métrique triviale. On considère alors $\widehat{K}_0^{\mu_n}(Y_{\mu_n})$ comme une $R(\mu_n)$- algèbre via l'unique morphisme d'anneaux qui envoie T sur $\overline{F}$. On fixe maintenant un élément $x \in \widehat{K}_0^{\mu_n}(Y)$. On dénote par $\overline{N}_{Y/Y_{\mu_n}}$ le fibré normal de Y_{μ_n} dans Y, muni de sa structure équivariante et métrique naturelle et on dénote par f^{μ_n} le morphisme $Y_{\mu_n} \to \mathbf{Z}$.
Théorème I.

(a) *L'élément* $(\lambda_{-1}(\overline{N}^{\vee}_{Y/Y_{\mu_n}}))$ *de l'anneau* $\widehat{K}_0^{\mu_n}(Y_{\mu_n}) \otimes_{R(\mu_n)} \mathbf{C}$ *possède un inverse multiplicatif.*

(b) *Le diagrame*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{K}_0^{\mu_n}(Y) & \xrightarrow{(\lambda_{-1}(\overline{N}^{\vee}_{Y/Y_{\mu_n}}))^{-1}.(1-R_g(N_{Y/Y_{\mu_n}})).\rho(.)} & \widehat{K}_0^{\mu_n}(Y_{\mu_n}) \otimes_{R(\mu_n)} \mathbf{C} \\ \downarrow\ f_* & & \downarrow\ f_*^{\mu_n} \\ \widehat{K}_0^{\mu_n}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{Id\otimes 1} & \widehat{K}_0^{\mu_n}(\mathbf{Z}) \otimes_{R(\mu_n)} \mathbf{C} \end{array}$$

commute.

3 Une application à la géométrie diophantienne

Soit $\overline{V}$ un $\mathbf{Z}$-module hermitien. Le $\mathbf{Z}$-module V forme un réseau dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $V_{\mathbf{C}}^+$ qui est le sous-ensemble de $V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ invariant par la conjugaison F_∞. On appelle **covolume** de $\overline{V}$ et on écrit covol$(\overline{V})$ pour le volume du quotient $V_{\mathbf{C}}^+/V$, calculé avec la forme volume héritée de la métrique de $V_{\mathbf{C}}^+$.
Soit $\overline{E} := (E, a, h)$ un fibré hermitien équivariant sur Y. On suppose E acyclique. L'élément (f_*E, f_*a, f_*h) est alors représenté dans $\widehat{K}_0^{\mu_n}(\mathbf{Z})$ par le μ_n-comodule hermitien $\overline{\Gamma(E)}$ des sections globales de E. On se propose de calculer en terme de classes caractéristiques arithmétiques (pour la définition de ce terme, voir [7]) le covolume de $\overline{\Gamma(E)}_m$, pour chaque $m \in \mathbf{Z}/(n)$.
Lemme. *Il existe un unique morphisme de* $R(\mu_n)$*-modules* mlcovol : $\widehat{K}_0^{\mu_n}(\mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$, *qui associe à un* μ_n*-comodule hermitien* $\overline{V}$ *le nombre complexe* $\sum_{m\in\mathbf{Z}/(n)} -\log(\mathrm{covol}(\overline{V}_m)).g^m$ *et à* $\eta \in \widetilde{A}(\mathbf{Z})$ *le nombre complexe correspondant.*
Soit $h : X \to \mathbf{Z}$ un schéma régulier, quasi-projectif et plat sur $\mathbf{Z}$. Par le symbole $\widehat{\mathrm{CH}}(X)$, on dénote l'anneau de Chow arithmétique de X (voir [6]). A chaque fibré hermitien $\overline{V}$ sur X, on peut associer son caractère de Chern arithmétique $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{V}) \in \widehat{\mathrm{CH}}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ (voir [7]). Pour chaque métrique de Kähler sur $X(\mathbf{C})$, il existe un élément $\widehat{\mathrm{Todd}}(\overline{Th}) \in \widehat{\mathrm{CH}}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, qui correspond à la classe de Todd arithmétique du fibré tangent lorsque h est un morphisme lisse (voir [5, Prop. 1, p. 504]). Il existe aussi un morphisme de groupes $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}(X) \to \mathbf{R}$ à valeurs réelles, appelé le degré arithmétique (voir [4, 2.5]). Dans les prochaines définition et théorème, E n'est pas nécessairement acyclique.
Définition. *Le caractère de Chern arithmétique équivariant de* $\overline{E}$ *est l'élément*
$\widehat{\mathrm{ch}}_{\mu_n}(\overline{E}) := \sum_{m\in\mathbf{Z}/(n)} \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E}_m) \otimes g^m$ *de* $\widehat{\mathrm{CH}}(Y_{\mu_n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$.

Le prochain théorème est une version de la conjecture de Bismut d'un théorème de Riemann-Roch arithmétique équivariant (voir [2]).
Théorème II. *L'égalité de nombres complexes*

$$\mathrm{mlcovol}(f_*E, f_*a, f_*h) - T_g(\omega_Y, \overline{E}) = \widehat{\deg}\Big(\Big(\sum_{i=0}^{rg(N^\vee_{Y/Y_{\mu_n}})}(-1)^i\widehat{\mathrm{ch}}_{\mu_n}(\Lambda^i(\overline{N}^\vee_{Y/Y_{\mu_n}}))\Big)^{-1}.\widehat{\mathrm{Todd}}(\overline{Tf^{\mu_n}}).\widehat{\mathrm{ch}}_{\mu_n}(\overline{E})\Big) -$$
$$\int_{Y_{\mu_n}(\mathbf{C})}\mathrm{Todd}_g(TY_{\mathbf{C}})\mathrm{ch}_g(E)R_g(TY_{\mathbf{C}})$$

est vérifiée.
On suppose maintenant que E est acyclique. On remarque qu'il existe une immersion de schémas en groupes $\mu_{n/pgcd(n,m)} \to \mu_n$ pour tout $m \in \mathbf{Z}/(n)$. Le schéma Y ainsi que le fibré E sont ainsi naturellement $\mu_{n/pgcd(n,m)}$-équivariants. Pour tout m, on choisit g^m comme générateur de $\mu_{n/pgcd(n,m)}(\mathbf{C})$; on peut alors appliquer le théorème précèdent à chacun des $\mu_{n/pgcd(n,m)}$ successivement et on obtient un système de n équations lineaires, qui est maximal et dont les inconnues sont les nombres $\log(\mathrm{covol}(\overline{\Gamma(E)_l}))$ ($l \in \mathbf{Z}/(n)$). On peut donc les déterminer explicitement.

References

[1] Bismut, J.-M.: Equivariant immersions and Quillen metrics. J. Differential Geom. **41**, 53-157 (1995).

[2] Bismut, J.-M.: Equivariant short exact sequences of vector bundles and their analytic torsion forms. Comp. Math. **93**, 291-354 (1994).

[3] Bismut, J.-M., Lebeau, G.: Complex immersions and Quillen metrics. Publications Math. IHES **74** (1990).

[4] Bost, J.-B.: Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques. Séminaire Bourbaki **43**, n. 731 (1990).

[5] Gillet, H., Soulé, C.: An arithmetic Riemann-Roch theorem. Inventiones Math. **110**, 473-543 (1992).

[6] Gillet, H., Soulé, C.: Arithmetic intersection theory. Publications Math. IHES **72** (1990).

[7] Gillet, H., Soulé, C.: Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics I, II. Annals of Math. **131**, 163-203, 205-238 (1990).

[8] Köhler, K.: Equivariant analytic torsion on $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Math. Ann. **297**, 553-565 (1993).

[9] Serre, J.-P.: Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. Publications Math. IHES **34**, 37-52 (1968).

[10] Thomason, R.: Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante algèbrique. Duke Math. J. **68**, 447-462 (1992).

[11] Thomason, R.: Algebraic K-theory of group scheme actions. Ann. of Math. Stud. **113**, 539-563 (1987).

[12] Vergne, M., Berline, N., Getzler, E.: Heat kernels and Dirac operators: Springer 1992.