Histoire et préhistoire de la géométrie d'Arakelov

Toulouse, le 3 décembre 2010

L'analogie entre les corps de fonctions et les corps de nombres

L'analogie mystérieuse entre les corps de fonctions et les corps de nombres avait déjà été remarquée à la fin du 19ème siècle, en particulier dans l'article

R. Dedekind; H. Weber *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen* (Crelle **92**, 1882)

et dans le traité

L. Kronecker *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (1881)

Dictionnaire

Voici quelques correspondances.

Corps de fonctions F (ex. $\mathbb{F}_p(t)$)	Corps de nombres K (ex. $\mathbb{Q}$)
Courbe algébrique associée C (ex. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$)	Anneau d'entiers associé $\mathcal{O}_K$ (ex. $\mathbb{Z}$)
Formule des résidus $\sum_{P \in C(\bar{\mathbb{F}}_p)} \mathrm{Res}(\omega_P) = 0$	Formule du produit $\prod_{v, \text{v. abs.}} \lvert k \rvert_v = 1$
Un point $P \in C$	Une valuation de K
Le revêtement abélien étale maximal de C	Le corps de classes de Hilbert de K
La fonction $\zeta(s)$ de Hasse-Weil de F	La fonction $\zeta(s)$ de Dedekind de K
L'hypothèse de Riemann sur les corps finis	L'hypothèse de Riemann généralisée
Le degré d'un fibré en droites sur C	??
Riemann-Roch: $\chi(L) = \deg(L) + 1 - g$	??
$\vdots$	$\vdots$

La théorie des schémas

Jusqu'au début du 20ème siècle, il n'existait pas de langage cohérent pour parler à la fois d'une variété algébrique et d'un anneau.

C'est *la théorie des schémas* de A. Grothendieck qui a fourni un pareil langage à la fin des années 1950.

Dans cette théorie, l'analogie

Un point $P \in C$	Une valeur absolue de K

se précise en l'analogie restreinte

Un point $P \in C$	Un point de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{\mathrm{K}}$

Le rôle des valeurs absolues archimédiennes

Dans l'analogie forcée par le langage des schémas, les valeurs absolues archimédiennes de K ne correspondent pas à des points de C. Cependant, l'analogie

Formule des résidus $\sum_{P\in C(\bar{\mathbb{F}}_p)} \mathrm{Res}(\omega_P) = 0$	Formule du produit $\prod_{v,\text{v. abs.}} \|k\|_v = 1$

suggère que les valeurs absolues archimédiennes jouent un rôle important dans l'analogie entre corps de fonctions et corps de nombres.

La théorie d'Arakelov

La théorie d'Arakelov propose de reserrer les liens entre l'arithmétique et la géométrie algébrique en adjoignant systématiquement des "fibres archimédiennes" aux schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Un schéma de type fini S sur $\mathbb{Z}$ peut être décrit localement au moyen de systèmes d'équations $\{P_i(\underline{x})\}$ à coefficients entiers et la "fibre archimédienne" est donnée par le recollement $S(\mathbb{C})$ des solutions complexes $\{\underline{x} \in \mathbb{C}^d | P_i(\underline{x}) = 0\}$ de ces équations.

La théorie d'Arakelov II

La fibre archimédienne est l'analogue "à l'infini" du recollement $S(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ des solutions p-adiques $\{\underline{x} \in \bar{\mathbb{Q}}^d | \{P_i(\underline{x}) = 0\}$ des systèmes d'équations $\{P_i(\underline{x})\}$.

La théorie d'Arakelov cherche à traiter $S(\mathbb{C})$ sur le même pied que $S(\bar{\mathbb{Q}}_p)$.

On notera qu'on ne dispose pas d'un analogue "à l'infini" du recollement $S(\bar{\mathbb{F}}_p)$ des solutions $\{\underline{x} \in \bar{\mathbb{F}}_p^d | \{P_i(\underline{x}) = 0\}$ modulo p des systèmes d'équations $\{P_i(\underline{x})\}$.

Dictionnaire II

L'analogie avec le monde p-adique mène aux correspondances suivantes.

Un modèle $\widetilde{S}$ de S sur $\mathbb{Z}_p$	Une métrique hermitienne sur $S(\mathbb{C})$
Un fibré vectoriel sur $\widetilde{S}$	Un fibré hermitien sur S
Un cycle horizontal sur $\widetilde{S}$	Un cycle sur $S(\mathbb{C})$ muni d'un courant de Green
L'intersection de cycles hor. sur $\widetilde{S}$	Le $*$-produit des courants de Green
$\vdots$	$\vdots$

Programme de la théorie d'Arakelov

Une fois que l'on dispose d'un analogue archimédien de certaines constructions p-adiques, on peut chercher à étendre des constructions schématiques globales en ajoutant une contribution archimédienne.

Les propriétés de ces constructions étendues devraient être plus proches des constructions analogues sur les corps de fonctions.

La théorie de l'intersection

L'exemple historique, qui est dû à S-J Arakelov, est l'intersection des diviseurs sur une surface.

S une surface régulière, projective et plate sur $\mathbb{Z}$. Soit (C_1, g_1) (resp. (C_2, g_2)) un diviseur sur S muni d'un courant de Green sur $S(\mathbb{C})$. On suppose que C_1 et C_2 se coupent proprement. Alors la somme

$$\sum_{p \text{ premier}} \mathrm{mult}(C_{1,p} \cap C_{2,p}) + \int_{S(\mathbb{C})} g_1 * g_2$$

ne change pas si C_1 est remplacé par $(C_1 + \mathrm{div}(f), g_1 + \log|f|)$. De même pour C_2.

Développement de la théorie d'Arakelov

Après le travail d'Arakelov sur la théorie de l'intersection, la théorie s'est développée dans les années 1980 dans les travaux de L. Szpiro puis de G. Faltings, qui introduisit la *hauteur de Faltings*, un concept central dans sa démonstration de la conjecture de Mordell. Enfin Bismut-Gillet-Soulé parvinrent à démontrer un analogue du théorème de Riemann-Roch, le *théorème de Riemann-Roch arithmétique*. Ce dernier théorème montre que *la torsion analytique de Ray et Singer* joue un rôle de fond en théorie d'Arakelov. Il fut aussi utilisé par P. Vojta dans sa démonstration de la conjecture de Mordell. Au début des années 1990, ce sont les surtout les élèves de Szpiro qui développent la théorie, entre autres A. Abbes, E. Ullmo et S. Zhang. Ces travaux culminent avec la démonstration en 1996 par Szpiro-Ullmo-Zhang de la *conjecture de Bogomolov*.

La théorie d'Arakelov entre géométrie, analyse et arithmétique I

Par nature, la théorie d'Arakelov traite des objets analytiques, géométriques et arithmétiques sur un même plan structurel.

Cela force un point de vue où la géométrie différentielle, l'analyse et l'arithmétique sont vues comme procédant d'une seule intuition.

Le texte suivant de S. Lang illustre ce fait :

[Arakelov theory] is a huge program, which combines the algebraic side of algebraic geometry, the complex analytic side, complex differential geometry, partial differential equations and Laplace operators with needed estimates on the eigenvalues, in a completely open ended unification of mathematics as far as one can see.

Extrait du préambule du chapitre VII de son livre *Survey of Diophantine Geometry* (Springer 1997).

La théorie d'Arakelov dans l'histoire des idées

Accepter que la géométrie différentielle, l'analyse et l'arithmétique vivent sur le même plan et se nourrissent l'une l'autre est psychologiquement une étape difficile à franchir.

En effet, dans l'oeuvre de Platon (par ex. le Livre VII de *La République*), les nombres sont très proches de l'unité idéale dernière qui est sensée sous-tendre la réalité et l'arithmétique est de ce fait une science première. La géométrie (plane) en découle et lui est ainsi subordonnée.

Cette vision se retrouve dans le néo-platonisme de l'antiquité tardive (Plotin, Proclus...) et dans le néo-platonisme renaissant (Nicolas de Cuse, Giordano Bruno...) et elle sous-tend (à mon sens) un point de vue sur l'arithmétique et la géométrie encore largement partagé de nos jours. Ce point de vue a été conforté au 18ème siècle par les "paradoxes des infinitésimaux" remarqués par Leibniz et Euler.