Autour de la correspondance Grothendieck-Serre

Math. et Philo. Contemporaines, Saint-Flour, le 3 juin 2013

1ère partie: survol de la correspondance

Tôhoku

Le texte qui deviendra

Grothendieck, A.; *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. (2) **9**, 119–221 (1957).

est discuté à plusieurs reprises au début de la correspondance (juin 1955, juillet 1955, sept. 1956 . . . , le "multiplodoque d'algèbre homologique").

Il était d'abord question de le publier dans les *Trans. Amer. Math. Soc.* ce qui n'a pas eu lieu à cause de réticences d'Eilenberg.

Grothendieck tente ensuite sans succès de le publier dans le *American J. of Math.* qui le refuse car il y a déjà publié un article concernant (entre autres) les fibrés vectoriels sur la droite projective.

Enfin il songe aux *Mémoires de la SMF* mais cela n'aboutit pas non plus.

Tannaka finira par accepter de le publier dans le *Tohoku Math. J.*

L'article *Sur quelques points d'algèbre homologique* fait naturellement suite au livre

Cartan, Henri; Eilenberg, Samuel; *Homological algebra.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

Grothendieck y développe un formalisme catégorique pour la définition des groupes de cohomologie. Ce formalisme recouvre la cohomologie des faisceaux usuels, la cohomologie singulière, la cohomologie des groupes, les foncteurs Ext, Tor etc.

Une (petite) partie des résultats et notions (en particulier la notion de catégorie abélienne) de cet article se trouvaient déjà dans un article de Buchsbaum (Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 1–34 (1955)). Ce recoupement est aussi en partie à l'origine de la réticence d'Eilenberg à publier l'opus de Grothendieck dans les *Trans. Amer. Math. Soc.*

Le théorème de Riemann-Roch

Ce théorème affirme entre autres que pour une morphisme projectif $f : X \to Y$ de variétés lisses sur $\mathbb{C}$, on a la formule

$$\mathrm{ch}(\mathrm{R}f_*(F)) = f_*(\mathrm{Td}(f)\mathrm{ch}(F))$$

pour tout faisceau cohérent F sur X. Le caractère de Chern d'un faisceau cohérent est calculé au moyen de résolutions (appelées encore "syzygétiques" par Serre, cf. lettre du 26 février 1955), une technique à la Tôhoku.

La démonstration est expliquée dans les lettres de 1er et du 12 nov. 1957. Borel et Serre publieront les résultats de Grothendieck dans

Borel, A.; Serre, J.-P.; Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. Math. France **86** 97–136 (1958)

à la suite d'un séminaire à Princeton en 1957.

Dualité de Serre-Grothendieck

Dans les lettres de juillet et décembre 1955 apparaît pour la première fois le théorème de dualité pour les faisceaux cohérents dans sa forme moderne. Il s'agit de la formule

$$H^{n-p}(X, F)^{\vee} \simeq \mathrm{Ext}^p(X, F, \omega_X)$$

où F est un faisceau cohérent sur une variété projective lisse sur un corps.

La volonté de généraliser cette formule mènera Grothendieck à formuler la notion de catégorie dérivée, qui sera développée dans la thèse de Verdier, publiée près de 40 ans plus tard par G. Maltsiniotis (*Des catégories dérivées des catégories abéliennes,* Astérisque No. 239 (1996)). La notion de catégorie dérivée n'est pas discutée dans la correspondance.

Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique

Le résultat principal de l'article

Serre, Jean-Pierre; *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6**, 1–42 (1955–1956).

affirme que sur une variété projective sur $\mathbb{C}$, la catégorie des faisceaux analytiques cohérents est équivalente à la catégorie des faisceaux algébriques cohérents. Ceci généralise un théorème plus ancien de Chow (1949).

Un cas particulier de ce théorème est l'énoncé qu'une fonction méromorphe avec un pôle ou un zéro à l'infini est nécessairement rationnelle.

Cet article est discuté dans plusieurs lettres (Serre-Grothendieck du 22 déc. 1955, Grothendieck-Serre du 12 janvier 1956...).

Les techniques du papier "Tôhoku" y jouent déjà un rôle important.

Dans la lettre Grothendieck-Serre du 5 nov. 1958 apparaît déjà le pendant formel du théorème de Serre.

Il s'agit de l'affirmation suivante: soit $\widehat{S}$ un schéma formel propre sur un anneau noethérien complet A, qui est le complété d'un schéma propre S sur A; alors la catégorie des faisceaux cohérents (formels) sur $\widehat{S}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux cohérents sur S.

Il est intéressant que ce théorème semblait déjà connu de Grothendieck avant le début de la rédaction avec Dieudonné des *Éléments de Géométrie Algébrique.* Dans la lettre, il utilise la terminologie “variété holomorphe”, plutôt que schéma formel.

Le service militaire et la guerre d'Algérie

"...il n'est sans doute pas nécessaire que je t'explique qu'il faut au débutant un effort extrêmement grand et une tension continue pour avaler une masse de notions techniques des plus diverses et arriver au point où il peut commencer à faire un travail utile, voire original. De notre côté, nous usons assez de salive et de craie jusqu'à ce moment, où enfin le gars va pouvoir pousser dans les roues. C'est le moment hélas où il est appelé sous les drapeaux, comme on dit, où la belle ardeur et les réflexes cérébraux subtils acquis par des années de bûchage et de méditations vont être mis dans un tiroir pour deux ans, s'il plaît au Général de ne pas le maintenir plus longtemps, faire des exercices de tir FM. Avec de telles perspectives, ..."(Grothendieck, lettre à Cartan du 22 oct. 1961).

“Je ne suis pas d’accord avec toi qu’il ne faille rien entreprendre contre le service militaire, en l’occurrence des scientifiques doués, avant la fin de la guerre d’Algérie. Tout d’abord, en ce qui concerne l’injustice ”une fois que la peau des gens est en jeu” ...”(Grothendieck, lettre à Serre, 31 oct. 1961).

Dans cette lettre, Grothendieck répond à une lettre de Serre dans laquelle ce dernier commente la lettre de Grothendieck à Cartan. Il répond en particulier au passage

“...en dispenser les scientifiques serait vraiment un inégalité trop choquante, une fois que la peau des gens est en jeu...”

Le débat concerne l’exemption du service militaire pour les scientifiques, qui existait au États-Unis et non en France.

Grothendieck y développe un argumentaire pacifiste:

“...Toute action dans ce sens, (...) contribuera à faire prendre conscience aux gens des conséquences de la militarisation du pays et pourra créer un précédent pour des actions analogues et plus vastes.”

EGA & SGA

Dans un grand nombre de lettres, la rédaction des *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA) est mentionnée. Elle commence en septembre 1958 et dans une lettre du 18 août 1958, Grothendieck écrit qu'il espère terminer son traité en l'espace de trois ans au plus (!).

Serre en relit et en commente des parties. Un séminaire sur (une partie du ?) premier volume est organisé à Princeton pendant l'automne 1959.

La rédaction des *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA), qui commencent en 1960 avec la théorie du groupe fondamental algébrique, est aussi mentionnée dans diverses lettres (par ex. Grothendieck-Serre, 24 sept. 1964).

Dans sa lettre du 18 août 1958, Grothendieck donne une table des matières de la totalité du traité qu'il envisage et on peut constater qu'elle reproduit le matériel couvert par les SGA (mis à part l'homotopie), qui devaient servir de brouillon.

“J’espère dans l’année prochaine (. . .) achever la rédaction des chapitres IV, V, VI, VII (ce dernier étant le groupe fondamental) en même temps que des catégories. Dans deux ans résidus, dualité, intersections, Chern, Riemann-Roch. Dans trois ans cohomologie de Weil, et un peu d’homotopie si Dieu veut. Et entre-temps, je ne sais quand, le ”grand théorème d’existence” avec Picard etc., un peu de courbes algébriques, les schémas abéliens. Sans difficultés imprévues ou enlisement, le multiplodoque devrait être fini d’ici 3 ans, ou 4 ans maximum. On pourra enfin commencer à faire de la géométrie algébrique !”

(Grothendieck-Serre, lettre du 18 août 1959)

Restriction de Weil*

Soit $T \to S$ un morphisme de schémas. Soit X/T un schéma sur T.

La restriction de Weil demande de construire un schéma $R_{T/S}(X)$ sur S, tq qu'il existe un isomorphisme naturel de foncteurs $\mathrm{Sch}/S \to \mathrm{Ens}$

$$\mathrm{Hom}_S((\bullet), R_{T/S}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_T((\bullet) \times_S T, X).$$

Dans sa lettre du 31 oct. 1959, Grothendieck démontre l'existence de $R_{T/S}(X)$ lorsque $T \to S$ est fini et plat et il en donne les propriétés principales.

À la même époque, Greenberg[1], démontre un théorème similaire dans une situation arithmétique, par ex. $S = \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p$ et $T = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

[1] cf. *Schemata Over Local Rings*, Annals of Math., 2nd Ser., Vol. 73, No. 3 (1961)

La démonstration géométrique du théorème de la monodromie locale

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes. On suppose que S est un disque ouvert et que f est lisse en dehors de 0. Pour n'importe quel $t \in S\backslash\{0\}$ et tout $k \geqslant 0$, on dispose alors d'une représentation $\pi_1(S\backslash\{0\}) \simeq \mathbb{Z} \to H^k(X_t, \mathbb{Z})$. Soit $T : H^k(X_t, \mathbb{Z}) \to H^k(X_t, \mathbb{Z})$ l'image de 1.

Le *théorème de la monodromie locale* affirme qu'il existe $a \geqslant 0$ tq $(T^a - 1)^{k+1} = 0$.

Dans la lettre du 30 oct. 1964, Grothendieck en donne une démonstration géométrique (la première ?[2]), fondée sur un calcul de *cycles évanescents*.

[2] voir L. Illusie, par. 2.1 dans *Autour du théorème de la monodromie locale*, Astérisque **223** (1994).

La formule de Woods Hole*

En juillet 1964 a lieu à Woods Hole un "Summer Institute" auquel participent entre autres Atiyah, Bott, Serre, Verdier et Mumford. Serre décrit dans sa lettre du 2 août 1964 le résultat suivant, apparemment déjà connu de Shimura, qui a été l'un des sujets principaux de la rencontre.

Soit X une variété projective lisse sur un corps et $f : X \to X$ un endomorphisme, dont on suppose les points fixes isolés. Soit F/X un fibré vectoriel et $f^*F \to F$ une flèche.

La formule du point fixe dite "de Woods Hole" est la suivante:

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \mathrm{Tr}(f^*, H^k(X, F)) = \sum_{P \in \mathrm{Fixe}(f)} \mathrm{Tr}(f_P)/\det(1 - \mathrm{d}f_P)$$

pourvu que les $\det(1 - \mathrm{d}f_P)$ soient non-nuls.

La formule de Woods-Hole a de multiples applications, dont *la formule des caractères de H. Weyl*.

Une vaste généralisation de cette formule est la formule de Lefschetz-Verdier, présentée dans SGA 5 (Appendice de l'exp. III).

Cependant, dans sa réponse du 8 août 1964, Grothendieck n'est guère enthousiaste:

"Le no. 1 ne m'excite guère, malgré les jolies applications; le théorème des points fixes lui-même ne semble pas plus qu'un exercice sur un air bien connu !"

Tate et la géométrie analytique rigide

Autour de 1960, Tate commence à travailler à la définition de la géométrie analytique rigide, qui cherche à associer un espace "analytique" à une variété définie sur un corps non-archimédien complet.

En particulier, il définit à la main la *courbe de Tate*.

Plus exactement soit $E/\mathbb{Q}_p$ une courbe elliptique à réduction multiplicative. Tate décrit alors une surjection $\bar{\mathbb{Q}}_p^* \to E(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$.

La théorie de Tate a par la suite fait l'objet de nombreux travaux et généralisations (Kiehl, Bosch, Raynaud...) et de plus elle fait usage de la notion de topologie de Grothendieck.

Cependant, Grothendieck ne montre que peu d'intérêt:

"...Tate m'a écrit de son côté...pour me demander si j'avais des idées sur une définition globale des variétés analytiques sur les corps complets (...) Je n'ai pas non plus l'impression d'avoir rien compris à son théorème, qui ne fait qu'exhiber par des formules brutales un certain isomorphisme de groupes analytiques; on conçoit que d'autres formules tout aussi explicites en donneraient un autre pas plus mauvais (sauf preuve du contraire !)."

Le groupe de Grothendieck des représentations entières du schéma en groupes linéaire*

Dans sa lettre du 7 déc. 1966, Serre explique sa preuve du fait[3] que

$$R_{\mathbb{Z}}(\mathrm{GL}_n) \simeq R_{\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_n) \simeq \mathbb{Z}[\Lambda^1(\mathrm{Id}_n), \ldots, \Lambda^n(\mathrm{Id}_n)]_{\mathrm{det}}$$

qui implique que $R_{\mathbb{Z}}(\mathrm{GL}_n)$ est un λ-anneau spécial.

Ce résultat montre que tous les groupes de Grothendieck des schémas sont des λ-anneaux spéciaux également sans avoir à utiliser le principe de scindage géométrique.

[3] Ceci sera publié dans *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34**, 37–52 (1968).

Autres sujets abordés

Voici quelques sujets également abordés dans la correspondance, que nous ne pourrons décrire faute de temps:

• La formule de Néron-Ogg-Shafarevich (Grothendieck-Serre, avril 1963)

• La théorie du corps de classe géométrique de Serre (Serre-Grothendieck, 9 nov. 1958)

• La théorie des relèvements canoniques des variétés abéliennes ordinaires due à Serre-Tate (Serre-Grothendieck, 2 août 1964).

• Discussions sur les travaux de Néron sur les modèles entiers des variétés abéliennes (Grothendieck-Serre, 19 oct. 1961, . . .).

La fin de la correspondance

La correspondance est très riche entre 1955 et 1961 ainsi que pendant l'année 1964. Il y a un intervalle de plus de quinze ans entre la lettre du 15 janvier 1969 et la prochaine, qui date du 23 juillet 1985.

Voici trois points évoqués dans la partie de la correspondance postérieure à 1985 qui m'on semblé intéressants:

• La conjecture de modularité de Serre. Cette conjecture, qui a fini par être établie dans les travaux de Wintemberger et Khare[4] implique la conjecture de Taniyama-Weil établie par Wiles en 1996.

[4] cf. Khare, C.; Wintenberger, J.-P.; *Serre's modularity conjecture (I) & (II)*, Invent. Math. **178** (3)

• "J'ai trouvé très beau, par exemple, ce que fait Deligne dans LN 900 (le texte que tu rejettes avec horreur...) pour contourner les cycles de Hodge (. . .) Je sais bien que l'idée même de "contourner une difficulté" t'est étrangère - et c'est peut-être cela qui te choque le plus dans les travaux de Deligne (dans sa démonstration de Weil, il "contourne" les "conjectures standard" - cela te choque, mais cela me ravit)."(Serre-Grothendieck, 23 juillet 1985)

• La tentative par Serre de comprendre pourquoi Grothendieck a quitté la scène des mathématiques en 1972:

". . . J'ai l'impression que malgré ton énergie bien-connue, tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris. . . "(Serre-Grothendieck, 31 déc. 1985)

". . . D'où la question: ne serais-tu pas arrivé, vers 1968-1970, à te rendre compte que la méthode "marée montante" était impuissante contre ce genre de problèmes [ceux de la théorie des nombres et de la théorie des formes modulaires], et qu'il fallait changer de style - ce qui te déplaisait ?"(ibid.)

2ème partie: le problème de l'existence des cycles

Une citation d'André Weil

"Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître; comme l'enseigne la *Gītā* on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir."

Extrait de *Récoltes et Semailles*

"Dix choses soupconnées seulement, dont aucune (la conjecture de Hodge disons) n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, acquièrent dans cette harmonie force de vision. Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain, et l'harmonie qu'il nous a fait entrevoir et qu'il nous a permis de pénétrer tant soit peu n'est pas une illusion, mais une réalité, nous appellent à la connaître. Par ce travail, seulement, nous avons pu entrer en contact intime avec cette réalité, cette harmonie cachée et parfaite. . . "

Extrait de la lettre Grothendieck-Serre du 30 oct. 1964

"…quant aux conjectures de Hodge, j'en fais maintenant un article de foi au même titre que des conjectures de Tate; elle sont en effet trop intimement liées pour que je puisse croire que l'une puisse être fausse sans que l'autre le soit, en d'autres termes, il faut qu'elles soient vraies toutes les deux.…"

La conjecture de Hodge

Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$.

Les éléments de $H^{p,p}(X(\mathbb{C})) \cap H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ sont appelés **cycles de Hodge**.

Conjecture

Tout cycle de Hodge est la classe d'un $\mathbb{Q}$-cycle algébrique sur X.

La conjecture de Hodge est vraie pour $p = 1$ (théorème de Lefschetz). La preuve moderne utilise la suite exacte exponentielle

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \stackrel{\exp(2\pi i \cdot)}{\to} \mathcal{O}^*_{X(\mathbb{C})} \to 0$$

La conjecture de Hodge est fausse en général sur une variété kählerienne (cf. articles de C. Voisin).

La conjecture de Tate

Soit X une variété projective lisse sur un corps k qui est de type fini sur son corps premier.

Soit $l \neq \mathrm{char}(k)$ un nombre premier. Nous appellerons **cycle de Tate** les éléments de $H^{2p}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(p))$ qui sont d'orbite fini sous $\mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$.

Conjecture

Tout cycle de Tate est la classe d'un $\mathbb{Q}_l$-cycle algébrique.

La conjecture de Tate est vérifiée pour certaines variétés (surfaces modulaires de Hilbert, espace modulaires de Siegel de dimension 3, ...) mais contrairement à la conjecture de Hodge elle n'est pas démontrée pour $p = 1$ en général.

Phénomènes de torsion dans la conjecture de Hodge et de Tate

Dans la conjecture originale de Hodge, $\mathbb{Q}$ est remplacé par $\mathbb{Z}$. Cette première conjecture était fausse.

Le premier contre-exemple fut donné dans un article de Atiyah-Hirzebruch[5]. Dans ce contre-exemple, l'ordre de la torsion est petit comparé à $\dim(X)$.

C. Soulé et C. Voisin[6] donnent des contre-exemples sans restriction sur l'ordre de la torsion.

[5] Atiyah, M. F.; Hirzebruch, F.; *Analytic cycles on complex manifolds.* Topology **1**, 25–45 (1962)

[6] Soulé, C.; Voisin, C.; *Torsion cohomology classes and algebraic cycles on complex projective manifolds.* Adv. Math. **198**, no. 1, 107–127 (2005)

La méthode de Atiyah-Hirzebruch peut être adaptée au cas de la conjecture de Tate (Milne, Colliot-Thélène-Szamuely[7]. . .)

Ceci suggère que la construction putative des cycles algébriques associés aux cycles de Hodge ne peuvent être construits par une construction algébrique.

Construction analytique ?

[7] Colliot-Thélène, J.-L.; Szamuely, T.; *Autour de la conjecture de Tate à coefficients Z_l pour les variétés sur les corps finis.* The geometry of algebraic cycles, 83-98, Clay Math. Proc., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

Comment construire des cycles ?

Une manière classique de construire des cycles est de considérer des classes de Chern de fibrés vectoriels.
On voudrait trouver d'autres méthodes. Voici quelques idées, du classique au bouche-à-oreille:

- On pourrait considérer les cycles de ramifications de morphismes (ceci était apparemment un espoir de A. Grothendieck). Cependant, le théorème de Thom-Porteous ruine cet espoir car on n'obtient que des classes de Chern de fibrés.
- (C. Soulé) Les termes sous-dominants du théorème de l'indice local pourraient pointer vers de nouvelles constructions.
- (Y. Laszlo) La géométrie aux différences de E. Hrushovski, qui étend le langage schématique, pourrait fournir des outils.
- La théorie quantique des champs ?

Nature géométrique de la cohomologie étale*

La cohomologie étale est une théorie cohomologique très proche de la géométrie qui lui donne lieu.

• Les théorèmes principaux de la cohomologie étale se prouvent en utilisant la technique de dévissage pour se ramener à la géométrie des courbes.

• Cependant, des techniques analytiques sont requises (ex. th. du changement de base propre et th. d'approximation d'Artin).

• Une technique analytique est aussi nécessaire pour démontrer le théorème de représentation d'Artin.

Y a-t-il un lien entre la présence de ces techniques analytiques et le fait (étrange ?) que la conjecture de Tate affirme l'existence de cycles seulement *après* le passage à la limite

$$\varprojlim_n H^*(X, \mathbb{Z}/l^n) = H^*(X, \mathbb{Z}_l) \ ?$$

L'analogue de l'hypothèse de Riemann. La méthode de Grothendieck-Serre*

Soit X une variété kählerienne compacte X.

On suppose donné un fibré en droite ample L/X et un endomorphisme $F : X \to X$ tq $F^*L = L^{\otimes n}$, où $n > 1$.

On démontre alors que pour le produit scalaire

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_X \alpha \wedge *\bar{\beta}$$

sur $H^k(X, \mathbb{C})$, l'endomorphisme

$$n^{k/2} \cdot F^* : H^k(X, \mathbb{C}) \to H^k(X, \mathbb{C})$$

est une isométrie.

Ceci est une conséquence d'un énoncé de positivité démontré au moyen de la théorie de Hodge ainsi que du th. de Lefschetz difficile.

Voir la lettre Serre-Grothendieck du 25 oct. 1959 et aussi

Serre, Jean-Pierre; *Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil.* Ann. of Math. (2) **71**, 392–394 (1960).

Une adaptation de ce raisonnement conjuguée à la conjecture de positivité de Hodge implique que les valeurs propres de

$$F^* : H^k(X, \mathbb{Q}_l) \to H^k(X, \mathbb{Q}_l)$$

sont de valeur absolue $p^{k/2}$, si X est projective et lisse sur $\mathbb{F}_p$ et F est l'endomorphisme de Frobenius (cf. Grothendieck-Serre, 27 août 1965)

Ceci est *l'analogue de l'hypothèse de Riemann.*

Le rôle de cette conjecture de positivité dans le contexte des conjectures standard n'est pas clair.

Grothendieck écrit à ce sujet:

"...Pas de commentaires à faire sur tes essais de généralisation de l'inégalité de Weil-Castelnuovo; j'avoue que ces questions de positivité n'ont pas encore bien pénétré mon yoga..."(lettre du 31 oct. 1959)

Théorème (Deligne, La conjecture de Weil. I (1971))

Soit U_0 une courbe affine lisse absolument irréductible sur $\mathbb{F}_p$.

Soit $\mathcal{F}_0/U_0$ un faisceau l-adique pur de poids w absolument irréductible sur $U := U_{0,\bar{\mathbb{F}}_p}$ et tq les polynômes caractéristiques des Frobenius locaux soient à coefficients rationnels.

Alors $H^1_c(U, \mathcal{F})$ est de poids $\leqslant w + 2$.

Ce théorème conjugué à un dévissage par des pinceaux de Lefschetz permet de démontrer l'analogue de l'hypothèse de Riemann.

Théorème (Deligne, La conjecture de Weil. II (1980)*)

Soit U_0 *une courbe affine lisse absolument irréductible sur* $\mathbb{F}_p$.

Soit $\mathcal{F}_0/U_0$ *un faisceau l-adique pur de poids* w.

Alors $H^1_c(U, \mathcal{F})$ *est de poids* $\leqslant w + 1$.

Ce théorème permet de démontrer l'analogue de l'hypothèse de Riemann par un dévissage élémentaire en fibrations de courbes.

Le théorème de décomposition*

Théorème (BBD[8])

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas de type fini sur $\mathbb{F}_p$. Soit $\mathcal{F}$ un complexe l-adique pur. Alors $f_*(\mathcal{F})$ est une somme directe de faisceaux pervers simples (et donc purs) décalés.

Lorsque f est lisse ce théorème peut être démontré en combinant le théorème de semisimplicité et le théorème de Lefschetz difficile.

La démonstration par Laumon [9] du théorème sur la page précédente est fondée sur la transformée de Fourier-Deligne et la démonstration du théorème de décomposition l'utilise à nouveau.

---

[8] Beilinson, A. A.; Bernstein, J.; Deligne, P. Faisceaux pervers. Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[9] Laumon, G.; *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **65**, 131–210 (1987).

• Quel est le lien entre l'approche de Grothendieck-Serre et l'approche de Deligne ? Serait-il possible de démontrer les résultats de Deligne sur les poids à partir de la conjecture de Tate ?

• La transformation de Fourier a-t-elle une signification "motivique"?

• Sur une variété lisse, un faisceau pervers simple génériquement non nul est un système l-adique localement constant et irréductible. La nécessité d'introduire la perversité provient des singularités, qui sont détectées via la théorie de la dualité. La théorie des faisceaux pervers a inspiré l'introduction par Beilinson de la catégorie conjecturale des motifs mixtes.

Quel est le lien exact entre conjectures d'existence des cycles et résolution des singularités ?

Retour sur le théorème de Riemann-Roch et la formule de Lefschetz

Le théorème de Riemann-Roch est central en géométrie algébrique.

Dans le cas des courbes, il permet de construire les plongements des courbes elliptiques dans $\mathbb{P}^2$ et il est l'outil principal dans la démonstration du th. de l'indice de Hodge pour les surfaces.

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (étendu) montre que les groupes de K-théorie de Quillen ont une graduation naturelle et que cette graduation est décalée par l'image directe.

Par ailleurs

• Le théorème de Riemann-Roch peut-être déduit de la formule du point fixe de Lefschetz géométrique pour l'involution naturelle de $X \times X$ (Nori[10])

Le théorème de Riemann-Roch en char. positive peut-être déduit des propriétés du morphismes de Frobenius (cf. Pink-R.[11])

• Le théorème de Riemann-Roch à valeurs dans la cohomologie de Hodge peut être déduit de la formule de Lefschetz-Verdier.

[10] Nori, M.; *The Hirzebruch-Riemann-Roch theorem.* Michigan Math. J. **48**, 473–482 (2000)

[11] Pink, R.; Rössler, D.; *On the Adams-Riemann-Roch theorem in positive characteristic.* Math. Z. **270**, no. 3-4, 1067–1076 (2012).

Le théorème de Riemann-Roch peut-il être interprété comme l'existence d'un cycle ou d'un motif ?

Ou d'une propriété de la catégorie des motifs mixtes ?

Quelle est la signification motivique de la formule du point fixe ?

Existe-t-il des termes "sous-dominants" la classe de Todd qui indiqueraient l'existence de cycles supplémentaires ?

Deligne et les cycles de Hodge absolus.

Soit X une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$. Un *cycle de Hodge absolu* (version simplifiée) est un cycle de Hodge η tq $\sigma(\eta)$ est un cycle de Hodge pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Ici l'action de σ doit se comprendre sur la cohomologie de de Rham algébrique.

Deligne démontre dans

Hodge cycles, motives, and Shimura varieties. Lecture Notes in Mathematics, 900. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

(rédigé en collaboration avec Milne et Shih) que sur une variété abélienne, *tout cycle de Hodge est absolu.*

Par ailleurs il montre (avec Piateski-Shapiro) que *si tout cycle de Hodge sur X est absolu alors la conjecture de Tate sur X implique la conjecture de Hodge sur X.*

La démonstration est inspirée par une technique de calcul de périodes introduite par Gross[12].

Deligne montre que la notion de cycle de Hodge absolu est stable par déformation plate et il se ramène au cas de produits de courbes elliptiques CM, où le résultat peut être démontré directement.

La citation sur la page suivante, tirée de l'article de Ribet

Ribet, K.; *Hodge classes on certain types of abelian varieties.* Amer. J. Math. **105**, no. 2, 523–538 (1983).

souligne la bizarrerie de la situation.

---

[12] cf. *On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg.* With an appendix by David E. Rohrlich. Invent. Math. **45**, no. 2, 193–211 (1978).

"Responding to a question posed by Tate, Mumford found that the (1,1) criterion [qui permet de vérifier la conjecture de Hodge], (...) is not necessarily satisfied by abelian varieties of dimension 4. Although Mumford's counterexample involved an abelian variety of CM type, Weil has stressed that its most important feature is the action of an imaginary quadratic field k on A in such a way that Lie(A) becomes a free $k \otimes \mathbb{C}$-module. (Abelian varieties of precisely this type play an important role in Deligne's proof that Hodge cycles on an arbitrary abelian variety are absolutely Hodge.) There is speculation that the Hodge conjecture is false, at least in general, for such abelian varieties, but no method is available at present for settling this question either way."

Torsion et cycles

La torsion semble exclue des grandes conjectures sur les cycles.

Cependant, on dispose de la *conjecture de Bloch-Kato*[13].

Celle-ci affirme que pour tout nombre premier l et tout corps k de caractéristique différente de l, on a

$$K_n^M(k)/l \simeq H^n_{\mathrm{et}}(k, \mu_n^{\otimes l}).$$

Soulé-Voisin montrent (à la suite de Bloch) que la conjecture de Bloch-Kato implique que l'image par les différentielles de Atiyah-Hirzebruch de toute classe de torsion dans la cohomologie d'un variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$ est *supportée en codimension* 2.

[13] maintenant démontrée dans Voevodsky, V.; *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients.* Ann. of Math. (2) **174**, no. 1, 401–438 (2011)

Enfin, voici un peu de publicité pour la conjecture suivante, proposée par V. Maillot et l'orateur[14]

Soit $X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de variétés quasi-projectives et lisses sur $\mathbb{C}$. Alors les classes de Chern

$$c_t(H^i_{\mathrm{dR}}(X/Y) \in \mathrm{CH}^t(Y)$$

sont de torsion pour tout $t > 0$ et tout $i \geqslant 0$.

De plus l'ordre de la torsion divise (conjecturalement) le *dénominateur* d'un nombre de Bernoulli.

Dans la classe de Todd apparaissent les *numérateurs* des nombres de Bernoulli. Ou est le lien ?...

[14] Maillot, V.; Rössler, D.; Une conjecture sur la torsion des classes de Chern des fibrés de Gauss-Manin. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46**, no. 4, 789–828 (2010).