L'arithmétique comme forme symbolique

Damian RÖSSLER *

24 mars 2014

Cet exposé fait directement suite au précédent exposé 'Retour sur Benacerraf…'.
Nous voudrions maintenant évoquer une notion introduite par E. Cassirer dans son livre 'La philosophie des formes symboliques' et qu'il nous semble intéressant de relier à la notion de pratique et de règle que l'on trouve chez Wittgenstein. J'ajoute d'emblée que Wittgenstein n'aurait probablement pas voulu de cette interprétation, car il ne se préoccupait pas d'épistémologie.
L'idée fondamentale de Cassirer est que la connaissance humaine s'articule en formes symboliques. Une forme symbolique est un processus cognitif intersubjectif qui a trois phases. La première phase est la phase *expressive* ('Ausdrucksfunktion' chez Cassirer), la deuxième est la phase *représentative* ('Darstellungsfunktion') et la troisième est la phase *sémantique* ('Bedeutungsfunktion'). L'exemple fondamental d'une forme symbolique est le langage. La fonction expressive du langage est essentiellement sa composante onomatopéique : les onomatopées expriment des objets ou phénomènes physiques en reproduisant physiquement une partie des ces phénomènes. Son idée (qu'il fonde sur un large éventail de données ethnologiques et anthropologiques) est que l'origine du langage est l'onomatopée. Les mots se libèrent ensuite progressivement de leur origine onomatopéique pour devenir de simples représentations. À ce stade, l'aspect onomatopéique de la plupart des mots n'est plus apparent. C'est la phase représentative du langage. La dernière phase, la phase sémantique du langage, correspond à l'usage logico-grammatical du langage. Lorsqu'on parle d'implications entre des événements possibles, dans lesquels des objets dont on n'a pas de connaissance directe apparaissent, on fait appel à la fonction sémantique du langage.
Pour Cassirer, les formes symboliques sont intersubjectives et couvrent à la fois le champ des sciences et le champ des arts. La forme symbolique primaire est le langage, qui est comme la matrice de toutes les autres. Au centre de la forme symbolique est le symbole,

*Institut de Mathématiques, Equipe Emile Picard, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, FRANCE, E-mail : rossler@math.univ-toulouse.fr

qui est commun à ses trois phases et qui est la pierre angulaire de notre connaissance du monde. L'être humain est selon lui un *animal symbolicum*.

Un autre point important est que la forme symbolique unit toujours en elle ces trois mouvements, qui sont simultanément présents. Ces mouvements n'ont pas d'existences distinctes.

Un autre exemple de forme symbolique que donne Cassirer est celui de la physique. La première phase de la physique comme forme symbolique est la physique aristotélicienne, qui est une physique de forces et d'actions de substances concrètes les unes sur les autres. La deuxième phase est la physique newtoniennne, dans laquelle on donne une description mathématique de l'univers, mais cet univers reste proche de notre intuition. La troisième phase est la physique moderne, en particulier la relativité générale et la physique quantique, dans lesquelles on donne une description symbolico-mathématique d'un monde complètement étranger à notre intuition (dans la mesure où le temps n'y est plus homogène et la matière n'y existe plus).

Qu'en est-il alors des mathématiques ? Cassirer ne semble pas avoir tenté de montrer que certains développements historiques des mathématiques pouvaient être vus comme des formes symboliques. Il s'est bien plus intéressé aux arts et aux sciences dures. Ceci est un peu paradoxal, car il remarque lui-même que les mathématiques peuvent être vues comme le domaine du symbole par excellence. Voici une citation for intéressante de Hilbert que Cassirer donne dans 'Symbol, Technik und Sprache' :

'Indem ich diesen Standpunkt einnehme, sind mir im genauen Gegensatz zu Frege und Dedekind die Gegenstände der Zahlentheorie die Zeichen selbst. [...] Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik, wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte : am Anfang ist das Zeichen.'

Cassirer explique ensuite que cette tendance à la formalisation est commune à toute la science moderne et que Hilbert s'oppose sur ce point de la formalisation au point de vue intuitioniste de Brouwer et Weyl.

Il ne s'est cependant pas intéressé plus avant aux mathématiques, à ma connaissance. Dans l'opus de Cassirer, je ne connais pas d'autres références aux mathématiques comme source de symbole que ce passage. Le mathématicien S. Bochner se plaint d'ailleurs dans son essai 'From Myth to Mathematics to Knowledge' que les mathématiques sont le grand absent du livre 'Die Philosophie der symbolischen Formen' de Cassirer.

Cependant, il me semble que les mathématiques sont un terrain fertile pour les formes symboliques. En particulier, l'arithmétique et plus généralement la théorie des ensembles me semble en fournir un très bon exemple.

Dans la phase expressive de l'arithmétique, les nombres naturels sont exprimés par des symboles qui portent encore la marque concrète de la multiplicité. Par exemple, on exprimera des nombres en montrant un certain nombre de doigts. Dans l'alphabet romain, les nombres I, II et III sont représentés littéralement par le nombre correspondant de barres, ce qui correspond aussi au mode expressif. Ce mode doit être abandonné pour les grands nombres et de fait il existe des langues tribales dans lesquelles on ne dispose pas de système pour exprimer des nombres au-delà de deux ou trois.
Dans la phase représentative, les nombres naturels sont représentés par des symboles abstraits, comme par exemple nos chiffres arabes. Ici les nombres sont des multiplicités abstraites mais elles sont engagées dans la réalité physique, dans la mesure où on ne cherche pas encore à dégager des propriétés abstraites de l'ensemble des nombres naturels : lorsqu'on parle des nombres 1, 2, 3 etc. c'est pour les appliquer à des objets. L'introduction du 0, qui a été une étape décisive dans le développement de l'arithmétique, est un premier signe de rupture avec la multiplicité concrète.
Pour finir, dans la phase sémantique, on considère les propriétés spécifiques des nombres naturels, par exemple les propriétés dégagées par Peano et les nombres naturels ne sont plus que des éléments auxquels on applique une axiomatique.
On peut analyser le développement de la théorie des ensembles de manière semblable. Dans ce cas-là, le phase sémantique correspond partiellement au développement de la notion de topos, dans laquelle on tente d'abstraire des propriétés de la catégorie des ensembles.
Il est d'ailleurs remarquable que les trois phases de la forme symbolique sont présentes dans la présentation moderne de l'axiomatique de Peano en logique du premier ordre.
Je reproduis ici le début du système formel de la logique propositionnelle (mentionné dans mon premier exposé) :

Definition 2.1 *The formal system L of statement calculus is defined by the following :*
1. Alphabet of symbols (infinite) :
$, -, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots$
2. Set of wfs. Instead of specifying the set explicitly…

La multiplicité expressive est présente via les '…'.
La multiplicité représentative est présente via les nombres naturels 1, 2 et 3, qui, de fait, numérotent des symboles. Il s'agit donc bien d'une multiplicité 'engagée'.
La phase sémantique de l'arithmétique serait présente si le système formel décrivait l'axiomatique de Peano (ce qui n'est pas le cas ici).
Il me semble que la description de l'arithmétique et plus généralement de la théorie des ensembles comme forme symbolique jette un jour nouveau sur la question des présupposés

tacites et des tautologies qui a été évoquée pendant les deux premiers exposés.
En effet, un présupposé tacite réside au niveau expressif de la forme symbolique. Par exemple, dans la forme symbolique de l'arithmétique, un présupposé tacite comme la comptage est littéralement engagé dans le comptage physique des objets.
La proposition élémentaire, quant à elle, réside au niveau représentatif, puisqu'elle contient les noms, dont la fonction est explicitement représentative.
La tautologie réside bien sûr au niveau sémantique, puisqu'elle ne dit plus rien.
Si on voit la tautologie dans le cadre des formes symboliques, on voit mieux pourquoi sa forme est difficile à justifier : cette difficulté a sa racine dans l'unité cognitive de la forme symbolique. La tautologie ne peut exister qu'en conjonction avec des présupposés tacites et des propositions élémentaires et ne peut exister séparément.
On objectera peut-être maintenant que cette présentation n'est pas cohérente, car j'ai suggéré plus haut qu'il ne pouvait pas y avoir de vraies propositions élémentaires.
En fait, on touche ici un point crucial. Selon Cassirer, la forme symbolique est le mode de connaissance naturel de l'homme et il ne peut connaître que dans ce cadre. Il serait illusoire de tenter de décrire l'objet de la connaissance en dehors du 'pacte symbolique'. La connaissance symbolique est ainsi fidèle à la base néo-kantienne de la formation intellectuelle de Cassirer. Une forme symbolique se comporte comme une forme a priori de l'intuition chez Kant.
Je pense qu'on peut parler de propositions élémentaires et de noms dans le cadre d'une forme symbolique donnée. De même, on peut parler de propositions élémentaires et de noms dans le cadre d'un modèle donné d'une théorie du premier ordre. La forme symbolique est le garant de la singularité de l'objet nommé.
Cependant, tout comme pour la tautologie, la forme de la proposition élémentaire est difficile à justifier à cause de l'unité cognitive de la forme symbolique. Elle ne peut exister qu'en conjonction avec des présupposés tacites.
Pour résumer l'ensemble de notre discussion ;
1) Benacerraf exige des nombres naturels une singularité qu'il ne pourrait exiger d'aucun objet empirique.
2) Singularité et généralité, ie proposition élémentaire et tautologie, n'ont de sens que dans le cadre d'une forme symbolique qui les enracine dans une pratique, ie un ensemble de présupposés tacites, qui fonctionnent comme des règles chez Wittgenstein.
3) L'arithmétique et la théorie des ensembles sont des formes symboliques.
On remarquera qu'on se trouve maintenant dans un cadre méthodologique proche de celui de Kant lorsqu'il explique que l'arithmétique est constituées d'énoncés synthétiques a priori. Selon lui, les énoncés de l'arithmétique sont synthétiques car il sont enracinés

dans notre expérience via le temps, qui est une forme de l'intuition. Par ailleurs, ils sont a priori, car le temps est une condition nécessaire de toute intuition, ie il est une forme a priori de l'intuition.

Si on conçoit la tautologie comme plus haut, on voit qu'elle se comporte comme comme un énoncé synthétique a priori, la forme symbolique fonctionnant comme le temps. En effet, une tautologie est (pour ainsi dire) synthétique car elle est enracinée dans un présupposé tacite et elle est a priori car elle ne dit rien et le fait qu'elle ne dit rien est lié au fait que notre connaissance est forcément symbolique, ie que la forme symbolique est une forme a priori de notre intuition.

Si on présente la théorie des ensembles et par delà l'ensemble des mathématiques comme une forme symbolique, on est forcé de mettre la connaissance mathématique sur le même pied que le reste de la connaissance humaine. Il n'est pas possible de lui donner un statut privilégié et d'un point de vue épistémologique elle ne se distingue plus des sciences ou même des arts.

Nous allons examiner plus avant cette conséquence, qui peut sembler un peu saugrenue.

Voici un extrait de l'essai de S. Bochner 'Myth, Mathematics, Knowledge', qui nous semble intéressant dans ce contexte.

'We will proceed from a quotation :

"Mathematics is a form of poetry which transcends poetry in that it proclaims a truth ; a form of reasoning which transcends reasoning in that it wants to bring about the truth it proclaim ; a form of action, of ritual behaviour, which does not find fulfillment in the act but must proclaim and elaborate a poetic form of truth."

This appealing sentence is not my own ; I wish it were. It is taken from a book on the awakening of intellectuality in Egypt and Mesopotamia [...] However in the book from which it is taken, the sentence is a pronouncement not on mathematics but on myth.'

et plus bas :

'The similarity between mathematics and myths is grounded in a certain similarity of articulation ; mathematics and myths both speak in "symbols", recognizably so, [...] Symbols in myths are very different from symbols in mathematics, but they are symbols all the same.[...] neverthelesss, even in myths, symbols, may be charged, intentionally or half-intentionally, with ambivalences, whereas in mathematics they must no so be. [...] The potency of our mathematics today derives from the fact that its symbolization is cognitively logical and, what is decisive, operationally active and fertile ; myths however, from our retrospect, were always backward-directed, and their symbolizations were always reminiscingly anthropological and operationally inert.'

Ces passages de l'essai de Bochner vont tout à fait dans le sens d'une interprétation des mathématiques comme une forme symbolique. En effet, il réfère aux trois moments de la forme symbolique : voir 'a form of action, of ritual behaviour' pour la phase expressive, 'symbols, may be charged, ..., with ambivalences, whereas in mathematics they must not be so', pour la phase représentative, 'symbolization is cognitively logical, ..., operationally active' pour la phase sémantique. Par ailleurs, il remarque une analogie profonde entre mythologie et mathématiques : il n'est donc pas question ici de voir les mathématiques comme une activité épistémologiquement disjointe du reste de l'activité cognitive. Bochner décrit les mathématiques comme une forme symbolique ayant accompli ses trois mouvements alors que la mythologie est décrite comme une forme symbolique qui n'a pas encore atteint le stade sémantique ('symbolizations [...] reminiscingly anthropological and operationally inert'). Je ne suis d'ailleurs pas d'accord avec Bochner sur ce dernier point.

Il me semble que le texte de Bochner, et par delà, l'interprétation des mathématiques comme forme symbolique est compatible avec l'expérience du mathématicien engagé dans la recherche. Ce dernier (je m'appuie ici partiellement sur ma propre expérience) a affaire à des objets dynamiques et il est mu par un sentiment très contraignant de vérité et de réalité ; les symboles et la logique utilisés sont fertiles, car engagés dans une réalité touffue. On est bien loin ici de la description des mathématiques comme un palais de cristal.

L'analogie entre mythologie et mathématiques me semble aussi intéressante car elle permet d'illustrer de manière convaincante ce que contribue l'interprétation des mathématiques comme forme symbolique à la question : 'de quoi parle-t-on en mathématiques' ?

En effet, dans cette interprétation, les énoncés mathématiques, qui sont de nature tautologique, ne parlent de rien mais pourtant ils disent quelque chose de fondamental car ils représentent le dernier moment d'une connaissance symbolique.

Cette force non-dite des énoncés mathématiques est particulièrement visible dans les conjectures : en effet, l'auteur d'une conjecture propose un énoncé sans pouvoir le justifier. En pratique, le mathématicien qui propose une conjecture tentera de la justifier par des arguments liés à l'histoire du sujet dans lequel il travaille (par ex. il allèguera qu'on ne connaît pas de contre-exemples, ou que cette conjecture explique beaucoup d'exemples connus) mais en dernier ressort, le fait de proposer la conjecture n'est pas mathématiquement justifié. Le fait que les mathématiciens veuillent proposer des énoncés comme tautologies possibles montre tout le prix qu'ils attachent à cette notion.

Il me semble maintenant qu'il y a une analogie profonde entre conjecture en mathématiques et mythe. En effet, dans les deux cas, il s'agit de quelque-chose qui est dit et qui n'est pourtant pas l'objet même du discours. Dans le cas d'une conjecture, ou encore d'un théorème important, ce non-dit ne réside en effet pas dans le contenu de l'énoncé, qui est en fin de compte vide. Dans le cas du mythe, le contenu même de la narration est aussi en fin de compte vide, car il ne s'agit pas pour le narrateur d'un mythe de rapporter des événements qu'il a directement vécus. La narration a un empire sur l'auditeur qui ne dépend pas d'une simple relation que l'on pourrait établir entre cette dernière et une certaine réalité empirique. Il me semble ainsi que pour comprendre le pouvoir de fascination d'une conjecture mathématique, il est fructueux de songer au pouvoir de fascination d'un mythe. Cette analogie permet aussi de donner une réponse plus séduisante à celui qui demande de quoi parle les mathématiques - on peut le renvoyer à la littérature : de quoi parle-t-elle, après tout ?

Dans le contexte de cette analogie entre mythe et conjecture mathématique, je voudrais citer le texte suivant de Grothendieck au sujet de la conjecture de Hodge, qui à mon sens, illustre bien mon propos :

'Dix choses soupconnées seulement, dont aucune (la conjecture de Hodge disons) n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, acquièrent dans cette harmonie force de vision. Alors même que toutes les dix finiraient par se révèler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain, et l'harmonie qu'il nous a fait entrevoir et qu'il nous a permis de pénétrer tant soit peu n'est pas une illusion, mais une réalité, nous appellent à la connaître. Par ce travail, seulement, nous avons pu entrer en contact intime avec cette réalité, cette harmonie cachée et parfaite.. . . '