Séance 2 : Classification des solutions stationnaires. Convergence des solutions de l'équation instationnaire.

Rappel. On s'intéresse aux solutions de viscosité de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{T}^N. \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \quad (HJ)$$

1. Le problème de Cauchy pour (HJ) est bien posé ; sa solution est :

$$u(t,x) = \mathcal{S}(t)u_0 \underset{\text{(Lax-Oleinik)}}{=} \inf_{\gamma(t)=x} \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds \right)$$

où l'inf est pris sur tous les chemins C^1 par morceaux. Cet inf est un min, atteint sur une ~~soluti~~ extrémale $\gamma(t)$: C^∞

2. Il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le pb

$$\begin{cases} H(x, D\phi) = \lambda. \\ x \in \mathbb{T}^N \end{cases}$$

a des solutions. En syst. dynamiques on les appelle ("KAM faible", terminologie introduite par Albert Fathi).

Quitte à remplacer H par $H-\lambda$, on peut supposer $\lambda = 0$. Nous avons vu qu'il pouvait y avoir beaucoup de solutions stationnaires, même si on retire les constantes.

Plan et préoccupations de la séance.

I). Classification des solutions stationnaires

II). Convergence vers des solutions stationnaires.

I]. Classification des solutions stationnaires.

On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} H(x, D\Phi) = 0. \\ x \in \mathbb{T}^N. \end{cases}$$

On suppose qu'elle a des solutions stationnaires, et on cherche à savoir s'il existe un ensemble $\mathcal{M}_0 \in \mathbb{T}^N$ ~~tel~~ tel que :

si l'on connaît Φ sur $\mathcal{M}_0$, alors on connaît Φ partout.

On bien encore un ensemble $\mathcal{M}_0$ pour lequel le pb de Dirichlet

$$\begin{cases} H(x, D\Phi) = 0 \\ x \in \mathbb{T}^N \setminus \mathcal{M}_0 \end{cases}$$

a <u>au plus</u> une solution.

Nous allons voir qu'une chose appelée "ensemble d'Aubry-Mather" répond à la question.

La construction sera assez abstraite (quoique appuyée par des exemples). Toutefois elle s'appuie sur une idée très naturelle.

Soit à resoudre l'équation

$$A(x) . \nabla u = 0 ; \quad x \in \Omega$$

$\Omega = \mathbb{T}^N$ ou un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

à voir en fin de section plutôt.

($\mathcal{E}x$: $v f_x + V(x) . f_v = 0 \ldots$)

(avec, éventuellement, des conditions aux limites).

On sait qu'une solution C^1 est déterminée par son comportement sur les caractéristiques :

$$\dot{X}_t = A(X_t) .$$

On a $u(X_t)$ ne dépend pas de t.

- ou bien X_t rencontre la frontière de Ω. Dans ce cas, on connaît u sur tte la caractéristique.
- ou bien X_t reste à l'intérieur de Ω. Alors une façon de connaître u sur Ω est de la connaître sur l'attracteur de X_t.

C'est cette idée très simple qu'on va formaliser ici.

On part de la constatation suivante : soit ϕ solution stationnaire, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N :$$

$$\phi(x) = \inf_{\gamma(t)=x} \left(\phi(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds \right)$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N :$$

$$\phi(x) = \inf_{\gamma(0)=x} \left(\phi(\gamma(-t)) + \int_{-t}^0 L(\gamma, \dot\gamma)\, ds \right)$$

L' inf est atteint sur une extrémale $(\gamma(t))_{-t\leq s\leq 0}$ qui est C^∞. On dit que

$\boxed{\gamma \text{ est calibrée par } \phi \text{ sur } [-t,0]}$.

<u>prop.</u> $\forall (\sigma,\sigma')\in[-t,0]^2$, $\sigma<\sigma'$:

$$\phi(\gamma(\sigma)) = \phi(\gamma(\sigma')) + \int_\sigma^{\sigma'} L(\gamma,\dot\gamma)\,d\sigma''.$$

<u>preuve.</u>

$$\phi(\gamma(0)) = \phi(\gamma(-t)) + \int_{-t}^{0} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds.$$

$$\phi(\gamma(0)) \leq \phi(\gamma(\sigma)) + \int_{\sigma}^{0} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds.$$

$$\phi(\gamma(\sigma)) - \phi(\gamma(-t)) \geq \int_{-t}^{\sigma} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds.$$

Or : $\phi(\gamma(\sigma)) \leq \phi(\gamma(-t)) + \int_{-t}^{\sigma} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds$

par définition.

Donc : $\forall \sigma,\ \phi(\gamma(\sigma)) = \phi(\gamma(-t)) + \int_{-t}^{\sigma} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds$. ◻

On considère, pour $a>0$ et $b>0$:

$$A^\phi_{a,b} = \left\{ x\in\mathbb{T}^N : \begin{array}{l}\text{il existe } \gamma \text{ calibrée par}\\ \phi \text{ entre } -a \text{ et } b \text{ tq } \gamma(0)=x\end{array}\right\}.$$

<u>Th.</u> Il existe $C_{a,b}>0$ tel que $\phi\in C^{1,1}(A^\phi_{a,b})$, avec $\|D\phi\|_{Lip}\leq C_{a,b}$.

preuve. On utilise la proposition :

$$\forall \sigma \in [-a, b],\ \phi(\gamma(\sigma)) = \phi(\gamma(b)) - \int_\sigma^b L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{T}^N$ et pour toute courbe $\tilde\gamma$ telle que $\tilde\gamma(\sigma) = y$ on a :

$$\phi(y) \geq \phi(\tilde\gamma(b)) - \int_\sigma^b L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

Il en resulte alors (voir séance 1, II) que ϕ est semi-convexe sur $A^\phi_{a,b}$. Or ϕ semi-concave partout. Donc $\phi \in C^{1,1}(A^\phi_{a,b})$. ▨

On note alors :

$A^\phi = A^\phi_{-\infty,1}$; i.e : l'ensemble des points $x \in \mathbb{T}^N$ par lesquels passe une courbe γ calibrée par ϕ sur $]-\infty, 1]$, i.e :

$\forall (\sigma, \sigma') \in]-\infty, 1] : \sigma < \sigma'$:

$$\phi(\sigma') = \phi(\sigma) + \int_\sigma^{\sigma'} L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

On note le

Lemme. $A^\phi \neq \emptyset$; A^ϕ fermé.

preuve. Il existe $c > 0$ tel que : $\forall T > 1$, pour toute courbe γ calibrée par ϕ entre $-T$ et 1 :

$$|\dot{\gamma}| \leq C .$$

En effet, γ est une extrémale minimisante sur chaque sous-intervalle de $[-T, 1]$.

Donc A^ϕ contient les limites simples uniformes des courbes calibrées par ϕ entre $-T$ et 0, telles que $\gamma(0) = x$.

<u>Fermeture</u> : utiliser le fait que $\phi(\gamma(\sigma)) = \phi(\gamma(\sigma')) + \int_{\sigma'}^{\sigma} L(\gamma, \dot{\gamma})\, ds$. ▨

– <u>Définition de $S_\phi(t)$</u>.

Soit $x \in A^\phi$; soit γ tel que $\gamma(0) = x$.

<u>Lemme</u>. γ est la seule extrémale calibrée par ϕ, passant par x, définie sur $]-\infty, 0]$.

<u>Preuve</u>. ϕ est différentiable et de dérivée lipschitz le long de γ. Donc nous avons, le long de γ : ~~$D\phi(\gamma($~~ $D\phi(\gamma(s)) = L_v(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))$.

Donc $\dot{\gamma}(s) = H_p(\gamma(s), D\phi(\gamma(s)))$.

~~Sur une~~ Ceci est valable pour toute courbe

γ, définie sur $]-\infty, 1]$, telle que $\gamma(0) = x$. Puisque $D\phi$ est lipschitz (avec dérivée contrôlée) sur ces deux courbes, on est ramené à Cauchy - lipschitz ! $\boxtimes$

⚠ $D\phi$ n'est bien entendu PAS lipschitz partout ; donc on ne peut pas définir le flot du champ $D\phi$. On construit d'abord les courbes qui nous intéressent, puis on s'aperçoit que $D\phi$ est lipschitz dessus.

<u>Conséquence</u> - On peut définir $S_\phi(t)\big|_{t\leq 0}$ par : si $x \in A^\phi$; $x = \gamma(0)$, alors $S_\phi(t)x = \gamma(t)$. Il s'agit bien d'un système dynamique.

<u>def.</u> $\alpha_\phi(x) = \{ y \in A^\phi : \exists\, t_n \to -\infty \,/\, S_\phi(t_n) \to y \}$.

C'est un compact connexe de $\mathbb{T}^N$.

On définit alors : $\mathcal{M}_\phi = \overline{\bigcup_{x \in A^\phi} \alpha_\phi(x)}$. ← probablement inutile

$\mathcal{M}_0 = \bigcap_{\phi \text{ solution}} \mathcal{M}_\phi$. (ens. d'Aubry-Mather)

<u>Quel est ce monstre ?</u> On s'est aperçu (bis repetita) qu'une sol. stat. est régulière le long de cbes

caractéristiques (en fait, des extrémales minimisantes ~~qui la calib~~ qu'elle calibre), et qui vérifient

$$\dot X = H_p(X, D\phi(X)).$$

Ce n'est PAS un champ de vecteurs lipschitz partout, mais en tout cas sur l'ensemble des courbes calibrées par ϕ, ce qui fait quand même pas mal de monde...

Poursuivant l'analogie avec l'hyperbolique ~~—~~ linéaire on introduit l'α-limite de chaque trajectoire. Et, pour ne pas faire de jaloux, on prend l'intersection de tous...

<u>Th.</u> (essentiellt dû à A. Fathi). $\mathcal{M}_0$ est un ensemble d'unicité pour $H = 0$.

Avant de démontrer ce résultat, il est bon de s'assurer qu'on ne parle pas du vide.

<u>Lemme</u>. Soit ψ une autre solution de $H(x, D\psi) = 0$ et $\gamma \in \mathcal{M}_\phi$.
Alors $s \longmapsto \phi(\gamma(s)) - \psi(\gamma(s))$ est $\downarrow$.

<u>Preuve.</u> $\phi(\gamma(s)) = \phi(\gamma(s')) + \int_{s'}^{s} L(\gamma,\dot\gamma)\,d\sigma$

<u>$s' \leq s$</u>. $\psi(\gamma(s)) \leq \psi(\gamma(s')) + \int_{s'}^{s} L(\gamma,\dot\gamma)\,d\sigma$

$\varphi(\gamma(s)) - \psi(\gamma(s))$

$\leq \varphi(\gamma(s')) - \psi(\gamma(s'))$. ▨

<u>Conséquence.</u> Soit $y \in \alpha_\phi(x)$ et $\mu(t) = S_\phi(t)y$.

Soit $s_n \to -\infty$ tel que $S_\phi(s_n)x$

$(= \gamma(s_n)) \to y$.

La suite $(\varphi(\gamma(s)) - \psi(\gamma(s_n)))_n$ converge.

Il en résulte que : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$\psi(S_\phi(t)) = \psi(S_\varphi(t')) + \int_{t'}^{t} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds$.

($S_\varphi(t)$ calibre ψ).

Et donc, si $z \in \alpha_\phi(y)$, alors $z \in \mathcal{M}_\psi$.

Donc $\mathcal{M}_0$ non vide.

Ceci donne aussi la preuve du théorème.

Soit en effet $\psi(x)$ solution de $H(x, D\psi) = 0$

et $z \in \mathcal{M}_0$. Nous avons :

$\phi(x) - \psi(x) \leq \varphi(z) - \psi(z)$.

Si donc $\varphi = \psi$ sur $\mathcal{M}_0$, nous avons $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Echangeant les roles de φ et ψ nous avons en fait $\varphi \equiv \psi$.

8b. Caractérisation explicite de $\mathcal{M}_0$? En général c'est peine perdue. Nous allons voir que ça peut être n'importe quoi. (Donc pas de propriétés sympathiques du type régularité de la frontière, etc...).

Exemple 1. $H(x,p) = |p|^2 - f(x)$; $f \geq 0$; $\{f = 0\} \neq \emptyset$. $L(x,v) = \frac{|v|^2}{4} + f(x)$

(coeff négociable, pas le signe devant $f(x)$ ...). Une extrémale calibrée par ϕ vérifie :

$$\phi(\gamma(0)) = \phi(\gamma(-t)) + \int_{-t}^{0} \left(\frac{|\dot\gamma|^2}{4} + f(\gamma) \right) ds$$

Or ϕ est bornée. Donc l'intégrale

$$\int_{-t}^{0} \left(\frac{|\dot\gamma|^2}{4} + f(\gamma) \right) ds \quad \text{converge.}$$

Donc $\dot\gamma \to 0$.

$f(\gamma) \to 0$.

Donc $\mathcal{M}_0 \subset \{f=0\}$. D'autre part tout zéro de f définit une extrémale globale ; donc $\mathcal{M}_0 = \{f=0\}$.

<u>Exemple 2</u>. $H(x,p) = (p+\alpha(x))^2 - \beta(x)$; $\beta > 0$.

Cherchons à quelle condition $H(x,u') = 0$ peut avoir des sol. périodiques régulières.

Essayons $u' = \sqrt{\beta(x)} - \alpha(x)$, soit

$$\int_0^1 (\sqrt{\beta} - \alpha)\, dx = 0.$$

$$\longrightarrow \lambda = 0.$$

Equation des extrémales :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= H_p(X, D\phi(X)) \\ &= H_p(X, \sqrt{\beta(X)} - \alpha(X)). \\ &= 2\left(\sqrt{\beta(X)}\right). \end{aligned}$$

Si donc $\beta > 0$, $\mathcal{M}_0 = \mathbb{T}^1$.

<u>Exercice</u> - Caractériser $\mathcal{M}_0$ pour un hamiltonien strictement convexe sur $\mathbb{T}^1$. Montrer en particulier que :

- ou bien $\lambda = \sup H(x,0)$ et on

est sur l'exemple 1 ;

- ou bien $\lambda > \max_p H(x,0)$ et on est sur l'exemple 2.

<u>Exemple 3</u>. $H(x,p) = \frac{|p|^2}{2} + p\cdot X(x)$; $X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ champ de vecteur.

- 0 solution stationnaire, donc $\lambda = 0$.
- $L(x,v) = |v - X(x)|^2$; si γ est tracée sur $\mathcal{M}_\phi$:

$$\phi(\gamma(0)) = \phi(\gamma(-t)) + \int_{-t}^{0} |\dot\gamma - X(\gamma)|^2 \, ds.$$

Là encore, l'intégrale a intérêt à converger...

On récupère, in fine, pour $\mathcal{M}_0$: tout l'attracteur du champ X.

<u>Conclusion de cette partie</u>. On vient de classifier les solutions stationnaires via un ensemble d'unicité, sur lequel ttes les sol. sont $C^{1,1}$. Il y a d'autres ens. d'unicité raisonnables (i.e. pas trop gros). Pour l'instant on s'intéresse au comport^t $t \to \infty$ du pb de Cauchy.

II) Convergence vers des solutions stationnaires.

On suppose toujours que $H = 0$ a des solutions.

Th. $u_0 \in C(\mathbb{T}^N)$. Alors $S(t)u_0$, la solution de
$$\begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0 \\ \quad x \in \mathbb{T}^N \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$
converge, quand $t \to +\infty$, vers une sol. de $H = 0$.

Il existe plusieurs preuves de ce résultat. Celle qu'on va donner s'appuie sur le fait que $S(t)u_0$ est solution de viscosité de (HJ). Le résultat s'appuie sur le th. suivant, de type Liouville.

Th. Soit $u(t, x)$ une solution globale (i.e. $-\infty < t < +\infty$) de $u_t + H(x, Du) = 0$. Alors u est une solution stationnaire de (HJ).

Ce théorème entraîne la convergence. En effet, soit

$$\omega(u_0) = \{ \psi \in C(\mathbb{T}^N) : \mathcal{S}(t_n)u_0 \longrightarrow \psi \} .$$

$\omega(u_0)$ est un compact connexe de $C(\mathbb{T}^N)$ (résultat de la régularisation en tps fini...). De plus, si $\psi \in \omega(u_0)$, $\mathcal{S}(t)\psi$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$.

Donc $\exists\, \phi$ solution de $\{H = 0\}$ telle que $\phi = \psi$. La propriété de contraction implique :

~~$S(t)$~~ $\mathcal{S}(t)u_0 \longrightarrow \phi$.

Reste à montrer le ~~lemme~~ théorème de Liouville !

1. Calcul formel.

Soit ϕ solution stationnaire ; imaginons (Absurde mais admettons ...) $\phi \in C^1(\mathbb{T}^N)$.

$u(t) = \mathcal{S}(t)u_0$; $\quad v(t) = u(t) - \phi$;

$$v_t + H(x, D\phi + Dv) = 0 .$$

Transformée de Kruzhkov : $w = -e^{-v}$;

$$w_t + F(x, w, Dw)$$

avec : $F(x, w, p) = -H\left(x, D\phi + \dfrac{Dw}{-w}\right) w$.

$$q = w_t ;$$

$$q_t + F_p \cdot Dq + F_w\, q = 0 .$$

$$F_w = H_p\left(x, D\phi + \frac{p}{-w}\right) \cdot \frac{p}{-w} - H\left(x, D\phi + \frac{p}{-w}\right).$$

Or, si $K(p)$ est un hamiltonien strictement convexe :

$$K(0) = K(p) - p \cdot K_p(p) + K_{pp}(qqc) \cdot p^{(2)} .$$

Si $K(0) = 0$, $p \cdot K_p - K \geq C\,|p|^2$.

Donc il y a de l'espoir (terme d'absorption ≥ 0).

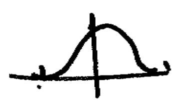
<u>Problème</u> : dans $q_t + F_p \cdot Dq + F_w\, q = 0$, rien n'est défini ...

2. <u>Preuve rigoureuse.</u>

On va utiliser un objet moins fragile qu'une dérivée temporelle, mais on va se servir de l'idée ci-dessus.

– Hamiltonien presque nul en 0.

$\varepsilon > 0$; $\phi_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon * \phi\,(x)$; ρ_ε : noyau de convolution classique $\frac{1}{\varepsilon^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; $\operatorname{supp}\rho = 1$.



$$H(x, D\phi_\varepsilon) = H\left(x, \int D\phi(x-y)\,\rho_\varepsilon(y)\,dy\right)$$

$$\underset{\text{(Jensen)}}{\leq} \int H(x, D\phi(x-y))\,\rho_\varepsilon(y)\,dy$$

$$= \int H(x-y, D\phi(x-y))\,\rho_\varepsilon(y)\,dy + O(\varepsilon)$$

$$= O(\varepsilon).$$

$v = u - \phi_\varepsilon$;

$$v_t + H(x, D\phi_\varepsilon + Dv) = 0$$

$$w = -e^{-v}.$$

$$w_t + F(x, w, Dw) = 0$$

avec :

$$F(x, w, p) = -H\left(x, D\phi_\varepsilon + \frac{p}{-w}\right) w$$

2° <u>paramètre de régularisation</u> : $\eta > 0$.

$$\mu_\eta^+(t) = \sup_{\substack{s \geq t \\ x \in \mathbb{T}^N}} \left(w(t,x) - w(s,x) - 2\eta(s-t)\right).$$

$$\mu_\eta^-(t) = \inf_{\substack{s \geq t \\ x \in \mathbb{T}^N}} \left(w(t,x) - w(s,x) + 2\eta(s-t)\right).$$

On a : $\mu_\eta^+(t) \geq 0$; $\mu_\eta^-(t) \leq 0$.

<u>Lemme</u>. On a, au sens de viscosité :

$$\mu_\eta^+ + \psi(\eta)\,\mu_\eta^+ \leq 0.$$
$$\mu_\eta^- + \psi(\eta)\,\mu_\eta^- \geq 0$$

pour un certain $\psi(\eta) > 0$ et pour $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

<u>Conséquence du lemme</u>.

On a $\mu_\eta^+ = \mu_\eta^- = 0$. On passe à la limite $\eta \to 0$; on obtient $w(t,x) = w(s,x)$.

<u>Preuve du lemme</u>.

Bien entendu, impossible de dériver μ_η^+ et μ_η^- ...

<u>Démo pour</u> μ_η^+. Soit $\left.\begin{matrix}\Phi(t)\\ t_0\end{matrix}\right\}$ telle que $\mu_\eta^+ - \Phi$ ait un point de max ($= 0$) en t_0. Soit (s_0, x_0) un point de max pour le sup donné par μ_η^+.

$$\Psi_{\varepsilon,\eta,\delta}(t,s,x,y) = w(t,x) - w(s,y) - 2\eta\,(s-t) + \frac{|x-y|^2}{2\delta^2} - \Phi(t).$$

Soit $(t_\delta, s_\delta, x_\delta, y_\delta)$ un point de minimum pour $\Psi_{\varepsilon,\eta,\delta}$.

• $\frac{|x_\delta - y_\delta|}{2\delta} \to 0$; $(t_\delta, s_\delta) \to (t_0, x_0)$.

• <u>Inégalités de viscosité.</u>

* Maximisation en (t,x) :

$$w(s,y) + 2\eta(s-t) + \frac{|y-x|^2}{2\delta^2} + \Phi(t)$$

est une fc! test. Donc

$$\Phi'(t_\delta) + F\left(x_\delta, w(t_\delta, x_\delta), \frac{x_\delta - y_\delta}{\delta^2}\right) - 2\eta \leq 0.$$

* Maximisation en (s,y) :

$$w(t,x) - 2\eta(s-t) + \frac{|x-y|^2}{2\delta^2}$$

est une fc! test. Donc

$$-2\eta + F\left(y_\delta, w(s_\delta, y_\delta), \frac{x_\delta - y_\delta}{\delta^2}\right) \geq 0.$$

La 1ère inégalité contient un bon terme : $\Phi'(t_\delta)$. On voudrait faire sortir un $\mu_\eta^+(t_\delta)$ de $F - 2\eta$.

• $\frac{|x_\delta - y_\delta|}{\delta^2} \leq C$ par la 2° inégalité.

Donc on peut remplacer y_δ par x_δ dans cette inégalité.

- $2\eta \longrightarrow F\left(x_\delta, w(s_\delta, x_\delta), \frac{x_\delta - y_\delta}{\delta^2}\right)$.

- $\frac{\partial F}{\partial w} = H_p\left(x, D\phi_\varepsilon + \frac{p}{-w}\right) \cdot \frac{p}{-w} - H\left(x, D\phi_\varepsilon + \frac{p}{-w}\right)$.

En oubliant l'argument x :

$$\underbrace{H(D\phi_\varepsilon)}_{\leq \varepsilon} = H\left(D\phi_\varepsilon + \frac{p}{-w}\right) - \frac{p}{-w} H_p\left(D\phi_\varepsilon + \frac{p}{-w}\right) + H_{pp}(qqc) \cdot \left(\frac{p}{-w}\right)^{(2)}.$$

donc $\frac{\partial F}{\partial w} \geq C\left(\left|\frac{p}{w}\right|^2 - \varepsilon\right)$

La 2° inégalité de viscosité donne $\left|\frac{p}{w}\right|^2 \geq \psi(\eta)$ dès que $\varepsilon \ll \eta$.

- $F\left(x_\delta, w(t_\delta, x_\delta), \frac{x_\delta - y_\delta}{\delta^2}\right)$
$$\longrightarrow F\left(x_\delta, w(t_\delta, x_\delta) - 2\eta(s_\delta - t_\delta), \frac{x_\delta - y_\delta}{\delta^2}\right).$$

car $\frac{\partial F}{\partial w} \geq 0$.

- On passe à la limite $\delta \to 0$. $\blacksquare$

Exercice. Une autre démonstration utilisant Aubry-Mather.

1. Candidat à la convergence.

$$\phi(x) = \liminf_{t\to+\infty} u(t,x) \; ; \; u(t,x) = \mathcal{T}(t)u_0.$$

Montrer que ϕ est solution de $H(x, D\phi) = 0$.

2. Bien entendu, ϕ n'est pas dans $\omega(u_0)$, sinon on aurait fini !

Soit $t \mapsto u(t, \gamma(t)) - \phi(\gamma(t))$, où γ est une courbe — par ex — tracée sur $\mathcal{M}_0$.
Montrer que c'est une fct $\downarrow$.

3. Soit $\psi \in \omega(u_0)$. Soit $\mathcal{N}_0 = \bigcup_{x\in\mathcal{M}_0} \omega_{S_\phi}(x)$.

Montrer que $t \mapsto \mathcal{T}(t)\psi - \phi$ est constante sur tte courbe tracée sur $\mathcal{N}_0$.

4. Montrer que $\mathcal{T}(t)\psi$ est $C^{1,1}$ sur $\mathcal{N}_0$.

En déduire que : $\forall x \in \mathcal{N}_0$,

$$\partial_t \left(\mathcal{T}(t)\psi - \phi\right)(x) = 0.$$

5. Montrer que $\mathcal{N}_0$ est un ens. d'unicité pour les solutions ω-limites de u_0.
En déduire $\phi \equiv \psi$.

Caractérisation de la limite.

Pour ceux qui préfèrent les équations linéaires on introduit la "fonction de Green" du pb : pour $t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N$:

$$h_t(y, x) = \inf_{\substack{\gamma(t)=x \\ \gamma(0)=y}} \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

Pour $t > 0$:
- h_t est bien définie.
- h_t est lipschitz en x, y.

En écrivant $\int_0^t = \int_0^1 + \int_1^t$ on obtient, pour $t > 1$: $h_t(y, x) = \mathcal{T}(\hat{t})\, h_1(y, x)$.

On obtient aussi, pour $t > 0$:

$$\mathcal{T}(t)u_0 = \inf_\gamma \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds \right)$$
$$= \inf_{y \in \mathbb{T}^N} \left(u_0(y) + h_t(y, x) \right).$$

Application de ce qui précède.

- $h_t(y, x)$ converge, uniformément en $(x, y) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N$, vers une limite

$h(y,x)$. Cette fonction h est lipschitz en y et x ; elle vérifie

$$H(x, D_x h) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^N \setminus \{y\}.$$

On l'appelle la "barrière de Peierls" du pb ; elle ne dépend que du hamiltonien h.

<u>Conclusion</u>. Soit ϕ la solution asymptotique au pb de Cauchy $\begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0. \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$

On a : $\forall y \in \mathbb{T}^N$,

$u(t,x) \leq u_0(y) + h_t(y,x)$; soit :

$\phi(x) \leq u_0(y) + h(y,x)$.

D'autre part soit, pour tout $t > 0$:

y_t réalisant

$u(t,x) = u_0(y_t) + h_t(y_t, x)$.

$t_n \to +\infty$ tq $y_{t_n} \to \bar{y}$.

Alors $\phi(x) = u_0(\bar{y}) + h(\bar{y}, x)$. Nous avons montré le th.

<u>Th</u>. $\lim_{t\to+\infty} S(t)u_0 = \inf_{y\in\mathbb{T}^N} (u_0(y) + h(y,x))$.