PRIX ET DISTINCTIONS

Le 6 août 2012, deux mathématiciennes françaises, Nalini Anantharaman et Sylvia Serfaty, ont reçu le prestigieux Prix Henri Poincaré (les deux autres lauréats étant F. Dyson et B. Simon) décerné par l'IAMP (International Association for Mathematical Physics).

Le lecteur de la Gazette *se souvient certainement d'un article*[1] *où Nalini Anantharaman et Stéphane Nonnenmacher décrivaient la problématique du chaos quantique. Les travaux de Sylvia Serfaty, quant à eux, n'avaient pas encore trouvé leur place dans la* Gazette. *C'est chose faite avec l'article ci-dessous de Bernard Helffer et Radu Ignat.*

Le prix Henri Poincaré pour Sylvia Serfaty

Bernard Helffer, Radu Ignat[1]

La citation du prix Henri Poincaré pour Sylvia Serfaty mentionne : « for the outstanding work in the theory of Ginzburg-Landau equation, including remarkable progress towards the rigorous proof of the onset of the Abrikosov lattice in the theory of superconductivity ». C'est pourquoi l'objet de cette note est de présenter très brièvement l'œuvre de Sylvia Serfaty en supraconductivité.

Le modèle le plus simple et accepté de tous a été proposé par Ginzburg-Landau (on ne discutera ici que le cas de la dimension 2). Il met en jeu une paire (ψ, A) définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe où ψ est une fonction d'onde à valeurs complexes et $A = (A_1, A_2)$ est un potentiel magnétique (c'est-à-dire un champ de vecteurs sur Ω). L'énergie de cette paire est calculée grâce à une fonctionnelle qui est, après renormalisation, définie par :

$$G_\varepsilon(\psi, A) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1 - |\psi|^2)^2 + |\operatorname{Rot} A - h_{ex}|^2 \right) dx. \tag{1}$$

Ici h_{ex} est un champ magnétique extérieur supposé constant (en dimension 2, on identifie les champs magnétiques à des fonctions scalaires sur Ω) et le champ $\operatorname{Rot} A = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ est alors appelé le champ magnétique induit. On note $\nabla_A \psi = \nabla\psi - iA\psi$ le gradient magnétique de ψ. Le paramètre $\varepsilon > 0$ est un paramètre effectif qui garde la trace des propriétés du matériau (les physiciens utilisent plutôt le paramètre $\kappa = \frac{1}{\varepsilon}$).

La littérature physique fait traditionnellement la distinction entre matériaux de type I correspondant à des grands ε et matériaux de type II correspondant aux

[1] *Gazette* des Mathématiciens, n° 119, janvier 2009.
[1] Université Paris-Sud.

petits ε. C'est dans ce deuxième régime que se situent les travaux que nous allons présenter. Mathématiquement, on regarde le comportement asymptotique des minimiseurs de G_ε dans la limite $\varepsilon \to 0$. Comme Ω est borné, l'existence de minimiseurs de G_ε (i.e. vérifiant l'infimum de la fonctionnelle) dans des espaces fonctionnels convenables est standard. Ces minimiseurs doivent vérifier les équations d'Euler-Lagrange qui dans ce contexte sont appelées les équations de Ginzburg-Landau (voir [S-JST], [DG], [GL]). Ils vont décrire les propriétés du matériau quand il est soumis au champ magnétique extérieur h_{ex}. Par exemple $|\psi(x)|^2$ mesure la densité de présence des paires d'électrons supraconducteurs.

On distingue trois types de minimiseurs. On dit qu'un minimiseur (ψ, A) est supraconducteur si ψ ne s'annule jamais, qu'il est « normal » si ψ s'annule identiquement et qu'il est mixte dans les autres cas. Plus finement, on pourra aussi distinguer deux cas d'états mixtes selon que, dans la limite ε petit, $|\psi|$ est petit ou non en dehors du bord. Cela a conduit les physiciens à introduire (au moins) trois champs critiques dont on admettra (ce qui est essentiellement vrai dans ce régime) qu'ils apparaissent successivement quand on augmente h_{ex} à partir de 0. Lorsque h_{ex} est assez petit, le minimiseur est supraconducteur (pour $h_{ex} = 0$, on voit que $\psi = 1$ et $A = 0$ est solution) ; une propriété remarquable est qu'alors le champ magnétique induit est pratiquement nul dans Ω (quand $\varepsilon \to 0$) qui explique dans certaines applications spectaculaires l'effet de lévitation. Le premier champ critique noté $H_{c_1}(\varepsilon)$ correspond à la valeur de h_{ex} pour lequel il y aura une transition entre minimiseurs supraconducteurs et minimiseurs mixtes. En d'autres termes, ψ commence à avoir des zéros (appelés aussi vortex). Leur nombre croît avec h_{ex} et ils tendent à s'arranger sur un réseau triangulaire, appelé réseau d'Abrikosov. Pour h_{ex} plus grand la distribution de vortex est tellement dense qu'ils se croisent uniformément couvrant tout le domaine, i.e, $\psi = 0$ partout et l'état supraconducteur est perdu. Le minimiseur tend à devenir « normal ».

Reprenons la discussion à partir de h_{ex} extrêmement grand. On peut montrer alors que le minimiseur est normal et que le champ magnétique induit est égal à h_{ex}. Quand on décroît h_{ex}, le troisième champ critique $H_{c_3}(\varepsilon)$ est alors défini comme le premier pour lequel le minimiseur n'est plus normal. Il s'agira au départ d'une apparition timide au bord de Ω (supraconductivité de surface), jusqu'à ce que pour un champ critique $H_{c_2}(\varepsilon)$ le minimiseur devienne significativement non-nul dans un sous-ensemble de Ω (dans le régime ε petit).

Un des objectifs de l'étude sera de donner les asymptotiques de ces champs critiques prédites par les physiciens :

$$H_{c_1}(\varepsilon) \sim \lambda_\Omega |\log \varepsilon|\,,\ H_{c_2}(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^2\,,\ H_{c_3}(\varepsilon) \sim \beta_0/\varepsilon^2\,, \tag{2}$$

et d'interpréter λ_Ω et β_0 (qui vérifie $\beta_0 > 1$).

Plus généralement, il s'agit donc de comprendre mathématiquement tous ces phénomènes décrits par les physiciens (dont beaucoup furent nobélisés). L'étude du régime h_{ex} situé près de $H_{c_3}(\varepsilon)$ est présentée dans [FoHe]. Les travaux d'E. Sandier et S. Serfaty analysent ce qui se passe entre $H_{c_1}(\varepsilon)$ et $H_{c_2}(\varepsilon)$. La première partie de leurs travaux est décrite dans leur livre [SaS3] mais l'histoire était loin d'être terminée et beaucoup d'autres travaux ont suivi.

Mais pour revenir au début de l'histoire, au delà de la détermination de l'asymptotique du premier champ critique, il s'agissait de comprendre le mécanisme d'apparition de ces vortex et leur influence sur la valeur de l'énergie. Ensuite la question plus complexe est de déterminer leur localisation et de trouver des fonctionnelles ou des mesures qui en expliquent la répartition. Les travaux en physique sur cette question commencent dans les années 50 mais ce n'est que dans les années 90 que les chercheurs en analyse non-linéaire ont commencé à s'intéresser au problème. On peut citer en France C. Bolley, M. Schatzman et surtout tout un groupe à Jussieu autour de H. Brezis qui a commencé à développer des outils pour analyser les vortex. Le livre de Bethuel-Brezis-Hélein [BBH] rend bien compte de ces travaux. Dans le modèle étudié, il n'y avait pas de champ magnétique et la création des vortex était un effet d'une condition de Dirichlet non homogène au bord. Typiquement, si la donnée au bord a un degré topologique $d > 0$, alors un minimiseur présente d vortex de degré 1 répartis uniformément dans Ω (par exemple, si d pas très grand, ils forment des polygones réguliers concentriques). Il n'y avait rien d'évident à ce que ces travaux s'appliquent au cas avec champ magnétique dans le régime ε petit. C'est tout le mérite d'E. Sandier et S. Serfaty d'avoir pu contrôler le nombre de vortex des minimiseurs de l'énergie G_ε et montrer qu'ils étaient répartis sur un réseau triangulaire d'Abrikosov dans le régime $H_{c_1}(\varepsilon) < h_{ex} \ll H_{c_2}(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0. Pour cette analyse, les méthodes topologiques de concentration asymptotique de l'énergie trouvent leur origine dans le livre pionnier de [BBH]. Elles ont été beaucoup étendues en particulier par Jerrard et Soner [Je, JS] puis par Sandier et Serfaty [Sa, SaS3]. L'outil principal est donné par la *vorticité* associé à une configuration (ψ, A) :

$$\mu(\psi, A) = \mathrm{Rot}\, j(\psi, A) + \mathrm{Rot} A\,, \quad \text{où} \quad j(\psi, A) =< i\psi, \nabla_A \psi >$$

est le courant superconducteur. Ici $< \cdot, \cdot >$ représente le produit scalaire dans $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ et si on écrit $\psi = \rho e^{i\varphi}$, on a

$$j(\psi, A) = \rho^2 (\nabla \varphi - A)$$

là où $\rho \neq 0$. En effet, $\mu(\psi, A)$ correspond à une invariance de jauge du déterminant jacobien de ψ. On entend par là que

$$\mu(e^{i\theta}\Psi, A + \nabla\theta) = \mu(\Psi, A)\,.$$

Si $A = 0$, on notera que

$$\mu(\psi, A) = \mathrm{Rot} j(\psi, A) = 2 \det \nabla \psi\,.$$

Les estimées du jacobien (voir [JS, SaS3]) montrent que la vorticité $\mu(\psi, A)$ d'un minimiseur[2] de G_ε est approchée par une mesure de la forme $2\pi \sum_j d_j \delta_{a_j}$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (où δ_a désigne la masse de Dirac en a). Les points a_j sont appelés vortex de ψ (comme points de concentration de la vorticité) et les entiers d_j représentent le degré topologique de a_j. Plus précisément, un vortex est un objet centré en un zéro

[2] Si (ψ, A) est un minimiseur de G_ε, alors l'équation Euler-Lagrange associée à G_ε implique que le courant superconducteur j satisfait $j(\psi, A) = -\nabla^\perp \mathrm{Rot} A$, où pour une fonction b, $\nabla^\perp b = (-\partial_2 b\,, \partial_1 b)$.

isolé a_j de ψ autour duquel il y a une circulation de phase, c'est-à-dire un degré $d_j \neq 0$; quand ε est petit, on déduit par (1) que $|\psi|$ est proche de 1 en dehors d'une région de taille ε autour de a_j où l'énergie G_ε est quantifiée d'ordre au moins $\pi|d_j||\log\varepsilon|$.

Afin de déterminer la distribution des vortex, un développement asymptotique de l'énergie Ginzburg-Landau est nécessaire dans la limite $\varepsilon \to 0$. La description du champ moyen (i.e., l'analyse au premier ordre de l'énergie) montre que les vortex tendent à être répartis uniformément dans un sous-domaine de Ω, mais que le terme principal du développement de l'énergie ne dépend pas de la distribution exacte des vortex. Expliquons plus précisément ce phénomène quand les vortex commencent à nucléer, i.e. dans le régime

$$h_{ex} = \lambda|\log\varepsilon|,$$

où $\lambda \geqslant \lambda_\Omega$ et $\lambda_\Omega > \frac{1}{2}$ est le coefficient apparaissant dans (2).

Sandier et Serfaty montrent qu'il existe un ouvert $\omega_\lambda \subset \Omega$ tel que tout minimiseur $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ de G_ε satisfait à

$$\frac{\mu(u_\varepsilon, A_\varepsilon)}{h_{ex}} \to \mu_\lambda \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{Rot} A_\varepsilon}{h_{ex}} \to h_\lambda \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

où la vorticité limite μ_λ est une mesure de support ω_λ uniformément continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx restreinte à ω_λ :

$$\mu_\lambda = (1 - \frac{1}{2\lambda})\mathbf{1}_{\omega_\lambda} dx$$

et la fonction limite h_λ est la solution minimisante d'un problème d'obstacle associé à la vorticité, i.e.,

$$-\Delta h_\lambda + h_\lambda = \mu_\lambda \quad \text{dans } \Omega, \quad h_\lambda = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3}$$

L'ouvert ω_λ est vide si $\lambda < \lambda_\Omega$ et génériquement, ω_λ est réduit à un point lorsque $\lambda = \lambda_\Omega$, puis l'aire $|\omega_\lambda|$ augmente avec λ ; dans le cas d'un disque Ω centré en origine, ω_λ est un sous-disque centré en origine. Dans ce contexte, l'énergie minimale au premier ordre s'écrit

$$G_\varepsilon(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \sim \frac{1}{2} h_{ex}|\log\varepsilon'| \int_\Omega \mu_\lambda + \frac{h_{ex}^2}{2}\int_\Omega |\nabla h_\lambda|^2 + |h_\lambda - 1|^2 \tag{4}$$

modulo un reste d'ordre $o(h_{ex}|\log\varepsilon'|)$, où $\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{h_{ex}}$ est une correction de la taille d'un vortex.

Ces résultats restent vrais dans le régime plus général $H_{c_1}(\varepsilon) < h_{ex} \ll H_{c_2}(\varepsilon)$ en considérant $\lambda = +\infty$, i.e., $\omega_\lambda = \Omega$, $\mu_\lambda = \mathbf{1}_\Omega\, dx$ et $h_\lambda = 1$.

Pour expliquer l'optimalité du réseau triangulaire d'Abrikosov, Sandier & Serfaty [SaS4] arrivent à caractériser le deuxième ordre de l'énergie G_ε qu'ils étudient par un argument d'éclatement (« blow-up ») à l'échelle de la distance entre les vortex d'ordre $1/\sqrt{h_{ex}}$. Après avoir effectué le blow-up et avoir soustrait la moyenne macroscopique de la vorticité μ_λ, l'équation (3) correspond dans la limite $\varepsilon \to 0$ à :

$$-\Delta H + (1 - \frac{1}{2\lambda}) = 2\pi \sum_{a\in\Lambda} \delta_a \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

où Λ est une configuration discrète de points du plan $\mathbb{R}^2$ et la mesure de vorticité devient localement une véritable somme de masses de Dirac (chacune de degré topologique 1).

Le terme d'ordre deux de l'énergie minimale $G_\varepsilon(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ s'écrit [3]

$$h_{ex}|\omega_\lambda|\big(W(\nabla H) + \gamma\big),$$

modulo un reste d'ordre $o(h_{ex})$, où γ est une constante universelle qui représente l'énergie du profil radial d'un vortex de degré 1.

Expliquons maintenant l'*énergie renormalisée* $W(\nabla H)$ qui gouverne la position des vortex associés à la vorticité $2\pi \sum_{a\in\Lambda} \delta_a$. Elle est plus précisément définie comme une limite :

$$W(\nabla H) = \limsup_{R\to\infty} \frac{W(\nabla H, \chi_{B_R})}{|B_R|}$$

où χ_{B_R} est une fonction de troncature (arbitraire) de support compact [4] dans la boule $B_R \subset \mathbb{R}^2$ de rayon R et

$$W(\nabla H, \chi_{B_R}) = \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\cup_{a\in\Lambda}B(a,\eta)} \chi_{B_R}|\nabla H|^2\,dx + \pi|\log\eta|\sum_{a\in\Lambda}\chi_R(a)\right).$$

Cette dernière formule est justifiée par le fait que chaque vortex $a \in \Lambda$ correspond à une singularité logarithmique de H et donc, $|\nabla H|^2$ n'est pas intégrable. Dans le cas d'un ensemble Λ périodique par rapport à un réseau $\mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$, identifié par n points $\{a_1, \dots, a_n\}$ sur le tore $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v})$, alors l'expression de l'énergie renormalisée s'écrit :

$$W(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq k} H_0(a_j - a_k) + nc_0$$

où H_0 est la fonction de Green sur $\mathbb{T}_0$, i.e. solution de

$$-\Delta H_0 = 2\pi\delta_0 - 1$$

dans $\mathbb{T}_0$ et c_0 est une constante (qui dépend de $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Le premier terme de W représente les interactions coulombiennes entre les vortex. Sandier & Serfaty montrent que le réseau triangulaire est l'unique minimiseur parmi les configurations réseau, ce qui représente la première justification rigoureuse de l'apparition du réseau d'Abrikosov dans le régime $H_{c_1}(\varepsilon) < h_{ex} \ll H_{c_2}(\varepsilon)$. De façon surprenante, ce résultat repose partiellement sur la théorie des nombres, plus précisément, sur des travaux autour de la fonction d'Epstein ζ associée aux configurations réseaux Λ (voir l'article de Montgomery [Mo]).

Bien sûr les travaux de Sylvia Serfaty couvrent des domaines très variés de l'analyse et ne se limitent pas à ceux que nous avons présentés. Nous mentionnons aussi que les questions autour du réseau d'Abrikosov débouchent sur d'autres études dans lesquelles la contribution de Sylvia Serfaty est primordiale. Nous citerons par

[3] Par (4), on savait déjà que l'énergie minimale à l'ordre deux était un reste d'ordre $o(h_{ex}|\log\varepsilon'|)$.

[4] La fonction χ_{B_R} satisfait $\chi_{B_R} = 1$ dans B_{R-1} et $|\nabla\chi_{B_R}| \leqslant C$.

exemple les études en mécanique statistique pour les gaz coulombiens $1D$ et $2D$ (avec Sandier), sur les matrices aléatoires (avec Borodin) ou sur le modèle d'Ohta-Kawasaki relatif aux copolymères à blocs (avec Goldman et Muratov). On pourra en lire plus dans son récent article [Se].

Références

[Ab] A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second type. Soviet Phys. JETP 5 (1957), p. 1174-1182.

[BBH] F. Bethuel, H. Brezis, et F. Hélein. *Ginzburg-Landau vortices.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 13. Birkhäuser (1994)

[DG] P.G. De Gennes. Superconductivity of metal and alloys. Benjamin, New York and Amsterdam. 1966.

[FoHe] S. Fournais et B. Helffer. Spectral methods in surface superconductivity. Progress in non-linear differential Equations and their applications. Birkhäuser (2011).

[GL] V.L. Ginzburg et L.D. Landau. Collected papers of L.D. Landau. Edited by D. Ter. Haar, Pergamon press, Oxford 1965.

[Je] R.L. Jerrard, Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals, SIAM J. Math. Anal., 30, (1999) 721–746,

[JS] R.L. Jerrard et H.M. Soner. The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy, Calc. Var. Partial Differential Equations, 14 (2002), 151–191.

[Mo] H. L. Montgomery. Minimal Theta functions, Glasgow Math J. 30 (1988), N° . 1, 75-85.

[S-JST] D. Saint-James, G. Sarma et E.J. Thomas. *Type II Superconductivity.* Pergamon, Oxford 1969.

[Sa] E. Sandier. Lower bounds for the energy of unit vector fields and applications, J. Funct. Anal., 152, (1998), 379–403.

[SaS1] E. Sandier et S. Serfaty. On the energy of type-II superconductors in the mixed phase. Rev. Math. Phys. 12 (9) (2000), p 1219-1257.

[SaS2] E. Sandier et S. Serfaty. The decrease of bulk-superconductivity close to the second critical field in the Ginzburg-Landau model. SIAM J. Math. Anal. 34 (4) (2003), p. 939-956.

[SaS3] E. Sandier et S. Serfaty. *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model* Progress in non-linear differential Equations and their applications. Birkhäuser (2007).

[SaS4] E. Sandier et S. Serfaty. From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems. Comm. Math. Phys. 313(3) (2012), p. 635-743.

[Se] S. Serfaty. $2D$ Coulomb gas, Abrikosov lattive and renormalized energy. IAMP News bulletin, october 2012.