Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

Séance 5

29 Septembre 2021

Maintenant que nous avons vu Prokhorov sur $\mathbb{R}$, voyons pourquoi c'est un ingrédient essentiel (mais caché) derrière l'utilisat° de fonct° caractéristique

Rappel: $\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$, $\forall t \in \mathbb{R}^k$, $\varphi_\mu(t) := \int e^{i\langle t,x\rangle} \mu(dx)$
$= \mathbb{E}(e^{itX})$ pour $\mathcal{L}(X) = \mu$

Proposit°: $(\mu_n ; n \geq 1)$ suite de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

$$\mu_n \xrightarrow[\text{étroitement}]{n \to +\infty} \mu \iff \varphi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \varphi_\mu(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^k.$$

Pour la preuve, $\boxed{\Rightarrow}$ évident par def de la cv étroite

Mais $\boxed{\Leftarrow}$ est une conséquence immédiate du thm de Lévy

Thm [Critère de Lévy]

Si μ_n suite dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$

avec $\begin{cases} \forall t, \quad \int e^{i\langle t,x\rangle} \mu_n(dx) \longrightarrow \varphi(t) & \left(\text{cv ponctuelle}\right) \\ t \longmapsto \varphi(t) \text{ continue en } 0 \end{cases}$

Alors $\exists \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(t) = \int e^{i\langle t,x\rangle} \mu(dx)$.

et $\mu_n \to \mu$ faiblement.

Preuve: $(k=1)$ $\varphi_\mu(t) = \int e^{itx}\mu(dx)$

1) Estimée clé : $\exists\, C>0$ absolue telle que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),\quad \mu(\mathbb{R}\setminus[-K,K]) \leqslant C.K.\int_{[-\frac{1}{K},\frac{1}{K}]} (1-\mathrm{Re}\,\varphi_\mu(t))\,dt$$

$$K\int_{[-1/K,\,1/K]} (1-\mathrm{Re}\,\varphi_\mu(t))\,dt = K\int_{[-1,1]/K}\left(1-\int \cos(xt)\,\mu(dx)\right)dt$$

$$= K\int_{[-1,1]/K} dt \int \mu(dx)\,(1-\cos(xt))$$

Fubini
$$= K\int \mu(x) \int_{[-1,1]/K} dt\,(1-\cos xt)$$

$$= \int \mu(x)\left(2 - K\left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{-1/K}^{1/K}\right)$$

$$= 2\int \mu(dx)\left(1-\frac{\sin(x/K)}{x/K}\right).$$

OR $\begin{cases} y \mapsto \dfrac{\sin y}{y} \text{ majorée par } 1, \text{ atteint en } y=0 \\ 1-\dfrac{\sin(x/K)}{x/K} \geqslant \dfrac{1}{2C} \text{ pour } |x|\geqslant K \end{cases}$

Plus précisément $\dfrac{1}{2C} = \max\limits_{y\geqslant 1}\left(1-\dfrac{\sin y}{y}\right) > 0$

D'où $\displaystyle K \int_{[-1/K,\,1/K]} \left(1 - \mathrm{Re}\, \varphi_\mu(t)\right) \geqslant \frac{1}{C} \int_{\{|x| \geqslant K\}} \mu(dx)$

ce qui est équivalent à l'identité souhaitée !

2) Tension.

Par CV dominée :

$$\limsup_{n \to +\infty} \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-K,K]) \leqslant CK \int_{[-1/K,\,1/K]} \left(1 - \mathrm{Re}\, \varphi_\mu(t)\right) dt$$

$\xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$ par continuité de φ_μ en 0.

Donc $\displaystyle \lim_{K \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-K,K]) = \underline{\underline{0}}$.

⚠ Ce n'est pas tout à fait la tension :

$$\lim_{K \to +\infty} \sup_{n \geqslant 1} \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-K,K]) = 0$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_0-1}$ tendus $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{K \to +\infty} \sup_{n \geqslant n_0} \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-K,K]) = 0$

$\forall n_0$

$\rightsquigarrow$ Cela suffit ! Tension ! (?? Vraiment ?)

Par Prokhorov, il existe $\left\{\begin{array}{l} \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ \text{une ss-suite } \psi \end{array}\right.$ tq

$\mu_{\psi(n)} \longrightarrow \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ étroitement.

Nécessairement $\varphi_{\mu_{\psi(n)}}(t) \longrightarrow \varphi_{\nu}(t) = \varphi(t)$ ponctuellement.

3) Mq $\mu_n \to \mu$ étroitement.

__Preuve générale :__ $\mathcal{M}_1(E)$ métrisable

& unicité de la valeur d'adhérence car

Si $\mu_{\psi_1(n)} \to \mu_1$

$\mu_{\psi_2(n)} \to \mu_2$

Alors $\varphi(t) = \lim \varphi_{\mu_{\psi_1(n)}} = \lim \varphi_{\mu_{\psi_2(n)}}$

$= \varphi_{\mu_1}(t) = \varphi_{\mu_2}(t)$

Donc $\mu_1 = \mu_2$ par injectivité de la transformée de Fourier.

__Preuve sans métrisabilité :__ Par l'absurde,

Supposons $\mu_n \not\to \mu$

Donc $\exists f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}),\ \underbrace{\mu_n(f) \not\to \mu(f)}$

$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n_0 \geq 1,\ \exists n \geq n_0$

$|\mu_n(f) - \mu(f)| \geq \varepsilon_0$

Après extraction,

$\exists f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}),\ \exists \varepsilon_0 \geq 0,\ \forall n \geq 1$

$$|\mu_{\psi_1(n)}(f) - \mu(f)| \geq \varepsilon$$

Par tension

$$\begin{cases} \mu_{\psi_2(n)} \longrightarrow \mu' \\ \exists f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}),\ \exists \varepsilon_0 > 0, \end{cases} \Longrightarrow \quad \varphi_{\mu_{\psi_2(n)}} \longrightarrow \varphi_{\mu'} = \varphi_{\mu}$$

$$\left| \mu_{\psi_2(n)}(f) - \mu(f) \right| \geqslant \varepsilon_0 .$$

Par injectivité de Fourier : $\mu = \mu'$

Contradict°

$\boxed{\text{VL}}$

(5) Distances métrisant la CV étroite sur $\mathcal{M}_1(E)$

Maintenant nous allons définir deux distances sur $\mathcal{M}_1(E)$ puis montrer qu'elles métrisent la CV étroite.

Pour cela, E polonais et on fixe d telle que (E,d) métrique complet séparable.

Proposit° : [Distance de Lévy-Prokhorov]

$B^\varepsilon \equiv \varepsilon$- voisinage

Soit $(\mu,\nu) \in \mathcal{M}_1(E) \times \mathcal{M}_1(E)$

$$\rho(\mu,\nu) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; \forall B \in Bor(E),\ \mu(B) \leqslant \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon \right\}$$

$$= \inf \left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; \forall F \text{ fermé},\ \mu(F) \leqslant \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon \right\}$$

définit une distance sur $\mathcal{M}_1(E)$ dite de Lévy-Prokhorov

Exemples :

* $\forall \nu \in \mathcal{M}_1(E)$, $\rho(\delta_x, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \nu(\{x\}^\varepsilon) \geq 1-\varepsilon\}$
$\forall x \in \mathbb{R}$

En effet quand a-t-on $\delta_x(B) \leq \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon$?

↳ Trivialement oui si $x \notin B$

↳ Mais si $x \in B$, quand a-t-on $\nu(B^\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$?

$B = \{x\}$ est le pire des cas.

Donc $\forall B$, $\delta_x(B) \leq \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon \iff \nu(\{x\}^\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$.

* $\rho(\delta_x, \delta_y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \underbrace{\delta_y(\{x\}^\varepsilon)}_{\mathbb{1}_{\{d(x,y) < \varepsilon\}}} \geq 1-\varepsilon\}$

$= \min(1, d(x,y))$

Preuve [ρ distance].

· Restricto aux fermés

Il suffit de mq $\forall B \in Bor(E)$, $\mu(B) \leq \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon$

$\iff \forall F$ fermé, $\mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon$

$\boxed{\Rightarrow}$ Evident

$\boxed{\Leftarrow}$ Remarquons que $\forall B \in Bor(E)$, $B^\varepsilon = \overline{B}^\varepsilon$

Donc $\mu(B) \leq \mu(\overline{B}) \underset{\text{par hyp } \overline{B} \text{ fermé}}{\leq} \nu(\overline{B}^\varepsilon) + \varepsilon = \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon$.

· $\rho(\mu, \mu) = 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \,, \quad \forall B \in Bor(B) \,, \quad \mu(B) \leq \mu(B^\varepsilon) \leq \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \rho(\mu,\mu) \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \rho(\mu,\mu) = 0 .$

- $\rho(\mu,\nu) = \rho(\nu,\mu)$. Par symétrie de l'identité, il suffit de mq $\rho(\mu,\nu) \leq \rho(\nu,\mu)$.

On a $\forall B \in Bor(E) \,, \quad ((B^\varepsilon)^c)^\varepsilon \subset B^c$ (Dessin !)

Puis $\varepsilon < \rho(\mu,\nu)$

$\Longrightarrow \quad \exists B, \quad \mu(B) > \nu(B^\varepsilon) + \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad \exists B, \quad \mu(B^c) + \varepsilon < \nu((B^\varepsilon)^c)$

$\Longrightarrow \quad \exists B, \quad \mu(((B^\varepsilon)^c)^\varepsilon) + \varepsilon$

$\leq \mu(B^c) + \varepsilon < \nu((B^\varepsilon)^c)$

$\Longrightarrow \quad \exists C = (B^\varepsilon)^c, \quad \nu(C) > \mu(C^\varepsilon) + \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad \varepsilon < \rho(\nu,\mu) \qquad \forall \varepsilon > 0 .$

Donc $\rho(\mu,\nu) \leq \rho(\nu,\mu)$.

- $\rho(\mu,\nu) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = \nu$

On a alors $\forall k \geq 1, \quad \forall F$ fermé, $\mu(F) \leq \nu(F^{1/k}) + 1/k$

Donc $\nu(F) = \nu\left(\bigcap_{k \geq 1} F^{1/k}\right) = \lim_{k \to +\infty} \nu(F^{1/k})$

$\geq \mu(F)$

Par symétrie, $\mu(F) \leq \nu(F)$, démontrée plus haut. Donc $\mu(F) = \nu(F)$ $\forall F$ fermé.

- Inégalité triangulaire :

Soient $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathcal{M}_1(E)^3$: $\forall \varepsilon, \delta > 0$

$$\begin{cases} \rho(\lambda,\mu) < \varepsilon \\ \rho(\mu,\nu) < \delta \end{cases} \Longrightarrow \forall B \in Bor(E)$$

$$\lambda(B) \leqslant \mu(B^{\varepsilon}) + \varepsilon$$

$$\leqslant \nu(\underbrace{(B^{\varepsilon})^{\delta}}_{\subset B^{\varepsilon+\delta}}) + \varepsilon + \delta$$

l'inégalité triangulaire de d se cache ici

$$\Longrightarrow \rho(\lambda,\nu) \leqslant \varepsilon + \delta$$

Donc $\rho(\lambda,\nu) \leqslant \rho(\lambda,\mu) + \rho(\mu,\nu)$

$\square$