Cours M2Ri :

CV II, thm lim, & transport optimal

Séance 2

15 Septembre 2021

$\boxed{\text{II}}$ CV étroite dans $\mathcal{M}_1(E)$ / CV en loi de v.a. dans E, pour E espace polonais.

① Def d'espace polonais, exemples et contre-exemples

Def : Un espace topologique E est dit polonais lorsque

!! Métrique
- Métrisable : $\exists\ d : E \times E \to \mathbb{R}$ distance qui induit la même topologie que E.
- Complet : (E,d) est complet ie tout suite de Cauchy cv.

Topologique
- Séparable : $\exists\ (x_n ; n \geq 1)$ famille dense dénombrable dans E

Rmk 1 : Par fois la distance est donnée lorsque (E,d) est un espace métrique naturel.

Parfois une métrique n'est pas donnée à priori.
(ex : $\mathcal{M}_1(E)$ muni de la cv étroite !).

On est content de savoir que l'espace est métrizable car cela lui donne de bonnes propriétés.
Mais il n'est pas nécessaire d'utiliser cette distance implicite.

Rmk 2 : La séparabilité peut s'exprimer

- métriquement : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) \leq \varepsilon$
- topologiquement : $\forall x \in E$, $\forall V$ voisinage de E, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x_n \in V$.

Exemples :

① $E = \mathbb{R}^d$ avec sa topologie usuelle est polonais.

Métrisable complet avec $d(x,y) = |x-y|_2$.
Séparable $\mathbb{Q}^d \subset E$ dense.

⚠ $E = \mathbb{R}$, $\tilde{d}(x,y) = \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan y|$ est une distance.

$(E, \tilde{d}) \simeq (]-1,1[, |\cdot|)$

$\uparrow$ métriquement homéomorphe.

non complet pour $\tilde{d}$
mais polonais.

② Tout (E,d) métrique compact est polonais

- Métrisable complet $\Longleftarrow$ Métrique compact

Exercice classique ⟸ Séquentiellement compact ⟹ Borel-Lebesgue

- Séparabilité : $\forall n \geq 1$, $\bigcup_{x \in E} B(x, 1/n)$ recouvre

Borel-Lebesgue $\Rightarrow$ $\exists$ sous-recouvrement fini,

ie $\exists\ J_n$, $|J_n| < +\infty$, & $\bigcup_{j \in J_n} B(x_{n,j}\ ;\ 1/n)$ recouvre.

$\Rightarrow \{ x_{n,j}\ ;\ n \geq 1,\ j \in J_n \}$ famille dénombrable dense.

(3) Pour $T > 0$ fixé. $E = \mathscr{C}([0,T], \mathbb{R})$ muni de $d = \|\cdot\|_\infty$.

- Métrisable : d donné !
- Complet : Classique (à l'oral).
- Séparable : Oui. Voici deux familles denses.

↳ $\mathbb{Q}[X]$ dénombrable $\quad \mathbb{Q}[X] \longleftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Q}_n[X] \simeq \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Q}^{n+1} \simeq \mathbb{N}$.

Dense : Soit $f \in E$, $\varepsilon > 0$.

Par Stone-Weierstraß, $\exists\ P \in \mathbb{R}[X]$

$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon/2$.

Puis $Q = \sum b_i X^i$, $P = \sum a_i X^i$

$\in \mathbb{Q}[X]$

$$\|f-Q\|_\infty \leqslant \underbrace{\|f-P\|_\infty}_{\leqslant \varepsilon/2} + \underbrace{\|P-Q\|_\infty}_{\leqslant \underbrace{\sum_i |a_i-b_i| T^i}_{< \varepsilon/2 \text{ pour } b_i \in \mathbb{Q} \text{ bien choisis}}}$$

$$\leqslant \varepsilon.$$

$\hookrightarrow \mathcal{A} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{A}_n$

où $\mathcal{A}_n$ familles des fonctions affines par morceaux, affine sur chaque $\left[\frac{jT}{n}, \frac{j+1}{n}T\right]$ $0 \leqslant j \leqslant n-1$

& $f \in \mathcal{A}_n$ satisfait $f\left(\frac{jT}{n}\right) \in \mathbb{Q}$.

$\leadsto \mathcal{A}_n \simeq \mathbb{Q}^{n+1}$ puis $\mathcal{A} \hookrightarrow \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbb{Q}^{n+1}$

$\simeq \mathbb{N}$.

Mq $\mathcal{A}$ dense :

$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in E, \exists g \in \mathcal{A}, \quad \|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon.$

Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$.

$\underset{\text{Heine}}{\Longrightarrow}$ f uniformément continue.

$\Longrightarrow \exists \delta > 0, \quad |t-s| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon/5$

$\Longrightarrow \exists n = \left\lfloor \frac{T}{\delta} + 1 \right\rfloor$

$\exists g \in \mathcal{A}_n, \quad \left|g\left(\frac{jT}{n}\right) - f\left(\frac{jT}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon/5$

$\forall j$ par densité de $\mathbb{Q}$.

Ce $g \in \mathcal{A}_n$ fonctionne ! En effet :

$$\forall t \in [0,T], \quad |f(t)-g(t)| \leq \underbrace{\left| f(t) - f\left(\tfrac{jT}{n}\right)\right|}_{<\varepsilon/5} + \left|g(t)-g\left(\tfrac{jT}{n}\right)\right| + \underbrace{\left|f\left(\tfrac{jT}{n}\right) - g\left(\tfrac{jT}{n}\right)\right|}_{<\varepsilon/5}$$

où $\frac{jT}{n}$ point sur la grille plus proche de t.

$$\leq \frac{2\varepsilon}{5} + \underbrace{\left|g(t)-g\left(\tfrac{jT}{n}\right)\right|}_{\frac{|t-\frac{jT}{n}|}{T/n} \left|g\left(\frac{(j+1)T}{n}\right)-g\left(\frac{jT}{n}\right)\right|}$$

$\underbrace{\frac{|t-\frac{jT}{n}|}{T/n}}_{\leq 1}$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{5} + \left|g\left(\tfrac{(j+1)T}{n}\right) - g\left(\tfrac{jT}{n}\right)\right|$$

$$\leq \frac{4\varepsilon}{5} + \underbrace{\left|f\left(\tfrac{(j+1)T}{n}\right) - f\left(\tfrac{jT}{n}\right)\right|}_{\leq \varepsilon/5} \leq \varepsilon.$$

④ $(E, \|\cdot\|_2)$ espace de Hilbert avec base dénombrable.

C'est POLONAIS !

- Métrisable complet par def.
- Séparable : $E_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n \,;\, n\geq 1)$ → base ortho. hilbertienne

↳ $E_{\mathbb{Q}}$ dénombrable : ⚠ ev. algébrique = CL finies.

$$E_{\mathbb{Q}} \longleftrightarrow \bigsqcup_{n\geq 1} \mathbb{Q}^n \simeq \mathbb{N}$$

↳ Dense : $\forall x \in E$, $x = \sum_{n\geq 1} x_n \langle x, x_n\rangle$

$$\leadsto \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \underbrace{\alpha_n}_{\in \mathbb{Q}} \right\|_2 \leq \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2}_{\leq \varepsilon \text{ pour } N>>1} + \overbrace{\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n - \langle x, x_n\rangle|^2}^{\leq \varepsilon \text{ par densité}} \leq 2\varepsilon$$

Applicat° : $L^2([0,T])$

$\ell^2(\mathbb{Z})$.

(5) Un produit d'espaces polonais est polonais.

(E, d_E) & (F, d_F)

$\rightsquigarrow$ $(E\times F,\ d_{E\times F} = \max d_E, d_F)$

- Metrizable : $d_{E\times F}$ distance
- complet : Facile.
- Séparable : Prendre le produit cartésien de deux familles denses dénombrables.

Applicat° : $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d) \simeq \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})^d$

$L^2([0,T], \mathbb{R}^d) \simeq L^2([0,T], \mathbb{R})^d$

tous polonais.

(6) $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ polonais pour la topologie de la CV unif. sur tout compact.

- Métrisable : $d_E(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\, 1 \wedge \sup_{0\leq t\leq n} |f(t)-g(t)|$
- Complet : Oui.

Une suite de Cauchy pour d_E aura des restrictions à $[0,n]$ de Cauchy pour $\|.\|_\infty$.

- Séparabilité : $(\tilde{x}_{n,j}\ ,\ n\geq 1,\ j\geq 1)$

où $\tilde{x}_{n,j} \in$ extension par une constante de

$$x_{n,j} \in \mathcal{C}([0,n], \mathbb{R}^d)$$

où $(x_{n,j}\ ;\ j \geq 1)$ famille dense dén. de ,

Contre-exemples :

Lemme : Soit (E,d) espace métrique

Supposons que l'on ait $\{x_i\}_{i\in I}$ telle que

$$\exists\, \delta>0,\quad \forall (i,j)\in I\times I,\quad (i\neq j \Rightarrow d(x_i,x_j)\geq\delta)$$

Alors I non dénombrable $\Rightarrow E$ non séparable.

Preuve : Par contraposée. Si E séparable,

$\exists\ (y_n\ ;\ n\geq 1)$ dense

$\leadsto\ \forall i\in I,\ \exists n_i \in \mathbb{N},\ d(x_i, y_{n_i}) \leq \delta/4$

Or $\delta \leq d(x_i,x_j) \underset{IT}{\leq} d(x_i, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_j)$

$\leq 2\,\delta/4 + d(y_{n_i}, y_{n_j})$

Donc $0 < \delta/2 \leq d(y_{n_i}, y_{n_j})$

D'où $i\neq j \Rightarrow n_i \neq n_j$

$\leadsto\ \varphi : I \to \mathbb{N},\ i \mapsto n_i$ injective

$\leadsto \operatorname{card} I \leq \operatorname{card} \mathbb{N}$

et I est dénombrable

Applications :

① $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la topologie UNIFORME. ie induite par $\|\cdot\|_\infty$.

Métrisable complet : OK.

Mais non séparable !

$\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right)$ ← indicatrices

$\simeq [0,1[$ ← écriture dyadique

$\ell^\infty(\mathbb{N}) \hookleftarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ non dénombrable

et $\forall (x,y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$x \neq y \Longrightarrow d(x,y) = 1$

② $E = (L^\infty(\mathbb{R}), |\cdot|_\infty) \hookleftarrow (\ell^\infty(\mathbb{N}), |\cdot|_\infty)$ isométriquement

③ $E = (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+), |\cdot|_\infty)$

contient les fonctions $\begin{cases} \text{constantes à } \{0,1\} \text{ sur } \mathbb{Z} +]-1/3, 1/3[\\ \text{affines sur } \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} +]-1/3, 1/3[) \end{cases}$

$\simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$