Cours M2Ri :

CV II , thm lim ,

& transport optimal

Séance 13

10 Novembre 2021

(5) Preuve rigoureuse de la dualité de Kantorovich

Etape 1 : $\begin{cases} \mathcal{X} \,\&\, \mathcal{Y} \text{ compacts} \\ c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ continue.} \end{cases}$

Posons $E = \mathcal{C}_b(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} E^* = \mathcal{M}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ mesures de Radon normé par la variat° totale.

Toujours par Riesz, les $f \in E^*$ positifs correspondent aux mesures positives.

Afin d'appliquer la dualité de Legendre-Fenchel

↳ $F : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$u \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \forall x,y \quad u(x,y) \geq -c(x,y) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad F(u) = \infty \, \mathbb{1}_{\{\forall x,y, \; u(x,y) \geq -c(x,y)\}^c}$$

↳ $G : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$u \longmapsto \begin{cases} \mu(\varphi) + \nu(\psi) & \text{si } u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

séparable

définit°

$$\Longleftrightarrow \quad G(u) = \infty \, \mathbb{1}_{\{\text{non séparable}\}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\text{separable}\}}}_{u = \varphi + \psi} \big(\mu(\varphi) + \nu(\psi)\big)$$

↑ abusif

Rmk : G bien défini car si $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y)$

alors $\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\psi}(y) - \psi(y) = Cste$

ie $\exists\, s \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \varphi = \tilde{\varphi} + s \\ \psi = \tilde{\psi} - s \end{cases}$

Pourtant $\mu(\varphi) + \nu(\psi) = \mu(\tilde{\varphi}) + \cancel{s} + \nu(\tilde{\psi}) - \cancel{s}$

La dualité de Legendre - Fenchel - Rockafellar s'applique car

$\begin{cases} F, G \text{ convexes à valeurs dans } \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \text{pour } u \equiv 1 \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \quad F(u) = 0 < +\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad G(u) = 1 < +\infty \end{cases}$

et F continue en u !

⚠ Compacité essentielle pour

- F continue en $u \equiv 1$: $u_n \to 1$ unif va satisfaire $u_n \geq 0 \geq -c$ pour $n \gg 1$.
- le thm de Riesz.

D'où $\inf_{u \in E} F(u) + G(u) = \max_{u^* \in E^*} \left[- F^*(u^*) - G^*(u^*) \right]$

Examinons chacun des membres et nous aurons fini :

$= +\infty\, \mathbb{1}_{\{u \geq -c \text{ et } u \text{ séparable}\}^c}$

$* \quad \inf_{u \in E} F(u) + G(u) = \inf_{u \in E} \; +\infty\, \mathbb{1}_{\{u \geq -c\}^c}$

$+\infty \quad \mathbb{1}_{\{u \text{ non séparable}\}}$

$+ \left(\mu(\varphi) + \nu(\psi)\right) \mathbb{1}_{\{u \text{ séparable}\}},$

$u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \}$

$$= \inf_{\substack{u \in \mathcal{C}_b(X \times Y) \\ u \geq -c \\ u \text{ séparable}}} \mu(\varphi) + \nu(\psi)$$

$$= - \sup_{\substack{u \in \mathcal{C}_b(X,Y) \\ u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y)}} \mu(\varphi) + \nu(\psi)$$

$$= - \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c \cap \mathcal{C}_b} \mu(\varphi) + \nu(\psi)$$

Rmk: $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$

$\cap$ $\qquad$ continues

E

$$* \max_{u^* \in E^* = \mathcal{M}(X \times Y)} \left[- F^*(-u^*) - G^*(u^*) \right] = ?$$

$$F^*(-u^*) = \sup_{u \in E} \langle -u^*, u \rangle - F(u) \quad \Bigg| \quad = \sup_{u \leq c} \langle u^*, u \rangle$$

$$= \sup_{\substack{u \in E \\ u \geq -c}} \langle -u^*, u \rangle$$

On réecrit $\displaystyle F^*(-\pi) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{C}_b(X \times Y) \\ u \leq c}} \langle \pi, u \rangle$

avec $\pi \in \mathcal{M}(X \times Y)$

Or π mesure non positive $\Rightarrow \exists\, u \leq 0 \leq c$, $\langle \pi, u \rangle > 0$

aussi grand que l'on veut

$\Rightarrow F^*(-\pi) = +\infty$

π mesure positive $\Rightarrow \sup_{u \leq c} \pi(u) = \langle \pi, c \rangle$

Donc $F^*(-\pi) = \begin{cases} \langle \pi, c \rangle = \int \pi(dx\,dy)\, c(x,y) & \text{si } \pi \text{ positive} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Par le même raisonnement :

$$G^*(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall (\varphi,\psi),\ \mu(\varphi) + \nu(\psi) = \int \pi(dx\,dy)\,(\varphi(x) + \psi(y)) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\max\limits_{\pi \in E^*} \left[- F^*(-\pi) - G^*(\pi) \right]$

$$= \max_{\substack{\pi \\ \in \Pi(\mu,\nu)}} \left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ mesure positive} \\ \forall \varphi, \psi,\ \mu(\varphi) + \nu(\psi) = \int \pi(dx,dy)\,(\varphi(x) + \psi(y)) \end{array} \right. - \langle \pi, c \rangle$$

$$= - \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \langle \pi, c \rangle$$

On trouve bien :

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi) = \sup_{(\varphi,\psi) \in \Phi_c \cap \mathcal{C}_b} \mu(\varphi) + \nu(\psi)$$

Etape 2 : c borné et unif. continue.

$\rightsquigarrow \|c\|_\infty = \sup\limits_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x,y) < +\infty$.

On a déjà que (partie facile).

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap\mathcal{C}_b} \mu(\varphi)+\nu(\psi) \leqslant \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$$

Il suffit donc de mq $\forall\varepsilon>0$, $\exists(\varphi,\psi)\in\mathcal{C}_b$ tq

$$\begin{cases} \varphi(x)+\psi(y)\leqslant c(x,y) \\ \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) \leqslant \mu(\varphi)+\nu(\psi)+\varepsilon. \end{cases}$$

① On utilise un procédé de troncature pour se ramener au cas précédent.

Soit $\begin{cases} \pi^* \text{ minimiseur : } I(\pi^*) = \inf I(\pi). \\ \delta>0 \text{ petit } (\delta<1). \end{cases}$ Comme dans la preuve de l'existence de π^*, par tension, il existe deux compacts $\begin{cases}\mathcal{X}_0\subset\mathcal{X} \\ \mathcal{Y}_0\subset\mathcal{Y}\end{cases}$ tels que

déjà vu

$$\mu(\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_0)\leqslant\delta,\quad \nu(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{Y}_0)\leqslant\delta,\quad \pi^*(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\setminus\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)\leqslant 2\delta$$

On pose

$$\begin{cases} \pi_0^* = \mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0\}}\,\pi^*/\pi^*[\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0] \\ \mu_0 = (p_1)_*\,\pi_0^* \;;\; \nu_0 = (p_2)_*\,\pi_0^* \\ I_0 : \underset{=}{\Pi_0}(\mu_0,\nu_0) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \qquad \pi_0 \longmapsto \int \pi_0(dx\,dy)\,c(x,y) \end{cases}$$

couplages à support dans $\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0$.

On contrôle $\inf I_0 = \inf_{\pi_0\in\Pi_0(\mu_0,\nu_0)} I_0(\pi_0)$ par

$$\inf I_0 + 2\delta \|c\|_\infty \geqslant \pi^*\left((\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)^c\right)$$

atteint en π_0

$$= \int_{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0} \pi_0(dx,dy)\,.\,c(x,y) + \underbrace{2\delta\|c\|_\infty}_{}$$

$$\geqslant \int c(x,y)\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0}\,.\,\pi_0(dx,dy) + \int \underset{\sim}{\|c\|_\infty}\,\mathbb{1}_{(\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)^c}\,\pi^*(dx,dy)$$

$$\geqslant c(x,y)$$

$$\geqslant \int c(x,y)\underbrace{\Big[\mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0\}}\,\pi^*(\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)\,\pi_0(dx,dy) + \mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0\}^c}\,\pi^*(dx\,dy)\Big]}_{=\ \pi\ \in\ \Pi(\mu,\nu)\ !}$$

En effet
$$(p_1)_*\pi(dx) = \int_{\mathcal{Y}} \pi(dx,dy)$$
$$= \mathbb{1}_{\mathcal{X}_0}(x)\,\pi^*(\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)\int_{\mathcal{Y}_0}\pi_0(dx\,dy) + \int_{\mathcal{Y}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0\}^c}\,\pi^*(dx\,dy)$$

Or
$$\int_{\mathcal{Y}_0} \pi_0(dx,dy) = \mu_0 = (p_1)_*\pi^* = \int_{\mathcal{Y}} \frac{\mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0\}}\,\pi^*(dx,dy)}{\pi^*[\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0]}$$

Donc
$$(p_1)_*\pi(dx) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_0}(x)\int_{\mathcal{Y}_0}\pi^*(dx,dy) + \int_{\mathcal{Y}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0\}}\,\pi^*(dx,dy)$$
$$= \int_{\mathcal{Y}} \pi^*(dx,dy) = \mu\,!$$

De même $(p_2)_*\pi(dx) = \nu\,!$

In fine, $\inf I_0 + 2\delta \|c\|_\infty \geq \int c(x,y)\, \pi(dx\,dy)$

erreur

$\geq \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$

$\hat{M}$ Problème sur $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0$ compacts

ce que je veux

Nous avons fini la partie troncature

② Par l'étape 1,

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi) \leq 2\|c\|_\infty \delta + \sup_{(\varphi_0,\psi_0) \in \Phi_c \cap \mathcal{C}_b} \mu_0(\varphi_0) + \nu_0(\psi_0)$$

$$\leq (2\|c\|_\infty + 1)\delta + \mu_0(\varphi_0) + \nu_0(\psi_0)$$

pour certains $\varphi_0, \psi_0 \in \mathcal{C}_b$ avec

$\varphi_0(x) + \psi_0(y) \leq c(x,y)$

$\forall (x,y) \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0$

Maintenant il est question de promouvoir φ_0, ψ_0 en des $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X}) \times \mathcal{C}_b(\mathcal{Y})$ permettant la maximisat° de $\mu(\varphi) + \nu(\psi)$.

↳ Contrôle en 1 point :

$$\mu_0(\varphi_0) + \nu_0(\psi_0) = \int_{\mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0} (\varphi_0(x) + \psi_0(x))\, \pi_0(dx\,dy)$$

$$\geq \sup \mu_0(\varphi_1) + \nu_0(\psi_1) - \delta$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\geq 0}$$

$$\geq -\delta \geq -1$$

Donc $\exists (x_0, y_0) \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0, \quad \varphi_0(x_0) + \psi_0(y_0) \geq -1$

De plus remplacer (φ_0, ψ_0) par $(\varphi_0 + s, \psi_0 - s)$ ne change rien

Donc on peut supposer $\varphi_0(x_0) = \psi_0(y_0) \geq -1/2$

↳ Contrôle en tous les points

$\forall (x,y) \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0,$

$$\varphi_0(x) \leq c(x, y_0) - \psi_0(y_0) \leq c(x, y_0) + 1/2$$

$$\psi_0(y) \leq c(x_0, y) - \varphi_0(x_0) \leq c(x_0, y) + 1/2$$

↳ Astuce de double convexificat°

On pose $\forall x \in \mathcal{X}, \quad \varphi(x) := \inf_{y \in \mathcal{Y}_0} c(x,y) - \psi_0(y)$

$\forall y \in \mathcal{Y}, \quad \psi(y) := \inf_{x \in \mathcal{X}} c(x,y) - \varphi(x)$

⇝ φ borné unif car

$$\varphi(x) \leq c(x, y_0) - \psi_0(y_0) \leq c(x, y_0) + 1/2$$

$$\varphi(x) \geq \inf_y \big(c(x,y) - c(x, y_0)\big) - 1/2$$

⇝ ψ borné unif de même

$C_-(|c|_\infty) = C_- \leq \varphi, \psi \leq C_+ = C_+(|c|_\infty)$

Aussi φ, ψ continus (Exo à partir de l'unif. continuité de c).

De plus $\mu_0(\varphi_0) + \nu_0(\psi_0)$

$\leq \mu_0(\varphi) + \nu_0(\psi_0)$

$\leq \mu_0(\varphi) + \nu_0(\psi)$

gagne à chaque fois.

Ainsi on a remplacé φ_0, ψ_0 par (φ, ψ) sur $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ continus et bornés par C_-, C_+

Nous pouvons maintenant conclure

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap\mathcal{C}_b} \mu(\varphi) + \nu(\psi)$$

$\geq \mu(\varphi) + \nu(\psi)$ pour les (φ,ψ) particuliers ainsi construits

$$= \int \pi^*(dx,dy)\,(\varphi(x)+\psi(y))$$

$$= \underbrace{\underbrace{\pi^*(\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)}_{\geq (1-2\delta)} \int_{\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0} \pi_0^*(dx,dy)\,(\varphi(x)+\psi(y)) + \int_{(\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0)^c} \pi^*(dx,dy)\,\underbrace{(\varphi(x)+\psi(y))}_{\geq 2C_-}}_{\geq 2\delta\times 2C_- = 4\delta C_-}$$

$$\geq 4\delta C_- + (1-2\delta) \underbrace{\int_{\mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0} \pi_0^*(dx, dy) \left(\varphi(x) + \psi(y)\right)}$$

$$\mu_0(\varphi) + \nu_0(\psi)$$

$$\geq \mu_0(\varphi_0) + \nu_0(\psi_0)$$

$$\geq \inf I(\pi) - \delta(2\|c\|_0 + 1)$$

$$\geq 4\delta C_- + (1-2\delta)\left(\inf I(\pi) - \delta(2\|c\|_\infty + 1) \right)$$

Avec $\delta \to 0$, on a bien

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi) \leq \sup_{(\varphi,\psi) \in \Phi_c \cap \mathcal{C}_b} \mu(\varphi) + \nu(\psi).$$

Etape 3 : $c = \sup_{n \geq 1} c_n$ où c_n suite croissante de coûts bornés et uc.

Admise

$\boxtimes$