Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

séance 9

13 Octobre 2021

Preuve: $(\supset)$ Clairement π_t continue

donc $\forall\, 0 \leq t \leq T$, $\forall A \in Bor(E)$, $\pi_t^{-1}(A) \in Bor(\mathcal{C})$

donc $Cyl(\mathcal{C}) = \sigma\left(\pi_t^{-1}(A) \right) \subset Bor(\mathcal{C})$

$(\subset)$ Mq toute boule ouverte $B(f;r) \in Bor(\mathcal{C})$ est aussi dans $Cyl(\mathcal{C})$.

Ici $f \in \mathcal{C}$, $r > 0$

(E,d) polonais

$$\overline{B(f;r)} \overset{def}{=} \{ g \in \mathcal{C} \mid |g-f|_\infty \leq r \}$$

$$= \{ g \in \mathcal{C} \mid \forall t \in [0,T],\ d(f(t), g(t)) \leq r \}$$

continuité

$$= \{ g \in \mathcal{C} \mid \forall t \in \mathbb{Q} \cap [0,T],\ d(f(t), g(t)) \leq r \}$$

$$= \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,T]} \{ g \in \mathcal{C} \mid \underset{\pi_t(g)}{\overset{\shortparallel}{g(t)}} \in \overline{B(f(t);r)} \}$$

$$= \underbrace{\bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,T]} \pi_t^{-1}\Big(\underbrace{\overline{B(f(t);r)}}_{\in Bor(E)} \Big)}_{\in Cyl(\mathcal{C})}$$

donc $\overline{B(f;r)} \in Cyl(\mathcal{C})$

donc $B(f;r) = \bigcup_{\substack{r' < r \\ r' \in \mathbb{Q}}} \overline{B(f;r)} \in Cyl(\mathcal{C})$

Enfin tout ouvert dans E polonais est union dénombrable de boules ouvertes

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ouvert}}}{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k ; \varepsilon_k) \quad \text{où} \quad x_k \text{ famille dén} \Big)$$

$B(x_k ; \varepsilon_k) \subset U$

$\varepsilon_k > 0$ si $x_k \in U$

$\varepsilon_k = 0$ si $x_k \notin U$

donc $\mathcal{C}yl(\mathcal{C})$ contient les ouverts.

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{C}yl(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}or(\mathcal{C})$$

$\boxed{\text{K}}$

Corollaire clé :

- Toute loi $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ est uniquement caractérisée par ses marginales.

- $\mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ étroitement

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\mu_n \ ; \ n \geq 1) \text{ tendue} & \color{red}{(T = \text{Tension})} \\ \text{CV des marginales fini-dim (pour toute val. d'adh)} : \\ \text{Si } \mu_{\varphi(n)} \text{ CV} \end{cases}$$

alors $(\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_k})^* \mu_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \to +\infty} (\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_k}) \mu$ dans $\mathcal{M}_1(E^k)$

$\forall \, 0 \leq t_1 < \dots < t_k \quad \forall k$ $\color{red}{(\text{Id} = \text{Identificat}^{\text{o}})}$

Remarque : Reformulat° "plus probabiliste"

- Si X, Y deux processus de $\mathcal{C}$

alors $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y \iff \forall k \geq 1$
$\forall\, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k,$
$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$

- Si X_n suite de processus de $\mathcal{C}$.

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

$\iff \begin{cases} (X_n \,;\, n \geq 1) \text{ famille tendue} \\ \text{CV des marginales :} \\ \quad \text{Si } X_{\varphi(n)} \text{ CV en loi} \end{cases}$

alors $\forall k \geq 1, \ \forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n,$

$$\left(X_{\varphi(n)}(t_1), \dots, X_{\varphi(n)}(t_k)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

Preuve : • Pour le premier point, soient μ et μ' deux mesures de $\mathcal{M}_1(\mu)$, de mêmes marginales fini-dimensionnelles.

Mq $\mu(A) = \mu'(A) \quad \forall A \in Bor(\mathcal{C})$

Par la proposit° précédente $Bor(\mathcal{C}) = Cyl(\mathcal{C})$

et par classes monotones, il suffit de mq

$\mu(A) = \mu'(A)$ pour une famille de $A \in \mathrm{Cyl}(\mathcal{C})$

- contenant la famille génératrice $\pi_t^{-1}(B)$ $\forall B \in \mathrm{Bor}(E)$
- stable par $\cap$ finie.

Pour cela, prenons $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathrm{Bor}(E)^k$

$0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_k$

et posons

$$A \overset{\mathrm{def}}{:=} \{ f \in \mathcal{C} \mid f(t_1) \in B_1,\ f(t_2) \in B_2, \dots, f(t_k) \in B_k \}$$

$$= \pi_{t_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{t_2}^{-1}(B_2) \cap \dots \cap \pi_{t_k}^{-1}(B_k)$$

&

$$\mu(A) = (\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_k})_* \mu(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$$

$$= \text{———} \quad \mu' \quad \text{———}$$

$$= \mu'(A).$$

- Pour le 2^e point, on a :

$$\mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu \quad \text{étroitement}$$

$\Longleftrightarrow$ ($\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ métrisable)

$$\begin{cases} (\mu_n \,;\, n \geq 1) \cup \{\mu\} & \text{compact dans } \mathcal{M}_1(E) \\ \text{Unique valeur d'adhérence } \mu & \end{cases}$$

+ Propositº partie I

$\Longleftrightarrow$ Prokhorov
$$\begin{cases} (\mu_n \,;\, n \geq 1) \text{ tendu.} \\ \forall \varphi \text{ extractº}, \ (\mu_{\varphi(n)} \to \nu \implies \mu = \nu) \end{cases}$$

$\Updownarrow$ premier point

Mêmes marginales fini dim.

$\Longleftrightarrow$ Premier point
$$\begin{cases} (\mu_n \,;\, n \geq 1) \text{ tendu} \\ \text{Si } \mu_{\varphi(n)} \text{ CV alors} \\ (\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_k})_* \mu_{\varphi(n)} \longrightarrow (\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_k})_* \mu \\ \text{C'est la CV des marginales !} \end{cases}$$

$\boxtimes$

~~mais pédagogiquement utile~~

Propositº facile : Si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$ processus

alors $(X_n(t_1), X_n(t_2), \dots, X_n(t_k)) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$

dans E^k

Preuve : Revenir à la def de la CV en loi

$$\mathbb{E}(F(X_n)) \xrightarrow{n \to +\infty} \mathbb{E}F(X) \quad \forall F \in \mathcal{C}_b(\mathcal{E})$$

ensuite prenons la fonctº F suivante.

Pour $\varphi : E^k \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}_b(E^k)$

$$F(x) = \varphi(x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \in \mathcal{C}_b(\mathcal{E})$$

on a alors

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_n(t_1), X_n(t_2), \dots, X_n(t_k)) \right] \longrightarrow \mathbb{E}\, \varphi(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_b(E^k) \quad \forall k$$

C'est la cv des marginales fini dim

$\boxtimes$