# UE

# Modélisation

Topic 1

# Chaînes de Markov, Mesures invariantes et application au Page Rank

## I. Définitions :

Soit $\begin{cases} E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} & \text{espace d'états fini} \\ n = \text{card } E. & ⚠ \; E \simeq \{1, 2, \dots, n\} \\ \pi_0 = \text{« loi de départ » sur } E \\ \quad = (p_1, p_2, \dots, p_n) & \text{où } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \; ; \; p_i \geq 0. \end{cases}$

Def : [Chaîne de Markov - Abbrev CM]

Une CM sur $E$, de loi initiale $\pi_0$, est un processus $(X_0, X_1, X_2, X_3, \dots)$ tel que.

- $\mathcal{L}(X_0) = \pi_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}(X_0 = x_i) = p_i$

Propriété de Markov : Ne dépendre que de l'instant précédent.

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x, X_{n-1}, \dots, X_1, X_0) = p(x, y)$

$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$
$\parallel$

où $P = (p(x,y))_{(x,y) \in E \times E} \simeq (P_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$

Lien avec le cours de série chronologiques : Markov

Façon de tirer $X_{i+1}$ en fonct° de ce qui précède :

$$\begin{cases} X_{i+1} = \alpha X_i + \varepsilon_i & AR(1) \\ X_{i+1} = \alpha_1 X_i + \alpha_2 X_{i-1} + \varepsilon_i & AR(2) \\ X_{i+1} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{i+1-i} + \varepsilon_i & AR(p) \end{cases}$$

$\varepsilon_i \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

NON - Markov.

* Les transitions sont représentées par la matrice $P = (P_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = x_j \mid X_0 = x_i) = 1$$

* En vue de formuler les opérations naturelles, de "prendre l'espérance", "faire une transition" etc... une formalisation est particulière utile.

On identifie :

⚠ $E \approx \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \text{Vecteurs colonnes dans } \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \text{Fonctions sur } E \quad f \\ \text{Vecteurs lignes dans } \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \text{Mesures de proba sur } E \quad \mu \\ \text{Produit ligne / colonne :} \\ \mu \times f = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}) f(x) \\ \qquad = \mathbb{E} f(X) \quad \text{où } \mathcal{L}(X) = \mu \end{cases}$$

produit matriciel.

Ainsi un tel formalisme permet de montrer que :

**Lemme** : $\underline{P}^n = \left(\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Puissance $n$-e (matricielle)

**Preuve** (Par réc) :

- Si $n = 1$, c'est la def de $\underline{P}$.
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i)$

conditionne par $X_n = k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k, \cancel{X_0 = i}) \times \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i)$$

Markov

Propriété de Markov

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k)}_{P_{kj}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i)}_{\text{Par hyp de rec } [\underline{P}^n]_{ik}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\underline{P}^n]_{ik} \cdot P_{kj}$$

$$= [\underline{P}^{n+1}]_{ij} \quad \text{(Produit ligne col en Alg. lin)}.$$

$\boxed{//}$

On voit alors que :

- $$\pi_0 \underline{P}^n = \left(\sum_{i=1}^{n} (\pi_0)_i [\underline{P}^n]_{ij}\right)_{1 \leq j \leq n}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (\pi_0)_i \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)\right)_{1 \leq j \leq n}$$
$$= \mathcal{L}(X_n) \quad \text{si} \quad \mathcal{L}(X_0) = \pi_0.$$

- $\underline{P}^n f \overset{\text{exo}}{=}$ Fonction qui associe à $i \in E$, $\mathbb{E}_{X_0 = i}[f(X_n)]$.

**Définition : (Mesure invariante / Equilibre statistique) :**

Une mesure (de proba) $\pi$ est dite invariante lorsque

$$\pi P = \pi \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi P^n = \pi$$

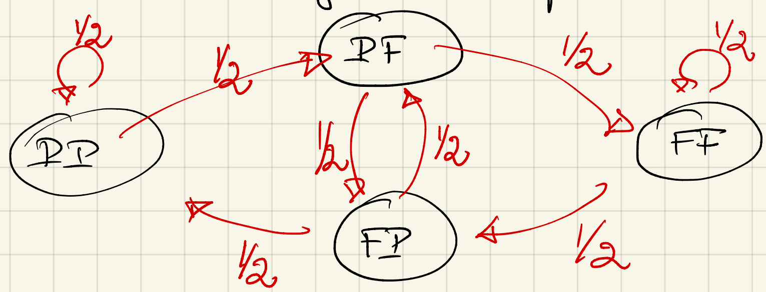
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}(X_n \mid \mathcal{L}(X_0) = \pi) = \pi .$$

**Exercice (Illustratif)**

Considérons un jeu de pile ou face équilibré (P/F) et construisons « l'automate » se souvenant des deux derniers tirages. $E = \{PP, PF, FP, FF\}$.

↳ A votre avis, quel motif est le plus fréquent ? Aucun.

↳ Donner le diagramme fléché décrivant cet automate comme une CM.




↳ Matrice de transition ?

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} PP \\ PF \\ FP \\ FF \end{array}$$

↳ $\pi P = \pi$

$$\Longrightarrow \pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

exo

↳ Définitions :

**Irréductibilité** : Une CM est irréductible lorsque

$$\forall (i,j) \in E \times E, \quad \exists n = n(i,j), \quad P^n(i,j) > 0$$

$\iff$ « Pour deux points $i, j$, il y a une proba $\neq 0$ d'aller de $i$ à $j$ au bout d'un certain temps »

$\iff$ Le graphe (dirigé) est connexe « Je peux aller partout ».

$Q°$ : Notre CM est irréductible ? OUI

Période : Une période de $i \in E$ est un entier $n = n_i$ tel que

$$\mathbb{P}^n(i,i) > 0$$

Apériodicité : Une CM est apériodique lorsque :

$$\forall i, \ \exists m_i, \ \forall m \geq m_i, \ \mathbb{P}^m(i,i) > 0$$

« L'ensemble des périodes de i contient un intervalle infini $[\![ m_i, +\infty [\![$ »

Épreuve de foi

$$\Longleftrightarrow \forall i, \ PGCD(n > 0 \mid \mathbb{P}^n(i,i) > 0)$$
$$= PGCD(\text{périodes}) = 1.$$

Épreuve de foi

$$\Longleftrightarrow \exists N, \ \mathbb{P}^N \text{ à entrées } > 0.$$

$Q°$ : Notre CM est apériodique ?

| $i \in E$ | PP | PF | FP | FF |
|---|---|---|---|---|
| Périodes $:= \{n \mid \mathbb{P}^n(i,i) > 0\}$ | 1, 2, 3, 4, ... | 2, 3, 4, ... | 2, 3, 4, ... | 1, 2, 3, 4, ... |

Oui.

car $PGCD(1, \dots) = 1$

$PGCD(2, 3, \dots) = 1.$

↳ Calcul d'une (la ?) mesure invariante.

$$\pi \mathbb{P} = \pi \Longleftrightarrow [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi_1 + \pi_3}{2} = \pi_1 = \pi_2 \\ \dfrac{\pi_2 + \pi_4}{2} = \pi_3 = \pi_4 \end{cases} \underset{\text{calcul}}{\Longleftrightarrow} \forall i, \ \pi_i = \frac{1}{4}.$$

Unique mesure invariante.

# II - Convergence.

La convergence vers l'équilibre est une notion donnant un comportement <u>moyen</u> sur les trajectoires.

<u>Théorème 1</u> : [ CV vers l'équilibre ]

Si $(X_n\ ;\ n \geq 0)$ CM irréductible et apériodique

alors $\exists !\ \pi\ ,\ \pi P = \pi$ Unicité de la mesure inv. (et existence).

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\underbrace{X_n = y \mid X_0 = x}_{\pi_0 P^n(y)}) = \pi(y)$$

$$\iff \forall \pi_0,\ \forall f,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_{\pi_0}(f(X_n)) = \pi f = \mathbb{E}_{X \sim \pi} f(X)$$

Ainsi $\pi(i)$ est "la probabilité de se retrouver en $i$ en temps long"

<u>MAIS</u> c'est en moyenne ! Moyenne sur les traj.

<u>Preuve</u> : Polling :

① Je ne veux pas de preuve.

② Je veux voir une preuve complète.

③ Je veux voir une preuve "en agitant les mains".

(Plus abstrait) : $T_i$ = tps de premier retour en $i$

<u>Affirmation</u> $\pi_i = \mathbb{E}\left[\frac{1}{T_i}\right]$ $= \inf \{ n > 0 \mid X_n = i \}$

Ainsi plus $\pi_i$ est élevé, plus la CM $X_n$ revient vite en $i$.

C'est une étape clé pour démontrer le

Thm 2 : [ Théorème ergodique de Birkhoff ].

$X = (X_n ; n \geq 0)$ CM irred et apériodique.

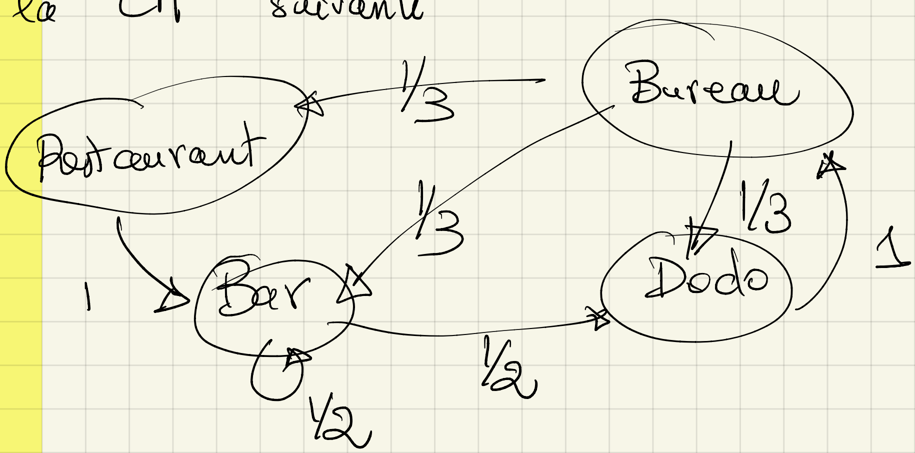
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{p.s} \pi f$$

Moyenne en tps. sur 1 trajectoire

L'ergodicité affirme que $\pi$ apparaît dans une instance / une trajectoire :

« la moyenne temporelle sur 1 trajectoire reflète la moyenne statistique de l'ens. des trajectoires »

Exercice : Considérons un travailleur qui a une routine "metro-boulot-dodo". Ses activités suivent la CM suivante




- Matrice de transition.
- CM irred. ? apériodique ?
- Calculer la mesure invariante.
- En déduire l'activité la plus fréquente.