Chapitre 1 : Fonctions

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 7 Octobre 2020

CM9 : Méthodes de calcul d'intégrales et de primitives

But : calculer des aires ou des intégrales telles que $\int_0^1 \arcsin(x)dx$.

A priori, on utilise la formule

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.
Et si on ne connaît pas de primitive de f, comment fait-on ?

Plan :

- intégration par parties,
- changement de variables,
- calculer des primitives.

Le calcul des primitives ne sert pas uniquement à calculer des aires. Il est aussi utile dans la résolution d'équations différentielles qui permettent de décrire de nombreux problèmes physiques, biologiques, climatologiques, chimiques...

Un exemple de système d'équation différentielle est le suivant :

$$f'(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

$x \longleftrightarrow t \geq 0$

C'est, par exemple, un modèle continu de l'évolution d'une population qui augmente de 1% par unité de temps ou encore du montant d'argent sur un compte épargne placé à 2%.

$f'(t) = \alpha f(t)$

Méthode 1 : intégration par parties

L'intégration par parties provient de la formule de la dérivée d'un produit :

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

Primitive $\int_a^b$

$$\Big[f(t)\,g(t)\Big]_a^b = \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,dt$$

Théorème 10. Intégration par parties ♥

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Dans la pratique : on cherche f et g de sorte qu'il soit plus simple de trouver une primitive de la fonction fg' que la fonction $f'g$.

$$\int_0^{2\pi} f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)g(x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) g'(x)\, dx$$

⊛

Question 1

Pour calculer $\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx$, on choisira plutôt :

❶ $\begin{cases} f'(x) = x \\ g(x) = \cos(x) \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $g'(x) = -\sin x$

❸ $\begin{cases} f'(x) = x \\ g(x) = \sin(x) \end{cases}$

$$⊛ = -\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{2}(-\sin x)\, dx$$

❷ $\begin{cases} f'(x) = \cos(x) \\ g(x) = x \end{cases}$

❹ $\begin{cases} f'(x) = \sin(x) \\ g(x) = x \end{cases}$

$f(x) = \sin x$

$g'(x) = 1$

$$\rightsquigarrow ⊛ = -\int_0^{2\pi} \sin x \,.dx = \left[\cos x\right]_0^{2\pi} = 0$$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = x$

Exercice 30

En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer :

produit de $\underbrace{\ln x}_{g(x)}$ & $\underbrace{1}_{f'(x)}$.

$$\int_1^e \ln(x)dx.$$

$$\int_1^X \ln x \, dx = \int_1^X f'(x)g(x)dx = [fg]_1^X - \int_1^X fg'$$

$$= [x \ln x]_1^X - \int_1^X \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$$

Exercice 31

Calculer l'intégrale

$$\int_0^x te^t dt.$$

$$= [x \ln x - x]_1^X$$

On a ainsi obtenu une primitive de la fonction $t \mapsto te^t$.

$$= X \ln X - (X-1)$$

$f'(t) = e^t$ $\rightsquigarrow$ $f(t) = e^t$

$g(t) = t$ $\rightsquigarrow$ $g'(t) = 1$

Méthode 2 : changement de variables

$G = F \circ u$

$F' = f$

La formule de changement de variable repose sur la formule de la dérivée d'une composée $G(t) = (F \circ u)(t)$

Dérivée composée :

$$G'(t) = (F \circ u)'(t) = (F' \circ u)(t) \times u'(t) = (f \circ u)(t) \times u'(t),$$

où F est une primitive de f.

Preuve du changement de variable.

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_a^b G'(t)\,dt = \big[G(t)\big]_a^b = \big[F\circ u(t)\big]_a^b$$

$$= F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt.$$

Théorème 11. Changement de variables

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : [a, b] \to I$ une fonction dérivable, dont la dérivée u' est continue. Alors on a :

$$\int_a^b f(u(t)) \times u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$$

Démonstration.

Moyen mnémotechnique // Preuve non-rigoureuse.

$$\boxed{\int_a^b f(u(t)) \times u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx}$$

ici

ici

Idée : on « remplace » la variable t par la variable $x = u(t)$.

Il faut alors noter deux choses :

1. $u'(t)dt$ devient dx,
2. si t varie de a à b, alors x varie de $u(a)$ à $u(b)$.

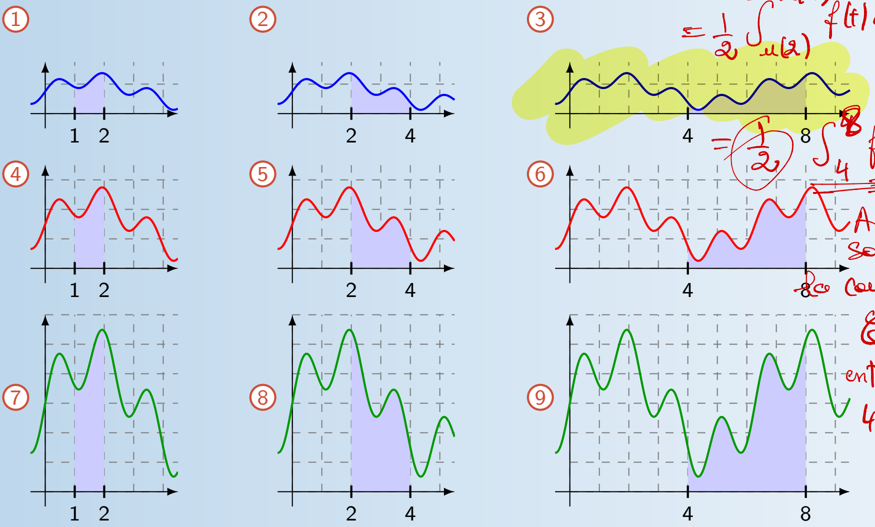
Question 2

$$\frac{1}{2}\int_2^4 f(2t)\,2\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 f(u(t))\,u'(t)\,dt$$

$u(2t)=2t$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée en rouge. À quelle aire correspond $\displaystyle\int_2^4 f(2t)dt$?

$$= \frac{1}{2}\int_{u(2)}^{u(4)} f(t)\,dt$$



$$= \frac{1}{2}\int_4^8 f(t)\,dt$$

Aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre 4 & 8

Vérification : $(\ln \ln x)' \overset{?}{=} \dfrac{1}{x \ln x}$

$$\| $$

$\ln'(\ln x)\,(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$ Oui.

Exemple 19

Soit $b > a > 1$. Calculons

$$\int_a^b \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln \ln b - \ln \ln a$$

à l'aide du changement de variable $u(t) = e^t = x$ (ou de façon équivalente $t = \ln(x)$).

$dx = u'(t)\,dt$ (Mnémotechnique)

Donc

$$\int_a^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{u'(t)\,dt}{u(t).\ \ln u(t)}$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\cancel{e^t}\,dt}{\cancel{e^t}\ \ln e^t} = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \Big[\ln t\Big]_{\ln a}^{\ln b}$$

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on a parfois envie de poser $u(t) = x$.

Dans ce cas,

1. dx devient $u'(t)dt$,
2. si t varie de c à d, alors x varie de $u(c)$ à $u(d)$.

Il faut alors chercher c et d tels que $u(c) = a$ et $u(d) = b$.

Cette méthode n'a de sens que si des tels a et b existent. En particulier, si u est bijective, on peut écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) \times u'(t)dt.$$

/!\ Rappel, début de ce CM

$$\int_0^{X} \theta \cos\theta \, d\theta \overset{IPP}{=} \left[\theta \sin\theta\right]_0^X - \int_0^X \sin\theta \, d\theta$$

$$= X \sin X + \cos X - 1 \quad (★)$$

Exo : Faire la vérificat°

Exemple 20

Pour $a, b \in [-1, 1]$, calculons $-1 \leq x \leq 1$

$$\cancel{\int_a^b \arcsin(x) dx.} \qquad \int_0^x \arcsin t \cdot dt$$

Faisons le changement de variable :

$$t = u(\theta) = \sin\theta$$

$$dt = u'(\theta)\, d\theta$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 1$$

Ainsi $\int_0^x \arcsin t\, dt = \int_0^{\arcsin x} \underbrace{\arcsin \sin\theta}_{\theta} \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \int_0^{\arcsin x} \theta \cos\theta\, d\theta$

$$\overset{(★)}{=} \operatorname{Arcsin} x \, \cancel{\sin \operatorname{Arcsin} x} + \cos \operatorname{Arcsin} x - 1$$

Attention à ne jamais mélanger x et t sous le même symbole intégrale !

(Chez vous)

Exercice 32

En utilisant la formule de changement de variable ci-dessus, calculer :

❶ l'intégrale $\int_0^2 \sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) dx$, $\rightsquigarrow$ $\sqrt{x} = t$

Puis IPP

❷ l'intégrale $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x) dx$.

$\longrightarrow$ $\sin x = t$

Question 3

L'intégrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ se calcule à l'aide :

1. de primitives usuelles,
2. d'une intégration par parties,
3. du changement de variables $u(x) = x^2$,
4. du changement de variables $x = \cos(t)$.

Le calcul de primitives

Question 4 (Nul).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$ fixé. Posons :

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Que vaut $g'(x)$?

1. $f(x)$
2. $f'(x)$
3. $F(x)$
4. $f(x) - f(a)$
5. $f'(x) - f'(a)$
6. $F(x) - F(a)$

(où F est une primitive de la fonction f)

On désignera parfois par $\int^x f(t)dt$ une primitive quelconque de f.

$\int_a^x f(t)\,dt$ = LA primitive qui s'annule en a.

Ainsi, l'intégration par parties et le changement de variable peuvent être aussi utilisés pour le calcul de primitives.

Exemple

Donner une primitive de la fonction arcsin.

$$\int^x \arcsin t \, dt = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Question 5

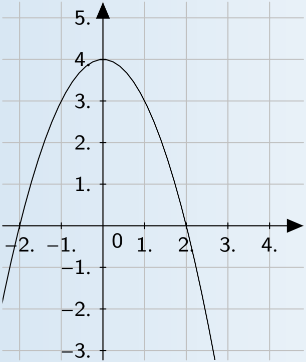
On considère que le graphe ci-dessous est celui d'une fonction f et on pose $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Alors sur $]0,2[$, g est

❶ croissante et concave,

❷ croissante et convexe,

❸ décroissante et concave,

❹ décroissante et convexe.



À venir

- TD 9 : préparer l'exercice 46
- Dates limites DM WIMS :
  - DM4 - Étude qualitative de fonctions - 11 octobre 2020
  - DM5 - Intégrales et primitives - 25 octobre 2020
  - DM6 - Nombres complexes - 8 novembre 2020
  - ...