Chapitre 3 : Polynômes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Jeudi 3 Décembre 2020

CM20 : Fractions rationnelles réelles et intégration

But : calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \frac{x^7 + x^6 + 2x^4 - x - 1}{x^5 - x}\, dx.$$

Plan :

- décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$,
- primitives : éléments de première espèce,
- primitives : éléments de deuxième espèce.

1. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Pour trouver la décomposition d'une fraction rationnelle réelle dans $\mathbb{R}(X)$, on a deux solutions :

- on la déduit de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$,
- ou bien on la cherche directement.

Question : quel sera la forme finale d'une telle décomposition ?

Adaptons le théorème 8 pour décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

Thm de structure pour $\mathbb{C}(X)$

- un facteur irréductible $(X-r)^m$ de $Q(X)$ donne toujours des termes

$$\frac{a_1}{X-r}+\frac{a_2}{(X-r)^2}+\cdots+\frac{a_m}{(X-r)^m},$$

J'AFFIRME

- un facteur irréductible $(X^2+\beta X+\gamma)^m$ donne des termes

$$\frac{a_1X+b_1}{X^2+\beta X+\gamma}+\frac{a_2X+b_2}{(X^2+\beta X+\gamma)^2}+\cdots+\frac{a_mX+b_m}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}.$$

Pour trouver les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, plusieurs méthodes :

- évaluation en quelques valeurs simples
- étude des limites en $+\infty$

Exemple 16

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F(X) = \frac{3}{X^3 - 1} = \frac{3}{(X-1)(X^2+X+1)}$$

est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{bX + c}{X^2+X+1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Calculons les coefficients a, b et c de deux manières différentes.

① ↳ Calculer a puis injecter

② ↳ Decomposer dans $\mathbb{C}$:

$j = e^{i2\pi/3}$

racine de X^2+X+1

$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{\beta}{X-j} + \frac{\gamma}{X-\bar{j}}$ puis regrouper

Exemple 18

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F(X) = \frac{2}{X^2(X^2+1)^2}$$

est de la forme

$$F(X) = \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{b_1 X + c_1}{X^2+1} + \frac{b_2 X + c_2}{(X^2+1)^2}$$

avec $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Thm de structure dans $\mathbb{R}(X)$

Conclusion : la forme générale d'une décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ est la suivante

$$
\begin{aligned}
F(X) = E(X) \quad & + \quad \frac{a_{1,1}}{X-\alpha_1} + \frac{a_{1,2}}{(X-\alpha_1)^2} + \quad \cdots \quad + \\
& + \quad \frac{a_{2,1}}{X-\alpha_2} + \frac{a_{2,2}}{(X-\alpha_2)^2} + \quad \cdots \quad + \\
& + \quad \cdots \quad + \\
& + \quad \frac{b_1 X + c_1}{X^2+\beta_1 X+\gamma_1} + \frac{b_2 X + c_2}{(X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^2} + \quad \cdots \quad + \\
& + \quad \cdots
\end{aligned}
$$

(Les polynômes $X^2+\beta X+\gamma$ sont irréductibles, c'est-à-dire $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$)

Question 1

Quelle est la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F(X) = \frac{X^5+3X^4-18X-5}{(X+7)^2(X-1)(X^2+2X+4)} \quad ? \quad = \frac{\deg 5}{\deg 5}$$

⇝ il y a du $E(X)$

1. $\cancel{\dfrac{a}{(X+7)^2} + \dfrac{b}{(X+7)} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{\alpha}{(X^2+2X+4)}}$
2. $A + \dfrac{a}{(X+7)^2} + \dfrac{b}{(X+7)} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{\alpha}{(X^2+2X+4)}$
3. $\cancel{\dfrac{a}{(X+7)^2} + \dfrac{b}{(X+7)} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+2X+4)}}$
4. $A + \dfrac{a}{(X+7)^2} + \dfrac{b}{(X+7)} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+2X+4)}$
5. Comment obtient-on la forme de la décomposition ?

2. Application au calcul de primitives

Finalement, les éléments pouvant apparaître dans une décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ sont de la forme :

❶ $\dfrac{a}{(X-r)}$

❷ $\dfrac{a}{(X-r)^p}$

❸ $\dfrac{aX+b}{X^2+\beta X+\gamma}$

❹ $\dfrac{aX+b}{(X^2+\beta X+\gamma)^p}$

avec $p \geqslant 2$ et $a, b, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

C'est donc eux qu'il suffit de savoir intégrer.

Proposition 9 ✓ (Facile depuis Terminale).

❶ Les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x-r}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \ln(|x-r|) + \text{cte}.$$

❷ Pour $p \geqslant 2$, les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-r)^p}$ sont les fonctions

$$x \mapsto -\frac{1}{p-1}\frac{1}{(x-r)^{p-1}} + \text{cte}.$$

Exercice

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\,dx.$$

$$\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{\overbrace{x^2+2x+1}^{(x+1)^2}-2}{(x+1)^2} = 1-\frac{2}{(x+1)^2}$$

Donc $\displaystyle\int_0^X \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^X \left(1-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x+\frac{2}{x+1}\right]_0^X$

3. Élements de seconde espèce

Il faut maintenant une méthode pour traiter les éléments de la forme

$$\frac{aX+b}{(X^2+\beta X+\gamma)^p}$$

où $X^2+\beta X+\gamma$ est un polynôme irréductible ($\Delta=\beta^2-4\gamma<0$).

Exemple

On suivra l'exemple du calcul d'une primitive de

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x^2-6x+13} = \text{cste} \times \frac{2x-6}{x^2-6x+13} + \dots$$

Idée : Si $\frac{u'}{u^p} = \frac{-1}{p-1}\left[\frac{1}{u^{p-1}}\right]'$

Alors je sais faire.

u' Le reste

Étape 1

On décompose sous la forme :

$$\text{cte.} \times \frac{\overbrace{2X+\beta}^{u'}}{\underbrace{(X^2+\beta X+\gamma)^p}_{u}} + \underbrace{\boxed{\text{cte.} \times \frac{1}{(X^2+\beta X+\gamma)^p}}}_{\text{Le reste}}$$

u

Exemple

On a

$$\begin{aligned}\frac{3X+1}{X^2-6X+13} &= \frac{\frac{3}{2}(2X-6)+10}{X^2-6X+13}\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{2X-6}{X^2-6X+13}\right)+10\left(\frac{1}{X^2-6X+13}\right).\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{u'}{u} + \frac{10}{X^2-6X+13}$$

Proposition : Éléments de seconde espèce (1/2)

❶ Les primitives de $x \mapsto \dfrac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \ln\left(\left|x^2+\beta x+\gamma\right|\right)+\text{cte}.$$

❷ Pour $p \geqslant 2$, les primitives de $x \mapsto \dfrac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^p}$ sont les fonctions

$$x \mapsto -\frac{1}{p-1}\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{p-1}}+\text{cte}.$$

Étape 2

On met le dénominateur sous *forme canonique* :

$$\frac{1}{X^2+\beta X+\gamma}=\frac{1}{(X+b)^2+a^2}.$$

Exemple

$$\begin{aligned} X^2-6X+13 &= X^2-2\times 3X+9+4 \\ &= (X-3)^2+2^2. \end{aligned}$$

X^2+1

Question 2

Quelle est la forme canonique de $X^2 - X + 1$?

1. $(X-1)^2$
2. $(X-1)^2 + 1$
3. $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$
4. $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
5. $(X-2)^2 - 3$
6. $(X-2)^2 + 5$
7. Aucune des propositions ci-dessus

$$= \underbrace{\left(X - \frac{1}{2}\right)^2}_{X^2 - 2\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}} + 1 - 1/4$$

$$= \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + 3/4$$

Étape 3

On effectue le changement de variable $t = \frac{x+b}{a}$:

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{(x+b)^2+a^2}dx = \int_{\frac{c_1+b}{a}}^{\frac{c_2+b}{a}} \frac{1}{(at)^2+a^2}adt$$
$$= \frac{1}{a}\int_{\frac{c_1+b}{a}}^{\frac{c_2+b}{a}} \frac{1}{t^2+1}dt.$$

Exemple

Avec le changement de variable $t = \frac{x-3}{2}$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-3)^2+2^2}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{4t^2+4}2dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2+1}dt.$$

Question 3

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est :

1. $x \mapsto \arccos x$
2. $x \mapsto \arcsin x$
3. $x \mapsto \arctan x$
4. $x \mapsto -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
5. $x \mapsto \ln(x^2+1)$
6. Aucune de ces réponses
7. Je ne connais plus mes formules de dérivées usuelles...

Proposition : Éléments de seconde espèce (2/2)

1. Les primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ sont les fonctions
$$x \longmapsto \arctan(t) + \text{cte}.$$

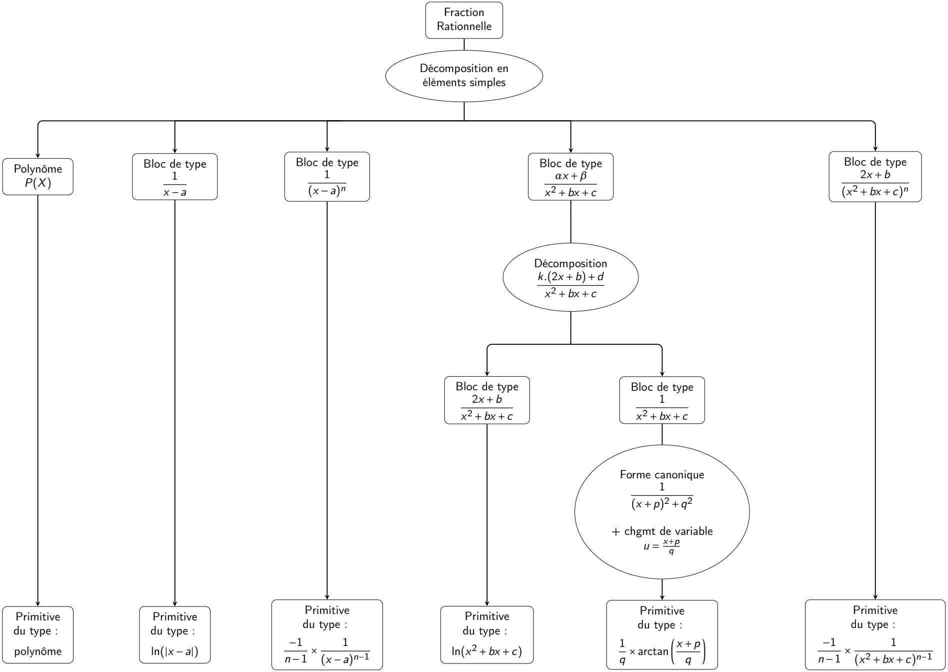
2. Pour $p \geqslant 2$, les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^p}$ peuvent être calculées par intégrations par parties successives (polycopié).

Pour résumer,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{3t+1}{t^2-6t+13}dt &= \frac{3}{2}\int^x \frac{2t-6}{t^2-6t+13}dt + 10\int^x \frac{1}{t^2-6t+13}dt\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+13) + 10\int^x \frac{1}{(t-3)^2+4}dt.\end{aligned}$$

Puis avec le changement de variable $u = \frac{t-3}{2}$:

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+13) + 10\int^{\frac{x-3}{2}} \frac{1}{(2u)^2+4}2du\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+13) + 5\int^{\frac{x-3}{2}} \frac{1}{u^2+1}du\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+13) + 5\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + cte.\end{aligned}$$


Fraction Rationnelle
Décomposition en éléments simples
Polynôme $P(X)$
Bloc de type $\frac{1}{x-a}$
Bloc de type $\frac{1}{(x-a)^n}$
Bloc de type $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$
Bloc de type $\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}$
Décomposition $\frac{k.(2x+b)+d}{x^2+bx+c}$
Bloc de type $\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$
Bloc de type $\frac{1}{x^2+bx+c}$
Forme canonique $\frac{1}{(x+p)^2+q^2}$
+ chgmt de variable $u=\frac{x+p}{q}$
Primitive du type : polynôme
Primitive du type : $\ln(|x-a|)$
Primitive du type : $\frac{-1}{n-1}\times\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$
Primitive du type : $\ln(x^2+bx+c)$
Primitive du type : $\frac{1}{q}\times\arctan\left(\frac{x+p}{q}\right)$
Primitive du type : $\frac{-1}{n-1}\times\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}$

Exercice

Trouver une primitive de

$$f(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 - x + 6}{x^4 - 2x^3 + 3x^2}.$$

À venir

- CT : A la rentrée en janvier 2021
  programme : tout le cours et les TD, en insistant sur ce qui n'a pas été évalué en CC

- TD 20 : donner les quatre premières primitives de l'exercice 24

- Dates limites DM WIMS :
  - DM9 - Polynômes, degré et multiplicité des racines - 6 décembre 2020
  - DM10 - Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples - 13 décembre 2020