Chapitre 3 : Polynômes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 2 Décembre 2020

CM19 : Fractions rationnelles

But : peut-on trouver a et b tels que

$$\frac{2X}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} \ ?$$

décomposition en éléments simples

Plan :

- quotient de polynômes, quel degré ?
- "décomposition en éléments simples",
- on décompose.

1. Les fractions rationnelles

Definition

Une ***fraction rationnelle*** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$F = \frac{P}{Q} \quad \text{avec } P, Q \in \mathbb{K}[X] \text{ et } Q \neq 0.$$

Par analogie avec les fractions, on dira que

- P est le ***numérateur*** de F, éléments dans $\mathbb{Q}$
- Q est le ***dénominateur*** de F.

Analogie : $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{K}[X]$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\} \longleftrightarrow \mathbb{K}(X)$

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Question 1

Notons $F(X) = X^2 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{X^2+X+1}{4+5X}$. Alors

1. F est un polyôme
2. F est une fraction rationnelle
3. F n'est ni un polynôme, ni une fraction rationnelle
4. je ne vois pas le lien avec la définition.

Pour l'instant, $\dfrac{P}{Q}$ est seulement une *notation*.

On va maintenant introduire quelques « règles de calcul » sur $\mathbb{K}(X)$ pour que tout se passe comme pour les fractions habituelles.

$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q} \mid P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X], Q \neq 0 \right\}$

Rappel.

Égalité entre deux fractions rationnelles :

On voudrait, par exemple, que

$$\frac{X}{X^2+3} \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{X^3+3X} = \frac{\cancel{X} \cdot X}{\cancel{X}(X^2+3)} = \frac{X}{X^2+3}$$

représentent la même fraction rationnelle.

donc oui ? Mais je connais juste l'égalité sur $\mathbb{K}[X]$?

Definition (Égalité sur $\mathbb{K}(X)$)

Deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont dites ***égales*** si

$$P_1 Q_2 = P_2 Q_1.$$

On dit alors que $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont deux ***représentants*** de la même fraction rationnelle $F = \frac{P_1}{Q_1}$.

Opérations sur les fractions rationnelles :

Definition

Si $F_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ sont deux fractions rationnelles,

- la ***somme*** de F_1 et F_2 est définie par

$$F_1 + F_2 = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}. = \frac{P_1 Q_2}{Q_1 Q_2} + \frac{P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$$

$$= \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2}{Q_1 Q_2} + \frac{P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$$

- le ***produit*** de F_1 et F_2 est défini par

$$F_1 F_2 = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}.$$

(Il faudrait vérifier que cette définition ne dépend pas des représentants choisis pour F_1 et F_2)

Exo : Montrer que si $F_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_1'}{Q_1'}$, $F_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_2'}{Q_2'}$ (2×2 écritures)

alors $\frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1' Q_2' + P_2' Q_1'}{Q_1' Q_2'}$. Et donc $F_1 + F_2$ bien défini.

Proposition 7 $(\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle.

Il existe un unique représentant $\dfrac{P_0}{Q_0}$ de F tel que :

1. P_0 et Q_0 n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$, $\Leftrightarrow$ Produits d'irréductibles différents.
2. Q_0 est unitaire (i.e. son coefficient dominant vaut 1).

On dit que le représentant $\dfrac{P_0}{Q_0}$ est ***la forme irréductible*** de la fraction rationnelle F.

Analogie : Soit $F \in \mathbb{Q}$ une fraction.

$\exists!$ $F = \frac{p}{q}$ représentant tel que

① p et q n'ont pas de facteur premier en commun.

② $q \in \mathbb{N}$

On dit $\frac{p}{q}$ est la forme irréductible.

Preuve : Existence : On fait pareil dans les 2 cas.

On prend $F = \frac{P}{Q}$ une forme potentiellement non-irréductible

Et on simplifie les facteurs premiers / irréductibles communs.

Thm invoqué : Sur $\mathbb{Z}$, l'écriture en nombres premiers $\neq$ est unique (Euclide)

Sur $\mathbb{C}[X]$, l'écriture en produit $\prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{m_i}$ de

polynômes irréductibles est unique à l'ordre près (D'Alembert)

⚠ $\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$\prod_{i=1}^{n} a_i \overset{\text{def}}{=} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$

Par ex : $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

Ainsi on écrit

$$P = \alpha \prod_{a \,:\, \cancel{\text{racine}} \text{ de } P} (X-a)^{m_a(P)} \leftarrow \text{mult.}$$

$$Q = \beta \prod_{a \,:\, \cancel{\text{racine de}}\ Q} (X-a)^{m_a(Q)}$$

On note $m_a(P)$ la mult. de a racine de P.

* $m_a(P, Q) = \min(m_a(P), m_a(Q))$

* $m_a(P) = 0$ si a n'est pas racine

Donc $F = \frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\prod_a (X-a)^{m_a(P)}}{\prod_a (X-a)^{m_a(Q)}}$

(Écriture formelle)

Le sens est + important que ce que j'écris

$$= \frac{\cancel{\prod_a (X-a)^{m_a(P,Q)}}}{\cancel{\prod_a (X-a)^{m_a(P,Q)}}} \times \frac{\alpha}{\beta} \frac{\prod_a (X-a)^{m_a(P) - m_a(P,Q)}}{\prod_a (X-a)^{m_a(Q) - m_a(P,Q)}} = \frac{P_0}{Q_0}$$

Pas de racines communes

Unicité : Supposons $F = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{P_0'}{Q_0'}$ deux écritures irréductibles.

Donc $P_0 Q_0' = P_0' Q_0$ (égalité des fractions).

↳ Egalité des coeffs dominants de P_0 & P_0'.

Quitte à simplifier, on peut supposer que c'est 1.

↳ Ecriture en produits d'irréductibles : $P_0 = \prod (X-a)^{m_a(P)} \dots$

Donc
$$P_0 Q_0' = \prod_a (X-a)^{m_a(P_0) + m_a(Q_0')}$$
$$\parallel$$
$$P_0' Q_0 = \prod_a (X-a)^{m_a(P_0') + m_a(Q_0)}$$

Par unicité du produit en irréductibles (à l'ordre près) :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad m_a(P_0) + m_a(Q_0') = m_a(P_0') + m_a(Q_0)$$

/!\ Hypothèse : Pas de racines communes entre P_0, Q_0 et P_0', Q_0'. (*)

Donc $m_a(P_0) - m_a(Q_0) = m_a(P_0') - m_a(Q_0')$

Ici par (*) ; nécessairement $\begin{cases} m_a(P_0) = m_a(P_0') \\ m_a(Q_0) = m_a(Q_0') \end{cases}$

⇝ $P_0 = P_0'$ & $Q_0 = Q_0'$

Exo : Refaites la preuve avec l'exemple explicite $F = \frac{(X^2-1)X}{X^2}$.

Quelques remarques sur la proposition 7 :

- Même si $F \in \mathbb{R}(X)$, on demande que P_0 et Q_0 n'aient pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.
- En fait, la condition 1 est équivalente à : P_0 et Q_0 n'ont pas de diviseur non-constant en commun dans $\mathbb{K}[X]$.
- Parfois on omet la condition 2 et on dit que $\frac{P_0}{Q_0}$ est **une** forme irréductible de F (elle n'est plus unique).

Exercice

irréd

Déterminez le représentant de $F(X) = X^2 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{X^2+X+1}{5X+4}$.

$$= \frac{5X^4+4X^3+X^2+6X+5}{X(5X+4)}$$

$$= \frac{X^2(5X+4)X+(5X+4)+X^2+X+1}{X(5X+4)}$$

$$= \frac{5X^4+4X^3+5X+4+X^2+X+1}{X(5X+4)}$$

$$= \frac{X^4+\frac{4}{5}X^3+\frac{1}{5}X^2+\frac{6}{5}X+1}{X\left(X+\frac{4}{5}\right)} = \frac{P}{Q}$$

pas de racines communes, OUI.

$P(0) = 1 \neq 0$

$P\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}(X^2+X+1)\big|_{-\frac{4}{5}} \neq 0$

Proposition 8

Si F est une fraction rationnelle, alors le nombre

$$\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$$

ne dépend pas du représentant $\frac{P}{Q}$ choisi pour F.

On l'appelle le ***degré*** de la fraction rationnelle F.

Preuve : $F = \frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$ deux écritures

Alors $PQ' = P'Q \Longrightarrow \deg P + \deg Q' = \deg P' + \deg Q$

Remarque : ce nombre peut éventuellement valoir $-\infty$ si $P = 0$.

$\Longleftrightarrow \deg P - \deg Q = \deg P' - \deg Q'$

Et donc $\deg F$ ne dépend pas de l'écriture choisie !

Remarque

On a vu que

$$\frac{1}{X-1} \text{ et } \frac{X}{X^2-X} = \frac{\cancel{X}}{\cancel{X}(X-1)}$$

sont deux représentants de la même fraction rationnelle.

On constate bien que le degré des deux représentants est le même.

Question 2

Quel est le degré de $F(X) = \dfrac{1 + X + 4X^2 + 5X^3}{1 + 3X + 4X^4}$?

1. $-\infty$
2. -4
3. -3
4. -2
5. -1
6. 0
7. 1
8. 2
9. 3

2. Décomposition en éléments simples

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, c'est l'écrire comme une

somme de termes dont les dénominateurs sont des puissances de polynômes irréductibles.

Exemple 11

On vérifie aisément que

$$\underbrace{\frac{2}{X^2-1}}_{= \frac{2}{(X-1)(X+1)}} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}.$$

Cette décomposition est pratique pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{2}{t^2-1}\,dt$.

Théorème 8. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ (admis)

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle et $\frac{P}{Q}$ sa forme irréductible, avec

$$Q(X) = (X - z_1)^{k_1} \times \cdots \times (X - z_\ell)^{k_\ell}. = \prod_{i=1}^{\ell} (X - z_i)^{k_i}$$

Alors il existe une unique décomposition de la forme :

$$\begin{array}{rcccccccccc} F(X) = & E(X) & + & \dfrac{a_{1,1}}{(X-z_1)} & + & \dfrac{a_{1,2}}{(X-z_1)^2} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{1,k_1}}{(X-z_1)^{k_1}} \\ & & + & \dfrac{a_{2,1}}{(X-z_2)} & + & \dfrac{a_{2,2}}{(X-z_2)^2} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{2,k_2}}{(X-z_2)^{k_2}} \\ & & + & \cdots & & & & \cdots & & \\ & & + & \dfrac{a_{\ell,1}}{(X-z_\ell)} & + & \dfrac{a_{\ell,2}}{(X-z_\ell)^2} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{\ell,k_\ell}}{(X-z_\ell)^{k_\ell}} \end{array}$$

avec $E(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour tout i, j.

Exemple

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle telle que, sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$, le dénominateur est de la forme :

$$Q(X) = (X - z_1)^2 \times (X - z_2)^4 \times (X - z_3).$$

Alors il existe une unique décomposition de la forme :

$$\begin{aligned} F(X) = \quad E(X) \quad & + \quad \frac{a_{1,1}}{(X - z_1)} \quad + \quad \frac{a_{1,2}}{(X - z_1)^2} \\ & + \quad \frac{a_{2,1}}{(X - z_2)} \quad + \quad \frac{a_{2,2}}{(X - z_2)^2} \quad + \quad \frac{a_{2,3}}{(X - z_2)^3} \quad + \quad \frac{a_{2,4}}{(X - z_2)^4} \\ & + \quad \frac{a_{3,1}}{(X - z_3)} \end{aligned}$$

avec $E \in \mathbb{C}[X]$ et $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour tout i,j.

3. En pratique

Exemple 12

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 + X^3 - 9X^2 - 9X + 1}{(X-3)(X+1)}.$$

On cherche une décomposition de la forme :

$$\frac{X^4 + X^3 - 9X^2 - 9X + 1}{(X-3)(X+1)} = E(X) + \frac{a}{X-3} + \frac{b}{X+1}.$$

On résout en deux étapes :

1. déterminer $E(X)$,
2. déterminer a et b.

Étape 1. Déterminer $E(X)$ (souvent appelé « partie entière »).

$0 \leqslant r < b$.

Analogie
Exemple important : $a, b \in \mathbb{Z}$
$a = bq + r$ div eucl.

Remarque

- Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $E(X) = 0$.
- Si $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$, alors E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

$\mathbb{Q} \ni \frac{a}{b} = \frac{bq+r}{b} = \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{r}{b}}_{\in [0,1[}$

$\leadsto q = E\left(\frac{a}{b}\right)$ partie entière de $\frac{a}{b}$

Dans notre cas $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$, et la division euclidienne donne :

$$\underbrace{(X^4+X^3-9X^2-9X+1)}_{P(X)} = (X^2+3X)\underbrace{(X-3)(X+1)}_{Q(X)}+1$$

d'où $= \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{(X^2+3X)\cancel{Q(X)}+1}{\cancel{Q(X)}}$

$$F(X) = (X^2+3X) + \frac{1}{(X-3)(X+1)} = (X^2+3X) + \frac{a}{X-3} + \frac{b}{X+1}.$$

Exactement le même calcul que sur $\mathbb{Q}$!

Étape 2. Déterminer a et b dans :

$$\frac{1}{(X-3)(X+1)} = \frac{a}{X-3} + \frac{b}{X+1}.;$$

↳ Méthode sans ce cours : Mettre au m̂ dénominateur et identifier.

↳ Plus efficace (BCP) :

Pour a :
On multiplie par $(X-3)$ de part et d'autre :

$$\frac{1}{X+1} = a + \frac{b(X-3)}{X+1}.$$

On substitue 3 à X :

$$\frac{1}{4} = a + 0.$$

→ On obtient $a = \frac{1}{4}$.

Pour b :
On multiplie par $(X+1)$ de part et d'autre :

$$\frac{1}{X-3} = \frac{a(X+1)}{X-3} + b.$$

On évalue en $X = -1$:

$$\frac{1}{-4} = 0 + b.$$

→ On obtient $b = -\frac{1}{4}$.

Conclusion :
La décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$\frac{X^4+X^3-9X^2-9X+1}{(X-3)(X+1)} = (X^2+3X) + \frac{\frac{1}{4}}{X-3} + \frac{-\frac{1}{4}}{X+1}.$$

Application : les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4+x^3-9x^2-9x+1}{(x-3)(x+1)}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \text{cte}.$$

Exemple 14

Décomposons en élément simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)}.$$

On cherche une décomposition de la forme :

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} = E(X) + \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+2}.$$

On résout en trois étapes :

1. Déterminer E → ici $E = 0$ car $\deg(P) < \deg(Q)$
2. Déterminer a_2 et b → méthode précédente
3. Déterminer a_1

Étape 2. Déterminer a_2 et b dans

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+2}.$$

- En multipliant de part et d'autre par $(X+1)^2$ on obtient :

$$\frac{2X+1}{X+2} = a_1(X+1) + a_2 + \frac{b(X+1)^2}{X+2}$$

puis en substituant -1 à X on trouve $a_2 = -1$.

- En multipliant de part et d'autre par $(X+2)$ on obtient :

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2} = \frac{a_1(X+2)}{X+1} + \frac{a_2(X+2)}{(X+1)^2} + b$$

puis en substituant -2 à X on trouve $b = -3$.

Étape 3. Déterminer a_1 dans

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{-3}{X+2}.$$

Méthode A.

$$\iff \quad \frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} + \frac{1}{(X+1)^2} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{-3}{X+2}$$

Mise au m̂ dénominateur

$$\iff \quad \frac{3(X+1)}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{(3X+3)}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{-3}{X+2}$$

Simplification

$$\iff \quad \frac{3}{(X+1)(X+2)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{-3}{X+2}.$$

Puis on réapplique la méthode de l'étape 2.
(Multiplication par $X+1$ puis substitution de -1 à X)

Étape 3. Déterminer a_1 dans

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{-3}{X+2}.$$

Méthode B. Seulement s'il n'y a pas de coefficients complexes !
On multiplie de part et d'autre par $(X+1)$:

$$\frac{2X+1}{(X+1)(X+2)} = a_1 + \frac{-1}{(X+1)} + \frac{-3(X+1)}{X+2}.$$

Puis on regarde la limite lorsque X tend vers $+\infty$:

$$0 = a_1 + 0 - 3$$

On trouve alors $a_1 = 3$.

Étape 3. Déterminer a_1 dans

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{-3}{X+2}.$$

Méthode C.
On substitue à X une valeur qui n'apparaît pas dans les dénominateurs.
Par exemple, en substituant 0 à X, on trouve :

$$\frac{2*0+1}{(0+1)^2(0+2)} = \frac{a_1}{0+1} + \frac{-1}{(0+1)^2} + \frac{-3}{0+2},$$

et ainsi $a_1 = 3$.

Résumé de la méthode :

0. On met F sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$ et on décompose Q en produit de polynômes irréductibles

1. On calcule E en faisant la division euclidienne de P par Q :

$$P = EQ + R,$$

   après quoi on s'intéresse seulement la fraction $\frac{R}{Q}$.

2. On calcule les coefficients $a_{i,j}$, en commençant par ceux au-dessus des plus grandes puissances.

Question 3

On étudie la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{3X^3+4}{(X-2)^2(X+1)^2} = \frac{a_1}{X-2} + \frac{a_2}{(X-2)^2} + \frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2}.$$

$\times(X+1)^2$

$X=-1$

$X=-1$

Si je veux trouver le coefficient b_2 :

1. Je multiplie tout par $(X-2)$ et je substitue 2 à X
2. Je multiplie tout par $(X-2)^2$ et je substitue 2 à X
3. Je multiplie tout par $(X+1)$ et je substitue -1 à X
4. Je multiplie tout par $(X+1)^2$ et je substitue -1 à X
5. Aucune de ces méthodes ne fonctionne

Question 4

On étudie la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{3X^3+4}{(X-2)^2(X+1)^2} = \frac{a_1}{X-2} + \frac{a_2}{(X-2)^2} + \frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2}.$$

en $X=2$

0

$\times (X-2)^2$

$$\iff \frac{3X^3+4}{(X+1)^2} = a_1\cancel{(X-2)}^{\,0} + a_2 + (X-2)^2\left(\frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2}\right)$$

Si je veux trouver le coefficient a_1 :

1. Je multiplie tout par $(X-2)$ et je substitue 2 à X
2. Je multiplie tout par $(X-2)^2$ et je substitue 2 à X — permet de trouver a_2
3. ~~Je multiplie tout par $(X+1)$ et je substitue -1 à X~~
4. ~~Je multiplie tout par $(X+1)^2$ et je substitue -1 à X~~ — Permet de trouver les (b_j)
5. Aucune de ces méthodes ne fonctionne

Exercice

Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{2X^3 - 1}{(X^2-1)(X+1)}.$$

Les étapes sont les suivantes :

1. division euclidienne pour déterminer la partie entière $E(X)$
2. factorisation du dénominateur en produit d'irréductibles
3. écriture de la forme de la décomposition en éléments simples
4. recherche des coefficients

$$F(X) = \frac{2X^3-1}{(X^2-1)(X+1)} = \frac{2X^3-1}{X^3+X^2-X-1}$$

⚠ $X^3+X^2-X-1 = (X^2-1)(X+1) = (X-1)(X+1)^2$

(1)

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2X^3} - 1 & X^3 + X^2 - X - 1 \\ -(\cancel{2X^3} + 2X^2 - 2X - 2) & \overline{\quad 2 \quad} \\ \hline -2X^2 + 2X + 1 & \end{array}$$

Donc $F(X) = 2 + \dfrac{-2X^2+2X+1}{X^3+X^2-X-1}$

(2) $= 2 + \dfrac{-2X^2+2X+1}{(X-1)(X+1)^2}$

(3) $= 2 + \dfrac{a_1}{X-1} + \dfrac{b_1}{(X+1)} + \dfrac{b_2}{(X+1)^2}$

(4)

- Calcul de a_1 et b_2 :

↳ $F(X)(X-1) = \underbrace{\cancel{2(X-1)}}_{\to 0} + a_1 + \underbrace{\cancel{(X-1)\left(\frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2}\right)}}_{\to 0}$

$\underset{X=1}{\Longrightarrow} \quad \left(F(X)(X-1)\right)\Big|_{X=1} = a_1$

$\Longrightarrow \quad a_1 = \left(\dfrac{2X^3-1}{\cancel{(X-1)}(X+1)^2} \times \cancel{(X-1)}\right)\Bigg|_{X=1} = \dfrac{1}{4}$

↳ $F(X)(X+1)^2 = \underbrace{\cancel{2(X+1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{\cancel{a_1\frac{(X+1)^2}{}}}_{\to 0} + \underbrace{\cancel{b_1\frac{(X+1)^2}{(X+1)}}}_{\to 0} + b_2\dfrac{\cancel{(X+1)^2}}{\cancel{(X+1)^2}}$

$\underset{X=-1}{\Longrightarrow} \quad b_2 = \left(F(X)(X+1)^2\right)\Big|_{X=-1} = \left(\dfrac{2X^3-1}{(X-1)\cancel{(X+1)^2}}\cancel{(X+1)^2}\right)\Bigg|_{X=-1}$

$= \left(\dfrac{-2-1}{-2}\right) = \dfrac{3}{2}$

- Calcul de b_1 :

Rappelons que

$$F(X) = \frac{2X^3-1}{(X-1)(X+1)^2} = 2 + \frac{1/4}{X-1} + \frac{b_1}{X+1} + \frac{3/2}{(X+1)^2}$$

Ainsi $$F(X) - \frac{3/2}{(X+1)^2} = \frac{2X^3-1 - \frac{3}{2}(X-1)}{(X-1)(X+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4X^3-2-3X+3}{(X-1)(X+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{4X^3-3X+1}{(X-1)(X+1)^2}$$

$$\overset{?}{=} 2 + \frac{1/4}{X-1} + \frac{b_1}{X+1}$$

⚠ $(4X^3-3X+1)_{|X=-1} = 0$! Donc

$$(4X^3-3X+1) = (X+1)(4X^2-4X+1)$$

↑ poser la div euclidienne ou identification

Donc $$2 + \frac{1/4}{X-1} + \frac{b_1}{X+1} = F(x) - 3/2 \,/\, (X+1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{(X+1)}(4X^2-4X+1)}{(X-1)(X+1)^{\cancel{2}}}$$

Donc $$b_1 = \left[\left(2 + \frac{1/4}{X-1} + \frac{b_1}{X+1}\right)\times(X+1)\right]_{|X=-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(4X^2-4X+1)\cancel{(X+1)}}{(X-1)\cancel{(X+1)}}\right)_{|X=-1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4+4+1}{-1-1} = \frac{-9}{4}.$$

(1)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{X^4}+3X^2+3 & X^3+X \\ \hline -(\cancel{X^4}+X^2) & X \\ \quad 2X^2+3 & \end{array}$$

Donc

$$F(X) = X + \frac{2X^2+3}{X^3+X}$$

Exemple 15

(2) $X^3+X = X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$

1. Déterminer la partie entière de $F(X) = \dfrac{X^4+3X^2+3}{X^3+X}$.
2. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme X^3+X.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$.
4. En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

(3) Thm de structure :

$$F(X) = X + \frac{a}{X} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

⚠ $a, b, c \in \mathbb{C}$!

Trouvons a, b, c.

↳ $a = (F(X)\,X)_{|X=0} = \left(\dfrac{X^4+3X^2+3}{\cancel{X}(X-i)(X+i)} \times \cancel{X}\right)_{|X=0}$

$= \dfrac{3}{1} = 3.$

↳ Affirmation : $b = \overline{c}$

$\overset{}{\underset{c}{b}} = \left(F(X)(X\overset{+}{-}i)\right)_{|X=\overset{-}{}i} = \left(\dfrac{X^4+3X^2+3}{X\cancel{(X-i)}(X+\cancel{i})}\;\cancel{(X-i)}\right)_{|X=-i}$

$= \dfrac{1-3+3}{-i\,(-2i)} = \dfrac{1}{2i^2} = -\frac{1}{2}$

Donc $F(X) = X + \dfrac{3}{X} - \dfrac{1/2}{X-i} - \dfrac{1/2}{X+i}$

décomposition dans $\mathbb{C}(X)$!

(4) Remarquez que sont conjugués.

$F(X) = X + \dfrac{3}{X} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{X-i+X+i}{(X-i)(X+i)}$

$= X + \dfrac{3}{X} - \dfrac{X}{X^2+1}$

bien dans $\mathbb{R}(X)$!

Question 5 (Qu'est ce que votre intuition dit ?)

Quelle est la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F(X) = \frac{2X^6+3X^5-3X^4-3X^3-3X^2-18X-5}{(X+2)(X-1)^2(X^2+X+1)} \quad ? \qquad = \frac{\deg 6}{\deg 5}$$

$$\Downarrow$$

$$\deg E(X) = 1$$

❶ $\cancel{\dfrac{a}{(X+2)} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+X+1)}}$

❷ $\cancel{\dfrac{a}{(X+2)} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)} + \dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+X+1)}}$

❸ $AX+B+\dfrac{a}{(X+2)} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)} + \dfrac{\alpha}{(X^2+X+1)}$

❹ $AX+B+\dfrac{a}{(X+2)} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)} + \dfrac{\alpha X+\beta}{(X^2+X+1)}$

$$E(X) = 2X + B.$$

À venir

- TD 19 : préparer l'exercice 18

- Dates limites DM WIMS :
  - DM9 - Polynômes, degré et multiplicité des racines - 6 décembre 2020
  - DM10 - Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples - 13 décembre 2020