Chapitre 2 : Nombres complexes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Jeudi 5 Novembre 2020

CM15 : Formule de l'angle multiple et linéarisation

But : calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} (\cos x)^5 dx$.

Plan :

- la formule du binôme,
- formule de l'angle multiple,
- linéariser un polynôme trigonométrique.

1. Formule du binôme de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle ***factorielle*** n l'entier :

$$n! := 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n,.$$

avec la convention $0! = 1$.

Par exemple :

- $1! = 1$.
- $2! = 2$.
- $3! = 6$, etc.

Exemple

Calculons $\frac{10!}{8!}$. $= \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$. Les ***coefficients binomiaux*** sont :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

= Nombre de sous-ensembles $A \subset \{1, \dots, n\}$

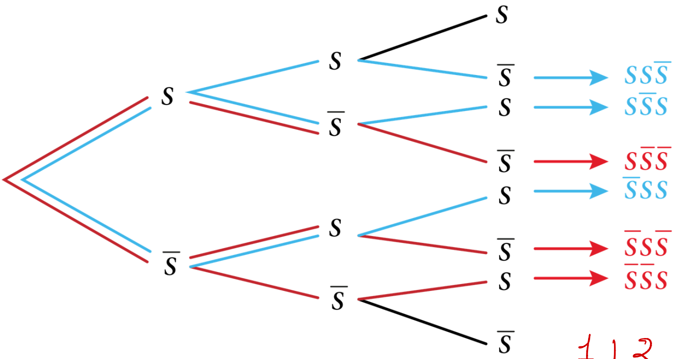
thm de Terminale

avec card $A = k$

Remarque

Ils se lisent « k parmi n ».

Dans un schéma de Bernouilli, il a été vu que le nombre de façons d'obtenir k succès lors de n itérations est égal à $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.



1	2	3
S	$\overline{S}$	$\overline{S}$

Calcul.

$$\binom{25}{5} \overset{\text{def}}{=} \frac{25!}{5!\,(25-20)!} = \frac{25!}{5!\,20!}$$

Question 1

1. $\binom{25}{5} < \binom{25}{20}$
2. $\binom{25}{5} = \binom{25}{20}$
3. $\binom{25}{5} > \binom{25}{20}$
4. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

$$\binom{25}{20} = \frac{25!}{20!\,\underbrace{(25-20)}_{5}!} = \frac{25!}{5!\,20!}$$

Symétrie :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Idée Choisir A de card k dans $\{1, \dots, n\}$ c'est pareil que choisir le complémentaire A^c de card $n-k$

$$\rightsquigarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Nous avons toujours :

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

ainsi que l'égalité :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour développer $(a+b)^n$, on utilise ***la formule du binôme de Newton*** :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple

$n=2$

k	0	1	2
$\binom{n}{k}$	1	2	1

Cas $n=2$:

- $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$
- $\binom{2}{1} = 2$

On retrouve ainsi : $(a+b)^2 = 1b^2 + \underline{2}ab + 1a^2$.

Comment calculer les $\binom{n}{k}$?

À l'aide des relations de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \qquad (*)$$

Exercice : Preuves * calcul $(*) \Leftarrow$ ...

* Combinatoire

À l'aide des relations de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

En effet, ces relations permettent de calculer effectivement les coefficients du binôme grâce au ***triangle de Pascal*** :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$\binom{n}{k}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 - - - 1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(2+i)^4 = 1\,2^4 + 4\,2^3\cdot i + 6\,2^2 i^2 + 4\,2\cdot i^3 + 1\, i^4$$

$$= 2^4 + 4\cdot 2^3 i + \underbrace{6}_{2\times 3}\cdot 2^2 \underbrace{i^2}_{-1} + 4\cdot 2 \underbrace{i^3}_{-i} + \underbrace{i^4}_{1}$$

Question 2

À quoi est égal $(2+i)^4$?

1. $-7+16i$
2. $41+40i$
3. $-7+24i$
4. $41+16i$
5. 17
6. $16+i$
7. Aucune de ces propositions.

$$= (2^4 - 6\cdot 2^2 + 1) + i\,(4\cdot 2^3 - 4\cdot 2)$$

$$= (2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^3 + 1) + i\,(2^5 - 2^3)$$

$$= \underbrace{(-2^3+1)}_{-7} + \underbrace{i\, 2^3 \underbrace{(4-1)}_{3}}_{\underbrace{8\times 3}_{24}}$$

$$= -7 + i24.$$

Exercice 21

En utilisant la formule du binôme, développer $(a+b)^8$.

Comparons avec le fait de développer directement.

OK

Exemple

Calculons $(a-b)^3$.

2. Formule de l'angle multiple

Dans cette partie, nous voulons écrire

$\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Pour cela nous allons utiliser la formule de Moivre :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

$\sin(nx)$
$\cos(nx)$
$= ?$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$

def de $e^{i\theta}$

Méthode : Par une formule.

1. $\cos(nx) = Re((\cos x + i \sin x)^n)$.
   $\sin(nx) = Im((\cos x + i \sin x)^n)$.
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

$\cos(nx) = Re\, e^{inx} = Re\,(e^{ix})^n = Re\,(\cos x + i\sin x)^n$

« Package » toutes les formules de trigo.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Pour votre culture

$\sin(nx) = \sin x \, U_n(\cos x)$

où $U_2(X) = 2X$

$U_3(X) = 4X^2 - 1$

(U_n polynôme de Tchebytchev de 2e espèce)

En fait (Exo classique)

$\cos(nx) = T_n(\cos x)$

avec ici $T_2(X) = 2X^2 - 1$

$T_3(X) = 4X^3 - 3X$

(T_n = Polynômes de Tchebytchev)

Exemple

Regardons ce que ça donne par exemple pour $\cos(3x)$.

$$(\cos x + i \sin x)^3 = 1\cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i\sin x) + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + 1(i\sin x)^3$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \cdot \sin^2 x + i\left[3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x\right]$$

En prenant Re, Im

$$\begin{cases} \cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \cdot \overbrace{\sin^2 x}^{1-\cos^2 x} = 4\cos^3 x - 3\cos x = T_3(\cos x) \\ \sin(3x) = 3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x = \sin x\,\underbrace{(4\cos^2 x - 1)}_{U_3(\cos x)} \end{cases}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Exercice 22

1. Donnez explicitement $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, leur produit ou leur puissance. (Fait)
2. Donnez explicitement $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, leur produit ou leur puissance.

$$e^{i4x} = (\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4\cos^3 x(i\sin x) + 6\cos^2 x(i\sin x)^2 + 4\cos x(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4$$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x \quad (\cos 4x)$$

$$+ i\sin x(4\cos^3 x - 4\cos x\cdot\sin^2 x) \quad (\sin 4x)$$

3. Linéarisation d'une expression trigonométrique

LINEARISER : Transformer des puissances de $\cos x$ $\sin x$

en des combinaisons LINEAIRES de ($\cos nx$, $\sin nx$) $n \in \mathbb{N}$

> ***Linéariser une expression trigonométrique*** c'est transformer des puissances et/ou des produits de cosinus et de sinus en sommes.

Les formules clés pour linéariser sont les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Méthode pour linéariser :

❶ Remplacer les $\cos(x)$ et $\sin(x)$ par des exponentielles à l'aide des formules d'Euler.

❷ Développer les puissances à l'aide de la formule du binôme de Newton et/ou développer les produits.

❸ Transformer les exponentielles en cosinus et sinus à l'aide des formules d'Euler.

Exemple 8

Euler

Commençons par linéariser $\cos(x)^2$.

$$\int^x \cos^2 x \, dx = \int^x \left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}$$

Binôme

Euler

$$\begin{aligned}
\cos(x)^2 &\overset{1.}{=} \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&\overset{2.}{=} \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2\,e^{ix}\,e^{-ix}+e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right) \\
&\overset{3.}{=} \frac{1}{4}\left(2\cos(2x)+2\right) \\
&= \frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit aisément que la fonction

$$F(x) = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} + C, \text{ où } C \text{ est une constante,}$$

est une primitive de $\cos(x)^2$.

Exemple 8

Linéarisez $\sin(x)^2$.

PAREIL

Euler

$$\sin(x)^2 \overset{1.}{=} \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

Binôme

$$\overset{2.}{=} \frac{-1}{4}\left(e^{2ix}-2\,e^{ix}\,e^{-ix}+e^{-2ix}\right)$$

Rassemble

$$= \frac{-1}{4}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

Euler

$$\overset{3.}{=} \frac{-1}{4}\left(2\cos(2x)-2\right)$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

De mémoire ! $\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$

SINON

Question 3

Laquelle des propositions suivantes est la linéarisation de $\cos(x)\sin(x)$?

1. $\cancel{\cos(x)\sin(x)}$ Pas une linéarisation
2. $\dfrac{\sin(2x)}{2}$
3. $\cancel{\dfrac{\cos(2x)}{2i}}$ $\notin \mathbb{R}$
4. $\dfrac{\sin(2x)}{2} - \dfrac{1}{2}$
5. $\cancel{\dfrac{\cos(2x)}{2i} - \dfrac{1}{2i}}$ $\notin \mathbb{R}$
6. Aucune de ces propositions.

$\cos x \cdot \sin x$

$\overset{\text{Euler}}{=} \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$

$= \dfrac{e^{i2x}-e^{-2x}}{4i}$

$\overset{\text{Euler}}{=} \dfrac{\sin 2x}{2}$

• Linéarisation :

$$\cos^4 x \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \overset{\text{Newton}}{=} \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4\, e^{i3x} e^{-ix} + 6\, e^{i2x} e^{-i2x} + 4\, e^{ix} e^{-i3x} + e^{-i4x}\right)$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right)$$

Exercice 24

$$\overset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{16}\left(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

Déterminez une primitive de $\cos^4(x)$.

• Primitivation :

$$\int^X \cos^4 x \, dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8}X + \text{Cste} \dots$$

CECI CLOT LE CHAPITRE 2 : Complexes

↳ Next : CHAPITRE 3 : Polynômes.

À venir

- CC2 dans 2 semaines
  - à priori en présentiel.
  - en attente de confirmation de la FSI.
- TD 15 : préparer les linéarisations A et B de l'exercice 32
- Dates limites DM WIMS :
  - DM7 - Forme exponentielle et formules trigonométriques - 15 novembre 2020
  - DM8 - Racines carrées et équations du second degré - 29 novembre 2020
  - DM9 - Polynômes, degré et multiplicité des racines - 6 décembre 2020
  - ...