Chapitre 2 : Nombres complexes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Jeudi 15 Octobre 2020

CM11 : Exponentielle d'un nombre complexe

But : donner le module et l'argument de $(1+i)^{51}$.

$(1+i) = e^{z}$ & $(e^{z})^{51}$

$= e^{51 z}$

Plan :

- les nombres complexes de module 1,
- les formules d'Euler et de Moivre,
- exponentielle complexe et argument.

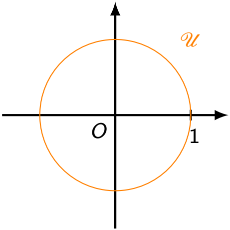
1. Nombres complexes de module 1

Definition

L'ensemble des nombres complexes de module 1, noté $\mathscr{U}$, est :

$$\mathscr{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

$$z = a + \mathrm{i}b \in \mathscr{U} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1.$$



Soient $z, z' \in \mathcal{U}$ alors :

- $zz' \in \mathcal{U}$
- $\dfrac{1}{z} \in \mathcal{U}$.

Preuve : $(z, z') \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$

ie $1 = |z| = |z'|$

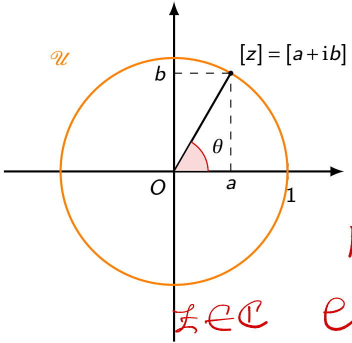
Alors $|zz'| = |z|.|z'|$

$= 1 \times 1 = 1$

$\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$

Donc

On dit que l'ensemble $\mathcal{U}$ est **stable par produit et par quotient**.



e^{x} $x \in \mathbb{R}$

$e^{i\theta}$ $\theta \in \mathbb{R}$

Mais

$z \in \mathbb{C}$ $e^{z} = e^{a+ib}$?

Il existe un unique θ dans $[0, 2\pi[$ tel que $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ et le cercle est paramétré par $z(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

On définit $e^{\mathrm{i}\theta}$ par : $e^{i\theta} := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

⚠ Définition

$= \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

Question 1

$= \cos\theta + i\sin\theta$

Le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ s'écrit :

1. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{\pi}{6}$,
2. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$,
3. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{7\pi}{6}$,
4. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

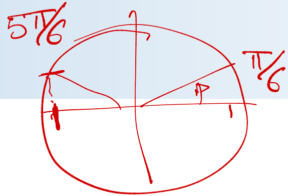
Question 2

Le nombre complexe $z = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ s'écrit :

1. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{\pi}{6}$,
2. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = -\frac{\pi}{6}$,
3. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$,
4. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$= e^{i\,5\pi/6}$.



Proposition 5

On a

$$e^{2i\pi} = e^{0} = 1 \text{ et } \; e^{i\pi} = -1.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Preuve:

$$e^{i2\pi} \overset{def}{=} \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

$$e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0)$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

$$= -1 + 0i = -1.$$

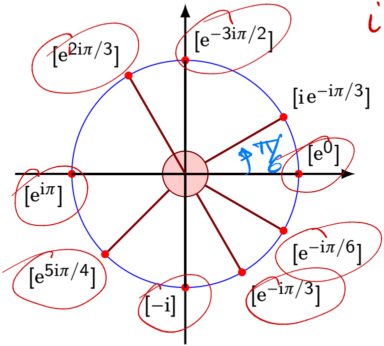
$$\overline{e^{i\theta}} \overset{def}{=} \overline{\cos\theta + i\sin\theta} \overset{def}{=} \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \overset{def}{=} e^{-i\theta}$$

Exercice 6

Positionner sur le cercle trigonométrique les points d'affixes

1. $-\mathrm{i}$
2. $e^{\mathrm{i}\pi}$
3. $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
4. $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
5. $\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
6. $e^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
7. $e^{-3\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
8. e^{0}
9. $e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$



$$i e^{-i\pi/3} = i\left(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\right) = i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\pi/6}$$

2. Formules d'Euler et de Moivre

Proposition 6. Formules d'Euler

On a les égalités suivantes :

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$,
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

dois vous rappeler

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Preuve : On applique les formules à $z = e^{i\theta}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \mathrm{Re}\, e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \mathrm{Im}\, e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

Donc $(e^{ix} - e^{-ix})^4 = (2i \sin x)^4$

$= 2^4 i^4 \sin^4 x$

$= 16 \sin^4 x$

Question 3

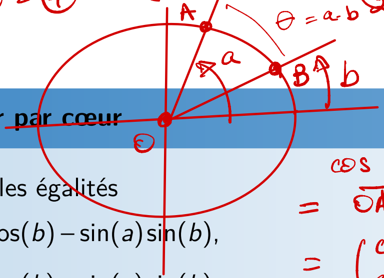
Si x est un nombre réel alors $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ vaut :

1. $-16\sin^4(x)$
2. $16\sin^4(x)$
3. $\cancel{16\cos^4(x)}$
4. $\cancel{2i\sin(4x)}$

Preuve : ② $\Longrightarrow$ ① avec $b \mapsto -b$

$\Longrightarrow$ ③ & ④ avec $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\theta = a - b$

Maintenant pour ② :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Proposition 7. À savoir par cœur

Pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, on a les égalités

❶ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,

❷ $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,

❸ $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$,

❹ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

$$\cos(a-b) = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

Cette table de formules

est EQUIVALENTE à $\longrightarrow$

Proposition 8. et 9. ♥

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :

❶ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$,

❷ $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-1} = e^{-\mathrm{i}\theta}$.

Preuve :

$$\cos(n\theta) = \cos((n-1)\theta + \theta)$$
$$= \cos((n-1)\theta) \cdot \cos\theta - \sin((n-1)\theta)\sin\theta$$
$$= \dots$$

NON

Proposition 10. Formule de Moivre

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n.$$

Autrement dit :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n.$$

Preuve:

$$e^{in\theta} = e^{i(\underbrace{\theta+\theta+\dots+\theta}_{n \text{ fois}})}$$
$$= \underbrace{e^{i\theta} \times e^{i\theta} \times \dots \times e^{i\theta}}_{n \text{ fois}} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

n fois.

$e^{it} = \cos t + i \sin t$ 2π-périodique

Question 4

La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (e^{it})^2$ est périodique de période :

1. 1,
2. 2π,
3. π,
4. n'est pas périodique.

$= e^{i2t}$ de Moivre

$= \cos 2t + i \sin 2t$

π - périodique.

$(a+b)^n$

	n	
1	0	1
$a+b$	1	1 1
$a^2+2ab+b^2$	2	1 2 1
$a^3+3a^2b+3ba^2+a^3$	3	1 3 3 1
	4	1 4 6 4 1

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exercice

Calculer avec et sans la formule de Moivre $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$.

AVEC : $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi/3\right) = e^{i2\pi/3}$

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \overset{\text{def}}{=} \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 \underset{\text{de Moivre}}{=} e^{i\frac{2\times 4\pi}{3}} = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2}+i\sqrt{3}/2.$$

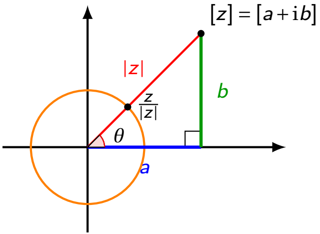
SANS : $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = (a+ib)^4$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^2\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \ldots$$

C'est pas génial ....

3. Exponentielle complexe et argument

Soit $z \neq 0$, alors $\dfrac{z}{|z|} \in \mathscr{U}$ donc est de la forme $e^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.



Definition

L'***argument principal de*** z, noté $\mathrm{Arg}(z)$, est l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathrm{i}\theta}. = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ainsi, tout nombre complexe z s'écrit : $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$. C'est l'écriture sous ***forme exponentielle*** de z.

Proposition 12. Unicité de l'écriture (modulo 2π)

Soit z un complexe **non nul**. Il existe un unique $r > 0$ et un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = r\,e^{i\theta}$. Le réel r est le module de z et θ est son argument.

Soient $r, r' > 0$ deux réels strictement positifs et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si

$$r\,e^{i\alpha} = r'\,e^{i\beta},$$

alors

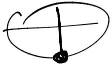
$$r = r' \text{ et } \alpha = \beta + 2k\pi,$$

pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve : si $r e^{i\alpha} = r' e^{i\beta}$

Alors $|\cdot| \Longrightarrow r = |r e^{i\alpha}| = |r' e^{i\beta}|$
$= r'$

Donc $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \cos\beta \\ \sin\alpha = \sin\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$



$-i = e^{i3\pi/2}$

Question 5

Quelle est la forme exponentielle de $-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$?

1. ~~il est déjà écrit sous forme exponentielle.~~
2. $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
3. $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$
4. $e^{\mathrm{i}\pi}$
5. ~~$-\mathrm{i}$.~~

$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$. $z' = |z'| e^{i \operatorname{Arg} z'}$

Proposition 13. Conséquence de la proposition précédente

Donc $zz' = |zz'| e^{i \operatorname{Arg} z} \cdot e^{i \operatorname{Arg} z'}$ $= |zz'| e^{i \operatorname{Arg} zz'}$

Si $z, z' \neq 0$, on a

- $\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') + 2k\pi$, pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$,
- $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$, pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$,
- $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') + 2k\pi$, pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$.

Conséquences de la 1ère.

Donc $e^{i(\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z')} = e^{i \operatorname{Arg} zz'}$

Remarque

Donc $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z' = \operatorname{Arg} zz' + 2k\pi$.

L'égalité $a = b + 2k\pi$, pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$ s'écrit aussi

$$a = b \ [2\pi].$$

On dit que a est ***congru à*** b ***modulo*** 2π.

Question 6

On a $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right) =$

1. $\frac{\pi}{6}$
2. $-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}$
3. $-\frac{\pi}{6}$
4. $\frac{11\pi}{6}$

Exercice 8

Donner le module et l'argument des complexes

1. $-2\mathrm{i}$,
2. $1+\mathrm{i}$,
3. $(1+\mathrm{i})^{51}$,
4. $-e^{\mathrm{i}\theta}$,
5. $\dfrac{-e^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{i}}$.

Définition finale :

$z = a+ib$

$\exp(z) = e^z := \underbrace{e^a}_{\text{module}}\, e^{ib}$

$e^{ib} = (\cos b + i \sin b)$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle d'un nombre complexe par la formule suivante

$$\exp(z) = e^a e^{ib}.$$

On notera aussi $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$.

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z').$$

$e^x . e^{x'} = e^{x+x'}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (Analyse, EDO)

$e^{i\theta} . e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ (TRIGO)

Question 7

L'ensemble M des points du plan ayant son affixe z qui vérifie

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{13\pi}{7}$$

est :

1. un disque,
2. un cercle,
3. un segment,
4. une demi-droite,
5. une droite.

À venir

- TD 11 : préparer la question 1.(a) de l'exercice 7
- Dates limites DM WIMS :
  - DM4 - Étude qualitative de fonctions - 11 octobre 2020
  - DM5 - Intégrales et primitives - 25 octobre 2020
  - DM6 - Nombres complexes - 8 novembre 2020
  - ...