Chapitre 3: Aspects intégrables:

Généralités: Lorsque l'on veut traiter les questions qui tombent dans la classe d'universalité Gaussienne (TCL, Donsker, Martingales ...), on utilise naturellement la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}$.

Pourquoi ?
$$\begin{cases} \mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}(\mu) \times \mathcal{F}(\nu) & (1) \\ \mathcal{F}(\mu)(\omega) = e^{-\omega^2/2} \Longleftrightarrow \mu(dx) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} & (2) \end{cases}$$

"point fixe" pour la convolut° + renormalisat°.

(1) Ici les probabilistes écrivent $\Phi_X(\omega) = \mathbb{E}(e^{i\omega X})$

et si $D = \sum a_k \partial_\omega^k$ opérateur différentiel
$= P(\partial_\omega)$

Alors $D\,\Phi_X(\omega) = \mathbb{E}\left(P(iX) e^{i\omega X} \right)$

$\rightsquigarrow \left[P(\partial_\omega)\Phi_X \right]_{\omega=0} = \mathbb{E}\left[P(iX) \right]$.

Pour expliquer (2), soit $\omega_1, \omega_2, \ldots$ v.a iid centrées réduites,

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ par CLT}$$

$\approx$ n convolut° puis renormalisat°.

mais que se passe-t-il si l'on regarde la question d'un point de vue dynamique ? Au lieu de regarder X_n globalement comme chez Donsker, on peut la regarder localement.

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{\omega_{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, X_n \\ &= X_n - \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) X_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, \omega_{n+1} \end{aligned}\right\} \text{ X_n est Markov}$$

Si $\Delta t = \frac{1}{n+1}$

Alors $$X_{n+1} - X_n \approx -\frac{1}{2} \Delta t\, X_n + \sqrt{\Delta t}\, \omega_{n+1}$$

ressemble à $\rightsquigarrow$ $$dX_t = -\frac{1}{2} X_t\, dt + dW_t$$

EDS du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour lequel $\mathcal{N}(0,1)$ est la mesure invariante.

Idée générale et conjecturale (Ref : Survey de Ivan Corwin)

Scaling :	$\sqrt{n}$	$\rightsquigarrow$	$n^{1/3}$
Loi universelle	$\mathcal{N}$	$\rightsquigarrow$	TW
	$\uparrow \mathcal{L}$		$\uparrow \mathcal{L}$
Processus	X_t ; $t \to +\infty$ Ornstein Uhlenbeck	$\rightsquigarrow$	$H(t,0)$ où $H(t,x)$ résout l'EDPS KPZ
Analyse harmonique :	Fourier sur $\mathbb{R}$ = Théorie des représentat° de $\mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	Théorie des représentations du groupe unitaire.
	Classe Gaussienne		Classe de KPZ

Nous nous concentrerons maintenant sur une forme combinatoire de la théorie des représentations des groupes unitaires, encodée par les tableaux de Young

1 Combinatoire des tableaux de Young

1.1 Définitions

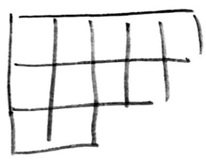
• Une partition de l'entier $n \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

telle que $|\lambda| := \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i = n$

Notons
$$\begin{cases} \mathbb{Y}_n := \{ \lambda : \lambda \text{ partition de } n \} \\ \mathbb{Y} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Y}_n . \end{cases}$$

La lettre $\mathbb{Y}$ fait référence à "Young" car une partition est souvent représentée par un <u>diagramme</u> de Young ou de Ferrer. C'est un empilement de boites, avec λ_i boites à la ligne i :

<u>Ex</u>. $\lambda = (5, 4, 2)$

$\equiv$ 

• λ' = diagramme transposé

$\ell(\lambda)$ = longueur de la partition i.e nombre de parts
$= \#\{ i : \lambda_i \neq 0 \} = \lambda'_1$.

• Un <u>tableau</u> est un remplissage d'un diagramme de Ferrer par des nombres formant un alphabet $A = \{1, 2, \dots, N\}$

Il existe deux typologies de tableaux interessants

↳ $SST(\mathbb{A})$: $P \in SST(\mathbb{A})$

est un tableau <u>semi-standard</u> lorsque le remplissage

par l'alphabet $\mathbb{A}$ est $\begin{cases} \text{faiblement croissant à l'horizontale} \\ \text{strictement croissant à la verticale.} \end{cases}$

<u>Ex</u>: $\mathbb{P} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array} \in SST(\mathbb{A})$

où $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$

On note $\underset{\in \mathbb{Y}}{sh\, P = \lambda}$, la forme du tableau càd la partit° sous-jacente.

Les $SST(\{1,2,\dots,N\})$ encodent la théorie des représentat° de U_N

<u>Remarque</u> $\left.\begin{array}{l} U_1 = S^1 \text{ le cercle} \\ SST(\{1\}) \simeq \mathbb{Y}_1 \simeq \mathbb{N}. \end{array}\right\}$ $L^2(S^1) \overset{\mathcal{F}}{\simeq} \ell^2(\mathbb{Z})$

$\underset{\substack{\text{Holomorphe} \\ \text{Espace de Hardy}}}{L^2}(S^1) \overset{\mathcal{F}}{\simeq} \ell^2(\mathbb{N})$

↳ $ST(\mathbb{A})$ $Q \in ST(\mathbb{A})$ est un tableau standard si le remplissage est strictement croissant horizontalement ET verticalement.

Je n'insiste pas sur les $ST(\mathbb{A})$ car $ST(\{1,\dots,N\})$ encode la théorie des représentations du groupe $\mathfrak{S}_N$; et je ferai en sorte que nous n'en ayons pas besoin dans ce cours.

- Le type ou le poids d'un tableau $P \in SST(\{1,2,\dots,N\})$ est $wt(P) = \{\#1, \#2, \dots, \#N\}$ <u>Ex</u>: $wt(\mathbb{P}) = (2,2,1)$ dans l'ex. précédent.

1.2 Fonctions de Schur.

Fixons $N \in \mathbb{N}$

Notation : $\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N \\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} \end{cases}$ est la notation multi-index pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$

Une partition particulière joue un rôle important, et c'est

$$\delta = (N-1, N-2, \dots, 1, 0)$$

Si $a_\alpha(x) := \det \left(x_i^{\alpha_j} \right)_{1 \leq i,j \leq N}$

Alors $$a_\delta(x) = \det \left(x_i^{N-j} \right)_{1 \leq i,j \leq N} = \begin{vmatrix} x_1^{N-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_N^{N-1} & \dots & x_N & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

est le déterminant de Vandermonde.

Thm/Def des fonctions de Schur :

Si $\lambda \in \mathbb{Y}$, $x \in \mathbb{C}^N$ avec $\ell(\lambda) \leq N$:

Alors la fonction Schur associée à la partition λ est :

$$s_\lambda(x) := \frac{a_{\lambda+\delta}(x)}{a_\delta(x)} \overset{\text{résultat}}{=} \sum_{\substack{P \in SST(\{1,2,\dots,N\}) \\ \mathrm{sh}\, P = \lambda}} x^{wt(P)}$$

De plus

- s_λ est symétrique et polynomiale.
- $(s_\lambda(x) \,;\, \ell(\lambda) \leq N)$ forment une base des fonctions symétriques à N variables.
- Cohérence : $s_\lambda(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$

$\ell(\lambda) \leq N-1$ $\qquad$ ↑ déf à N variables $\qquad$ ↑ déf à $(N-1)$ variables

Preuve :

* Démontrons d'abord les propriétés

- $s_\lambda(x) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(x)}{a_\delta(x)}$ est symétrique comme rapport de fonctions anti-symétriques.

Même si le fait d'être polynomial est évident sur la 2e expression, donnons tout de même un argument :

$a_{\lambda+\delta}(x)$ est anti-symétrique donc s'annule dès que $(x_i = x_j)$ (caractéristique $\neq 2$) donc $(x_i - x_j) \mid a_{\lambda+\delta}(x)$ donc le produit divise $a_{\lambda+\delta}(x)$ dans $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$

- $(s_\lambda(x) \; ; \; \lambda \in \mathcal{Y}_N)$ base des symétriques
$\iff (a_{\lambda+\delta}(x) \; ; \; \lambda \in \mathcal{Y}_N)$ base des anti-symétriques (Exercice Pourquoi ?)

Ensuite $a_{\lambda+\delta}(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma(\lambda+\delta)}$

$= x^{\lambda+\delta} + \dots$ orbite anti-symétrisée d'un monome $x^{\lambda+\delta}$

L'idée est de considérer une relation d'ordre sur les degrés pour parler de "plus grand degré". $\alpha \leq \beta$ est alors lexicographique.

Fait 1. Si $\alpha \in \mathbb{N}^N$, et il existe $\alpha_i = \alpha_j$ alors

$$a_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma\alpha} = 0$$

Fait 2. Si $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\alpha_i \neq \alpha_j$ alors

$$x^\alpha = x^{\sigma(\lambda+\delta)} \quad \text{pour } \lambda \text{ partition}$$

(Reordonner les α_i, qui donne $\mu_1 > \mu_2 > \dots$ puis $\mu = \lambda + \delta$)

Montrons maintenant que $(a_{\lambda+\delta}\ ;\ \lambda \in \mathbb{Y}_N)$ base. **IV**

↳ <u>Liberté</u> : $0 = \sum c_\lambda\, a_{\lambda+\delta}$

$$= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \sum_\lambda c_\lambda\, x^{\sigma(\lambda+\delta)}$$

$$= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, \sigma\Big(\underbrace{\sum_\lambda c_\lambda\, x^{\lambda+\delta}}_{\text{puissances ordonnées}} \Big)$$

En considérant la nullité des plus grandes puissances pour l'ordre lexicographique on a $\sum c_\lambda\, x^{\lambda+\delta} = 0$ puis $c_\lambda = 0 \ \forall \lambda$.

↳ <u>Génératrice</u> : Par définition, l'antisymétrisat° des monomes $(a_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}^N)$ génère ; donc $(a_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{Y}_{\ell(\alpha) \leqslant N})$ génère.

puis $(a_{\lambda+\delta}\ ;\ \lambda \in \mathbb{Y}_{\ell(\lambda) \leqslant N})$ génère (Fait 2).

- <u>Cohérence</u>. $\ell(\lambda) \leqslant N-1$

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = \frac{a_{\lambda+\delta}(x_1, \dots, x_{N-1}, 0)}{a_\delta(x_1, \dots, x_{N-1}, 0)}$$

$$= \frac{1}{x_1 \cdots x_{N-1}} \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+N-1} & \cdots & x_1^{\lambda_{N-1}+1} & 1^{\lambda_N} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{\lambda_1+N-1} & \cdots & x_{N-1}^{\lambda_{N-1}+1} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}{a_\delta(x_1, \dots, x_{N-1})}$$

$$= \frac{1}{x_1 \cdots x_{N-1}} \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+N-1} & \cdots & x_1^{\lambda_{N-1}+1} \\ & & \vdots \\ x_1^{\lambda_1+N-1} & \cdots & x_{N-1}^{\lambda_{N-1}+1} \end{vmatrix}}{a_\delta(x_1, \dots, x_{N-1})} = \frac{\cancel{x_1 \cdots x_{N-1}}}{\cancel{x_1 \cdots x_{N-1}}} \frac{a_{\lambda+\delta}(x_1, \dots, x_{N-1})}{a_\delta(x_1, \dots, x_{N-1})}$$

$$= s_\lambda(x_1, \dots, x_{N-1})$$

⤳ cela définit $s_\lambda(x)$ pour n'importe quel nombre de variables tant que $\ell(\lambda) \leqslant$ # NB de variables.

⤳ La 2^e égalité suggère que $s_\lambda(x) = 0$ si $\ell(\lambda) > N$ est la bonne définition.