$\boxed{4}$ Etude asymptotique de noyaux

<u>Objectif</u> : Le but de cette séance est de

DEMONTRER

Thm [Johansson 2000] $\qquad w \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Geom}(q)$

$M = \lfloor n x \rfloor = n x_n$, $\quad x_n \to x$

$N = \lfloor n y \rfloor = n y_n$

Alors
$$\frac{L_{M,N} - n\, S(x,y)}{\sigma(x,y)\, n^{1/3}} \xrightarrow{n \to +\infty} TW$$

où
$$S(x,y) = \frac{q(x+y)}{1-q} + \frac{2\sqrt{qxy}}{1-q} = s$$

$$\sigma(x,y) = \left[\frac{\sqrt{q(y+s)(x+s)}}{\left(1 - \sqrt{\frac{q(y+s)}{x+s}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{q(x+s)}{y+s}}\right)} \right]^{1/3}$$

<u>Ingrédients</u> :

1/ <u>Séance 10</u> : (Corollaire ☆)
$$\mathbb{P}(L_{M,N} \leq t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\ell_1, \dots, \ell_k = t}^{+\infty} \det\left(K_{N,M,q}(\ell_i, \ell_j)\right)$$

2/ <u>Séance 10</u> : (Okounkov) $\quad K = K_{N,M,q}$

satisfait
$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} K(i,j)\, \zeta^i \eta^{-j} = \frac{J(\zeta)}{J(\eta)} \frac{1}{1 - \eta/\zeta} \qquad |\eta| < |\zeta|$$

et
$$J(z) = \frac{(1 - \sqrt{q}/z)^N}{(1 + \sqrt{q}\, z)^M}$$

Preuve:

• Mq $K(i,j) = \sum_{k \geq 0} J_{M,N,q}(i+k)\, J'_{N,M,q}(j+k)$ où

En effet $J(z) = J_{M,N,q}(z) = \dfrac{(1-\sqrt{q}/z)^N}{(1-\sqrt{q}\,z)^M}$

$$= \frac{1}{J_{N,M,q}(1/z)} = \frac{1}{J'(1/z)}$$

Donc si $J_{M,N,q}(z) = \sum z^n J(n)$, $J_{N,M,q}(z) = \sum z^n J'(n)$

alors $\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} K(i,j)\, \zeta^i \eta^{-j}$

$$= \frac{J(\zeta)}{J(\eta)} \frac{1}{-\frac{\eta}{\zeta}+1} = \frac{\eta}{\zeta} J(\zeta) J'(1/\eta) \frac{1}{1-\eta/\zeta}$$

$$= \frac{\eta}{\zeta} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2}} \zeta^i J(i)\, \eta^{-j} J'(j) \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{-k}$$

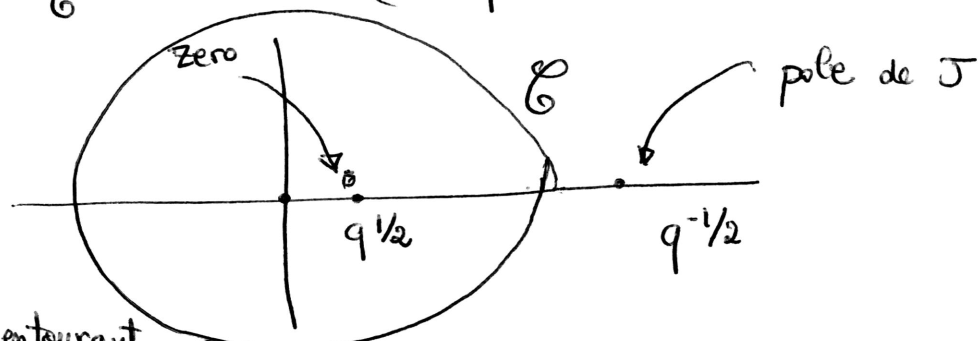
$$= \sum_{\substack{k \geq 0 \\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2}} \zeta^{i+k} \eta^{-(j+k)} J(i)\, J'(j)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \zeta^i \eta^{-j} \sum_{k \geq 0} J(i+k)\, J'(i+k)$$

- Expression par $\int$ de contour :

$$J_{N,M,q}(j) = \frac{1}{2\pi}\int d\theta\; e^{-ij\theta}\; J_{N,M,q}(e^{i\theta})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z}\; z^{-j}\; \frac{\left(1-\sqrt{q}/z\right)^{N}}{\left(1-\sqrt{q}\,z\right)^{M}}$$



où $\mathcal{C}$ est n'importe quel contour évitant 0, $q^{1/2}$, $q^{-1/2}$ & entourant 0, $q^{1/2}$

En écrivant
$$\begin{cases} M = x_n\, n \\ N = y_n\, n \\ n\, s(x_n, y_n) = \dfrac{q(n x_n + n y_n)}{1-q} + \dfrac{2\sqrt{q n^2 x_n y_n}}{1-q} \end{cases}$$

On a :

$$J_{N,M,q}(j) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z}\; z^{-(j - n\, s(x_n,y_n))}\; \exp\Big[\underbrace{-n\, s(x_n,y_n)\log z + n\, y_n \log\left(1-\sqrt{q}/z\right) - n\, x_n \log\left(1-\sqrt{q}\,z\right)}_{n\, g(z)}\Big]$$

où $g = g_{x,y}$

<u>Idée</u> : Méthode de Laplace / Steepest descent pour l'asymptotique $n \to +\infty$.

Points critiques de g ?

• Étude de la fonction g : $\boxed{\text{IV}}$

$$g_{y,x}(z) = g(z)$$
$$= -s(x,y)\log z + x\log(1-\sqrt{q}/z) - y\log(1-\sqrt{q}\,z)$$

Points critiques ?

$$\Rightarrow z\,g'(z) = -s(x,y) + \frac{x\sqrt{q}\,z/z^2}{1-\sqrt{q}/z} + \frac{y\sqrt{q}\,z}{1-\sqrt{q}\,z}$$

$$= -s(x,y) + \frac{x\sqrt{q}/z}{1-\sqrt{q}/z} + \frac{y\sqrt{q}\,z}{1-\sqrt{q}\,z}$$

$$= \frac{1}{(1-\sqrt{q}/z)(1-\sqrt{q}\,z)}\Big[\underbrace{-s(x,y)\overbrace{(1-\sqrt{q}/z)(1-\sqrt{q}\,z)}^{1+q-\sqrt{q}(z+1/z)} + x\overbrace{\sqrt{q}/z\,(1-\sqrt{q}\,z)}^{\sqrt{q}/z\;-q} + y\underbrace{\sqrt{q}\,z\,(1-\sqrt{q}/z)}_{\sqrt{q}\,z\;-\;q}}_{\substack{-s(x,y)(1+q)-qx-qy+z(\sqrt{q}\,s(x,y)+\sqrt{q}\,y)\\ +\frac{1}{z}(\sqrt{q}\,s(x,y)+\sqrt{q}\,x)}}\Big]$$

$$= \frac{1}{(1-\sqrt{q}/z)(1-\sqrt{q}\,z)}\left\{ z\sqrt{q}\,(y+s(x,y)) + \frac{\sqrt{q}}{z}(x+s(x,y)) - (1+q)\,s(x,y) - qx - qy \right\}$$

$$= \frac{1}{(z-\sqrt{q})(1-\sqrt{q}\,z)}\left\{ z^2\sqrt{q}\,(y+s(x,y)) + \sqrt{q}\,(x+s(x,y)) - (1+q)\,s(x,y) - qx - qy \right\}$$

Trinôme !

$$\Delta = \left[q(x+y) + (1+q)s(x,y)\right]^2 - 4q\,(x+s)(y+s)$$

$$= q^2(x+y)^2 + 2q(1+q)(x+y)s + (1+q)^2 s^2$$
$$\quad - 4q s^2 - 4q\,xy + 4qs\,(x+y)$$

$$= q^2(x+y)^2 - 4q\,xy + (1-q)^2 s^2$$
$$\quad - 2q(1-q)\,s\,(x+y)$$

$$= \left(q(x+y) - (1-q)s\right)^2 - 4q\,xy$$

⚠ $s(x,y) = s = \dfrac{q(x+y)}{1-q} + \dfrac{2\sqrt{qxy}}{1-q}$

$\Longrightarrow$ $\Delta = 0$! z^* racine double !

$$(z^*)^2 = \frac{x+s}{y+s}$$ Point clé.

Donc
$$\begin{cases} z g'(z) = \dfrac{1}{z(z-\sqrt{q})(1-\sqrt{q}z)}\,\sqrt{q}\,(y+s)\,\left[z - z^*\right]^2 \\ z^* = \sqrt{\dfrac{x+s}{y+s}} \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$z^*_{y,x} = z^* = (z^*_{x,y})^{-1}$

- Où se trouve z^* dans le plan complexe ?

Idéalement $\quad q^{1/2} < z^* < q^{-1/2}$ $\quad$ oui !

$$\Longleftrightarrow \quad q < \frac{x+s}{y+s} < q^{-1} \Longleftrightarrow q < \frac{x+qy+2\sqrt{qxy}}{y+qx+2\sqrt{qxy}} < q^{-1}$$

ainsi nous pourrons choisir un contour passant par z^*.

De plus $g(z) - g(z^*)$ (Ici $g = g_{y,x}$)

$$\overset{z \to z^*}{=} (1+o(1)) \frac{\sqrt{q}\,(y+s)\,(z^*)^2}{\cancel{z^*}(z^*-\sqrt{q})(1-\sqrt{q}\,z^*)} \frac{(z-z^*)^3}{3}$$

$$\sim \frac{(z-z^*)^3}{3(z^*)^3} \frac{\sqrt{q}\,(y+s)(z^*)^2}{(z^*-\sqrt{q})(1-\sqrt{q}\,z^*)}$$

$$\sim \frac{(z-z^*)^3}{3(z^*)^3} \underbrace{\frac{\sqrt{q\,(y+s)\,(x+s)}}{(1-\sqrt{q}/z^*)\,(1-\sqrt{q}\,z^*)}}_{\text{symétrique en } (x,y)}$$

car $z^*_{x,y}\, z^*_{y,x} = 1$!

$$\sim \sigma(x,y)^3 \, \frac{\left(\frac{z}{z^*} - 1\right)^3}{3}$$

⚠ $g_{x,y}(z^*_{x,y}) + g_{y,x}(z^*_{y,x}) = 0$

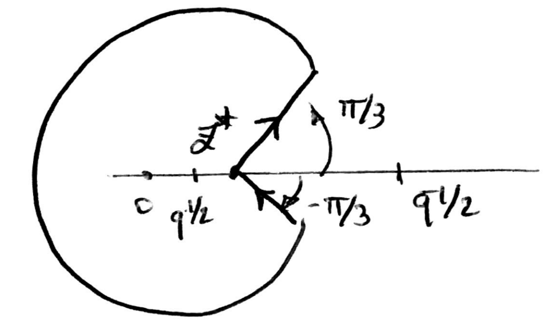
- <u>Conclusion</u> :

$$K(i+ns(x,y),\ j+ns(x,y))$$

$$= \sum_{k \geq 0} J_{M,N,q}(i+ns+k)\, J_{N,M,q}(j+ns+k)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i z} z^{-(i+k)} e^{n\left[g_{x_n,y_n}(z) - g_{x,y}(z^*_{x,y})\right]} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i z} z^{-(j+k)} e^{n\left[g_{y_n,x_n}(z) - g_{y,x}(z^*_{y,x})\right]}$$

En appliquant la technique de la steepest descent sur le contour :



seule la contribut° au voisinage du point critique z^* subsiste alors que $n \longrightarrow +\infty$.

De plus les angles $\pm\pi/3$ sont choisis car ce sont les direct° où $e^{n\frac{\sigma(x,y)^3 (z-z^*)^3}{3(z^*)^3}}$ décroit le + vite !

(Point critique dégénéré). Remarque : Airy se rapproche.

Ainsi en ne se souciant pas des contrôles précis sur la CV :

$$K(ns+i,\ ns+j)$$

$$= \sum_{k \geq 0} (1+o(1)) \int_{z^*_{x,y}} \frac{dz}{2\pi i z} z^{-(i+k)} e^{\frac{n}{3}\left(\sigma(x,y)\left(\frac{z}{z^*}-1\right)\right)^3}$$

$$\int_{z^*_{y,x}} \frac{dz}{2\pi i z} z^{-(j+k)} \cdots$$

Centrage / Changt de var $\quad z = z^* + \dfrac{u}{n^{1/3}\sigma(x,y)}$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{(1+o(1)) (z^*_{x,y})^{-(i+k)}}{(2\pi i)^2 (n^{1/3}\sigma)^2} \int_0^{n^{1/3}} du \left(1 + \frac{u}{n^{1/3}\sigma(x,y)}\right)^{-(i+k)} e^{\frac{u^3}{3}}$$

$$\int_0^{O(n^{1/3})} du \left(1 + \frac{u}{n^{1/3}\sigma(x,y)}\right)^{-(j+k)} e^{u^3/3}$$

def de Airy (séance 10)

$$= \sum_{k\geq 0} (1+o(1))\, Ai\left(\frac{(i+k)}{n^{1/3}\sigma(x,y)}\right) Ai\left(\frac{j+k}{n^{1/3}\sigma(x,y)}\right) \frac{1}{(n^{1/3}\sigma(x,y))^2} \times (z^*_{x,y})^{i-j}$$

D'où

$$n^{1/3}\sigma(x,y)\, K(ns + n^{1/3}\sigma x,\ ns + n^{1/3}\sigma y)\, (z^*_{x,y})^{j-i}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{(1+o(1))}{n^{1/3}\sigma(x,y)}\, Ai\left(x + \frac{k}{n^{1/3}\sigma(x,y)},\ y + \frac{k}{n^{1/3}\sigma(x,y)}\right)$$

$$\simeq (1+o(1)) \int_0^{+\infty} Ai(x+u)\, Ai(y+u)\, du$$

$$= (1+o(1))\, Ai(x,y)$$ Noyau d'Airy.

Maintenant :

$$\mathbb{P}\left(\frac{L_{M,N} - ns}{n^{1/3}\sigma} \leq t\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\ell_1,\dots,\ell_k = ns + n^{1/3}\sigma t}^{+\infty} \det\left(K(\ell_i,\ell_j)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{\sum_{\ell_1,\dots,\ell_k = n^{1/3}\sigma t}^{+\infty} \frac{1}{(n^{1/3}\sigma)^k} \det\left(n^{1/3}\sigma K(ns+\ell_i, ns+\ell_j)\right)}_{\text{sommes de Riemann}} \quad (z^*_{x,y})^{\ell_i - \ell_j}$$

conjugaison

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \det(Id - Ai)_{L^2([t;+\infty[)} \longrightarrow \int_{[t;+\infty[^k} \det(Ai(x_i,x_j))\, dx_1 \dots dx_k$$