M2RI — Systèmes de particules: Aspects analytiques et intégrables

20 février 2019, Durée : 2h30

Exercice 1 : Cours

- Donner les deux définitions équivalentes des fonctions de Schur.
- Démontrer que les fonctions de Schur sont cohérentes :

$$\forall x \in \mathbb{C}^N,\ s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N, 0)\ .$$

- Démontrer que si λ est une partition alors $x \in \mathbb{C}^N \mapsto s_\lambda(x)$ est un polynôme homogène de degré total $|\lambda|$.

Exercice 2 : Convexité

Les fonctions considérées sont supposées lisses.

1. Montrer que si $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est convexe (coordonnée par coordonnée), et que $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est aussi convexe *et* croissante coordonnée par coordonnée alors

$$H = L \circ K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

   est convexe.
2. Montrer que $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(u, v) := \log\left(e^u + e^v\right)$$

   est croissante (coordonnée par coordonnée) et convexe.
3. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes, montrer que

$$H : x \mapsto \log\left(e^{F(x)} + e^{G(x)}\right)$$

   est aussi convexe. On pourra poser $K(x) = (F(x), G(x))$.
4. Déduire par récurrence que si $F_1, \dots, F_n$ sont des fonctions convexes, alors $x \mapsto \log \sum_i e^{F_i(x)}$ est convexe.

Exercice 3 : Problème

Soit $(\omega_{i,j}\ ;\ (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ un tableau de variables i.i.d. Nous supposerons qu'il existe $W > 0$ tel que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ 0 \le \omega_{i,j} \le W \quad (p.s)\ .$$

De la même façon qu'en percolation dirigée, posons $\Pi_{M,N}$ l'ensemble des chemins à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d'incréments dans $(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$, commençant en $(1,1)$ et finissant en (M,N).

$$\Pi := \bigsqcup_{M,N} \Pi_{M,N}\ .$$

L'énergie d'un chemin $\pi \in \Pi$ est

$$\mathcal{E}(\pi) := \sum_{(ij) \in \pi} \omega_{i,j}\ .$$

L'objet d'étude de ce problème est la quantité aléatoire :

$$Z_{M,N}^\beta := \sum_{\pi : (1,1) \to (M,N)} e^{\beta \mathcal{E}(\pi)}\ .$$

Elle s'interprète comme la fonction de partition d'une mesure de Gibbs pour des marches aléatoires dirigées en environnement aléatoire. La signification physique du paramètre $\beta > 0$ est l'inverse d'une température $\beta = \frac{1}{k_B T}$, avec k_B la constante de Boltzmann.

0. Montrer la relation de récurrence :
$$Z^\beta_{M,N} = e^{\beta\omega_{M,N}}\left(Z^\beta_{M-1,N} + Z^\beta_{M,N-1}\right) \ .$$

Les parties de ce problème sont largement indépendantes.

I. Lien avec la percolation dirigée

1. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta}\log\left(e^{\beta x} + e^{\beta y}\right) = \max(x,y) \ .$$
2. Similairement, démontrer que
$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta}\log Z^\beta_{M,N} = \max_{\pi:(1,1)\to(M,N)} \mathcal{E}(\pi) \ ,$$
cette limite étant la fonctionnelle de percolation de temps de dernier passage pour l'environnement ω.

II. Lien avec les produits de matrices (N=2)
Considérons une suite de matrices i.i.d $g_1, g_2, \dots$ dans $M_{N=2}(\mathbb{R})$ définies par
$$g_M := \begin{pmatrix} e^{\beta\omega_{M,1}} & 0 \\ e^{\beta(\omega_{M,1}+\omega_{M,2})} & e^{\beta\omega_{M,2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\beta\omega_{M,2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\beta\omega_{M,1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formons le produit
$$G_M = g_M \dots g_2 g_1 \ .$$

1. Montrer que
$$G_M := \begin{pmatrix} e^{\beta\sum_{i=1}^M \omega_{i,1}} & 0 \\ \square_M & e^{\beta\sum_{i=1}^M \omega_{i,2}} \ . \end{pmatrix}$$
avec $\square_M$ qui satisfait la relation de récurrence :
$$\square_{M+1} = e^{\beta\omega_{M+1,2}}\left(\square_M + e^{\beta\sum_{j=1}^{M+1}\omega_{j,1}}\right) \ .$$
2. En déduire
$$\square_M = Z^\beta_{M,2} \ .$$

III. Lien avec les produits de matrices (N général) Maintenant, les matrices triangulaires inférieures i.i.d $g_1, g_2, \dots$ appartiennent à $M_N(\mathbb{R})$ avec N général. On se donne :
$$g_M := \begin{pmatrix} e^{\beta\omega_{M,1}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ e^{\beta(\omega_{M,1}+\omega_{M,2})} & e^{\beta\omega_{M,2}} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & e^{\beta(\omega_{M,2}+\omega_{M,3})} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & e^{\beta\omega_{M,N-1}} & 0 \\ e^{\beta\sum_{i=1}^N \omega_{M,i}} & \dots & \dots & e^{\beta(\omega_{M,N-1}+\omega_{M,N})} & e^{\beta\omega_{M,N}} \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^N \sum_{1\le j\le i} e^{\beta\sum_{k=j}^i \omega_{M,k}} E_{i,j} \ .$$

A nouveau, nous formons le produit
$$G_M = g_M \dots g_2 g_1 \ ,$$
et nous notons par $\square_M^N$ les coefficients matriciels suivants :
$$G_M := \begin{pmatrix} e^{\beta\sum_{j=1}^M \omega_{j,1}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \square_M^2 & e^{\beta\sum_{j=1}^M \omega_{j,2}} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \square_M^{N-1} & \ddots & \ddots & e^{\beta\sum_{j=1}^M \omega_{j,N-1}} & 0 \\ \square_M^N & \dots & \dots & \ddots & e^{\beta\sum_{j=1}^M \omega_{j,N}} \end{pmatrix} \ .$$

1. Justifier pourquoi la notation $\square_M^N$ est cohérente pour différents N. Par exemple, $\square_M^2$ a la même expression en fonction de ω, que l'on considère des matrices 2×2, 3×3 ou $N \times N$.
2. Démontrer la relation de récurrence :

$$\square_M^N = \sum_{j=1}^{N} e^{\beta \sum_{k=j}^{N} \omega_{M,k}} \square_{M-1}^{j} \ .$$

3. En déduire que la fonction de partition $Z_{M,N}^{\beta}$ apparait comme coefficient matriciel :

$$\square_M^N = Z_{M,N}^{\beta} \ .$$

Par conséquent, le produit de matrices indépendantes est relié à la percolation de temps de dernier passage.

IV. Concentration autour de la moyenne

Ecrivons

$$\frac{1}{\beta} \log Z_{M,N}^{\beta} = F\left(\omega_{i,j} \ ; \ (i,j) \in [1, M] \times [1, N]\right) \ ,$$

cette identité définissant $F : \mathbb{R}^{M \times N} \to \mathbb{R}$.

1. Explicitez pourquoi F est convexe grâce à l'exercice précédent.
2. Démontrer que :

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_{i,j}} = \frac{\sum_{\substack{\pi:(1,1)\to(M,N) \\ (i,j)\in\pi}} e^{\beta \mathcal{E}(\pi)}}{Z_{M,N}^{\beta}} \ .$$

3. En déduire l'identité sur la norme euclidienne du gradient :

$$\|\nabla F(\omega)\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{\pi,\eta:(1,1)\to(M,N)} |\pi \cap \eta| \ e^{\beta\mathcal{E}(\pi)+\beta\mathcal{E}(\eta)}}}{Z_{M,N}^{\beta}} \ ,$$

où $|\pi \cap \eta|$ est le nombre de points d'intersection de π et η.

4. Conclure que F est Lipschitz sur $\mathbb{R}^{NM}$ avec constante de Lipschitz

$$\|F\|_{Lip} := sup_{\omega} \|\nabla F(\omega)\|_2 \leq \sqrt{N+M} \ .$$

5. Quelle est le théorème du cours permettant de déduire que $\frac{1}{\beta} \log Z_{M,N}^{\beta}$ est concentré autour de sa moyenne ?

   Donner un énoncé en précisant les dépendances en N, M et la constante $W > 0$.

V. Ouverture (Bonus)

1. Pour N fixé, nous avons vu en TD que le produit de matrices avec $M \to \infty$ admet des exposants de Lyapounov sous certaines hypothèses. Est-ce que cela s'applique à notre cas ? Enoncez une conclusion.
2. (Discussion) Que pensez-vous de la question du comportement asymptotique avec $n \to \infty$ de :

$$\frac{1}{\beta} \log Z_{nx,ny}^{\beta} \ ,$$

lorsque $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$?