Cours d'algèbre linéaire [1]
L3 SID

Reda Chhaibi [2]

12 septembre 2016

1. Ce texte est essentiellement tiré du cours donné par Mireille Bouferrache, Sophie Jan et Marcello Bernardara au profit de précédentes promotions d'étudiants de L3 SID, ainsi que du livre [1].

2. `reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr` - Institut de Mathématiques, Bâtiment 1R2, Bureau 212

Table des matières

Bibliographie **i**

1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ **1**
1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ 1
1.2 Combinaison linéaire et famille génératrice 3
1.3 Normes sur un espace vectoriel 4
1.4 Sous-espace vectoriel 4
1.5 Dépendance et indépendance linéaires 6
1.6 Bases et dimension d'un espace vectoriel 6

2 Applications linéaires **9**
2.1 Applications 9
2.2 Applications linéaires 11
2.3 Noyau, image et rang d'une application linéaire 12
2.4 Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives 14

3 Applications linéaires et matrices **17**
3.1 Représentation matricielle d'une application linéaire 17
3.2 Changement de base 20

4 Valeurs et vecteurs propres **23**

Bibliographie

[1] Seymour LIPSCHUTZ AND MARC LIPSON, *Algèbre linéaire*, DUNOD, 2003.

Chapitre 1

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Dans tout ce qui suit, pour « visualiser les choses », on pourra considérer que $E = \mathbb{R}^3$.

1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Définition 1.1.1. *Considérons*

- *E un ensemble,*
- *$\boxplus$ une* **loi de composition interne** *sur E (pour tout u, v éléments de E, $u \boxplus v \in E$)*
- *et $\boxdot$ une* **loi de composition externe** *entre éléments de E et $\mathbb{R}$ (pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \boxdot u \in E$).*

On dit que $(E, \boxplus, \boxdot)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ *si*

1. *$(E, \boxplus)$ est un* **groupe commutatif** *: $\forall x, y \in E$,*
   (a) *$x \boxplus (y \boxplus z) = (x \boxplus y) \boxplus z$;*
   (b) *$\exists 0_E \in E$ tel que $x \boxplus 0_E = 0_E \boxplus x = x$;*
   (c) *$\exists (-x) \in E$ tel que $x \boxplus (-x) = (-x) \boxplus x = 0_E$;*
   (d) *$x \boxplus y = y \boxplus x$;*
2. *E possède les 4 propriétés suivantes : $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*
   (a) *$\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) = (\lambda\mu) \boxdot x$;*
   (b) *$1 \boxdot x = x$;*
   (c) *$(\lambda + \mu) \boxdot x = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\mu \boxdot x)$;*
   (d) *$\lambda \boxdot (x \boxplus y) = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$.*

Exemples :

- Loi de composition interne
  — Si on ajoute 2 réels, le résultat est encore un réel. L'addition est donc une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$;
  — Si on divise 2 entiers naturels, le résultat n'est pas nécessairement un entier naturel. La division n'est donc pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$;
- Loi de composition externe : la multiplication par un réel est bien une loi de composition externe si $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{R}^3$, mais pas si $E = \mathbb{N}$.

- Groupe
  — $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe (pas de symétrique) ;
  — $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif ;
  — $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif ;
  — $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe (0 n'a pas de symétrique), mais $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.
- Espace vectoriel
  — $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication habituelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;
  — Soit $E = \mathbb{R}^3$. Pour $x := (x_1, x_2, x_3), y := (y_1, y_2, y_3) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ et $\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. On peut alors aisément montrer que $(\mathbb{R}^3, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.2. *Soit $(E, \boxplus, \boxdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a*

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \boxdot 0_E = 0_E$;
2. $\forall x \in E, 0 \boxdot x = 0_E$;
3. *si* $\lambda \boxdot x = 0_E$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x \in E$, *alors* $\lambda = 0$ *ou bien* $x = 0_E$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x \in E$, $-(\lambda \boxdot x) = (-\lambda) \boxdot x = \lambda \boxdot (-x)$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la propriété (1b) de la définition d'espace vectoriel avec $x = 0_E$, nous avons $0_E \boxplus 0_E = 0_E$, c'est-à-dire $\lambda \boxdot (0_E \boxplus 0_E) = \lambda \boxdot 0_E$. Avec maintenant la propriété (2d), nous obtenons
$$(\lambda \boxdot 0_E) \boxplus (\lambda \boxdot 0_E) = \lambda \boxdot 0_E.$$
Il suffit d'ajouter l'opposé de $\lambda \boxdot 0_E$ aux deux membres de l'égalité pour obtenir le résultat cherché.
2. Soit $x \in E$. Dans $\mathbb{R}$, $0 + 0 = 0$, donc $(0 + 0) \boxdot x = 0 \boxdot x$. Utilisant la propriété (2c), nous avons, $(0 \boxdot x) \boxplus (0 \boxdot x) = (0 \boxdot x)$. On termine comme précédemment en ajoutant l'opposé de $0 \boxdot x$ aux deux membres de l'égalité.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ tels que $\lambda \boxdot x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, on peut parler de $\mu = \frac{1}{\lambda}$. On a alors
$$(\mu\lambda) \boxdot x = 1 \boxdot x = x$$
d'après la propriété (2b). En utilisant maintenant la propriété (2a), nous obtenons
$$\mu \boxdot (\lambda \boxdot x) = x$$
c'est-à-dire
$$\mu \boxdot 0_E = x$$
et finalement, par le point 1 du présent théorème, $0_E = x$.
4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
Par la propriété (2c) et le point 2, nous avons
$$(\lambda \boxdot x) \boxplus ((-\lambda) \boxdot x) = (\lambda + (-\lambda)) \boxdot x = 0 \boxdot x = 0_E,$$
donc $-(\lambda \boxdot x) = (-\lambda) \boxdot x$.

Par la propriété (2d) et le point 1, nous avons aussi

$$(\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot (-x)) = \lambda \boxdot (x \boxplus (-x)) = \lambda \boxdot 0_E = 0_E,$$

c'est-à-dire $-(\lambda \boxdot x) = \lambda \boxdot (-x)$.

$\square$

Exemple 1.1.3. *Illustrons toutes ces propriétés dans $E = \mathbb{R}^3$ muni des opérations habituelles.*

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.(0,0,0) = (\lambda 0, \lambda 0, \lambda 0) = (0,0,0)$;
2. $\forall (x,y,z) \in E, 0.(x,y,z) = (0x, 0y, 0z) = (0,0,0)$;
3. *si* $\lambda.(x,y,z) = (0,0,0)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors on a* $\lambda x = 0$, $\lambda y = 0$ *et* $\lambda z = 0$, *donc* $\lambda = 0$ *ou bien* $x = (0,0,0)$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\forall (x,y,z) \in E$, $-(\lambda.(x,y,z)) = -(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (-\lambda x, -\lambda y, -\lambda z) = \lambda(-x,-y,-z) = -\lambda(x,y,z)$.

1.2 Combinaison linéaire et famille génératrice

Définition 1.2.1. *Soit $(E, \boxplus, \boxdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que $v \in E$ est une* **combinaison linéaire (CL)** *des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ tels que*

$$v = (\lambda_1 \boxdot u_1) \boxplus (\lambda_2 \boxdot u_2) \boxplus ... \boxplus (\lambda_m \boxdot u_m).$$

Exemple 1.2.2. *On se place dans $\mathbb{R}^3$. Comme $(2,-3,5) = 2(1,0,0) - 3(0,1,0) + 5(0,0,1)$, le vecteur $(2,-3,5)$ est CL des vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.*

Définition 1.2.3. *Soit $(E, \boxplus, \boxdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que la famille de vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m \in E$* **engendre** *E ou bien* **est une famille génératrice de** *E si tout vecteur v de E peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$.*

Exemple 1.2.4. *Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.*

- *Les trois vecteurs*

$$e_1 := (1,0,0), e_2 := (0,1,0), e_3 := (0,0,1)$$

  engendrent E. En effet, tout vecteur $x := (a,b,c) \in E$ s'écrit $x = ae_1 + be_2 + ce_3$.
- *Les trois vecteurs*

$$u_1 := (1,1,1), u_2 := (1,1,0), u_3 := (1,0,0)$$

  engendrent aussi E. En effet, tout vecteur $x := (a,b,c) \in E$ s'écrit $x = au_3 + b(u_2 - u_3) + c(u_1 - u_2) = cu_1 + (b-c)u_2 + (a-b)u_3$.
- *Comme on peut montrer que le vecteur $v := (2,7,8)$ ne peut pas être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs*

$$v_1 := (1,2,3), v_2 := (1,3,5), v_3 := (1,5,9),$$

  la famille (v_1, v_2, v_3) ne peut pas être génératrice de E.

Remarque 1.2.5. *Soit* $(E, \boxplus, \boxdot)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $(u_1, u_2, ..., u_m)$ *une famille génératrice de* E.

- *Pour tout* $v \in E$, *la famille* $(v, u_1, u_2, ..., u_m)$ *est aussi une famille génératrice de* E.
- *Si l'un des vecteurs de la famille génératrice, disons* u_k, *est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, alors la famille privée de* u_k *est encore une famille génératrice de* E.

1.3 Normes sur un espace vectoriel

La notion de norme est fondamentale en mathématiques sans l'être dans le cadre de ce cours introductif. Nous la donnons pour votre culture.

Définition 1.3.1. *Soit* $(E, \boxplus, \boxdot)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* N *une application de* E *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* N *est une* **norme** *si pour tous* $x, y \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
2. $N(\lambda \boxdot x) = |\lambda| N(x)$;
3. $N(x \boxplus y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque 1.3.2. *Les trois normes usuelles pour l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *sont*

- *la norme euclidienne définie par* $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$;
- *la norme* 1 *définie par* $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$;
- *la norme* ∞ *définie par* $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$

pour $x := (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.3.3. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons le vecteur* $u = (1, 2, -3)$ *et calculons ses normes :*

$$\|u\|_2 = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}, \ \|u\|_1 = 1+2+3 = 6 \ \text{et} \ \|u\|_\infty = 3.$$

1.4 Sous-espace vectoriel

Définition 1.4.1. *Soient* $(E, \boxplus, \boxdot)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* $F \subset E$. *On dit que* F *est un* **sous-espace vectoriel (s.e.v.) de** E *si* $(F, \boxplus, \boxdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$

Dans le contexte de la définition précédente, pour montrer que $(F, \boxplus, \boxdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$, *on doit théoriquement montrer que les 8 axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés. Cependant, comme* F *est un sous-ensemble de* E, *certains des axiomes sont automatiquement satisfaits.*

Théorème 1.4.2. *Soient* $(E, \boxplus, \boxdot)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* $F \subset E$. *Alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si*

1. *l'élément neutre de* E *est dans* F : $0_E \in F$;
2. *pour tous* $x, y \in F$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \boxplus y \in F$ *et* $\lambda \boxdot x \in F$.

Exemples *:*

- *Soit* $F := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a = b = c\}$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^3$ *formé des vecteurs dont les trois composantes sont égales.*
  — *Le vecteur nul* $(0, 0, 0)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est bien dans* F ;

— *Soient 2 vecteurs* $u := (a, a, a)$ *et* $v := (b, b, b)$ *de* F *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On a*

$$u + v = (a + b, a + b, a + b) \in F$$

et

$$\lambda u = (\lambda a, \lambda a, \lambda a) \in F.$$

On a ainsi montré que F *est bien un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.*

- *Soit* $G := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a = b = c + 1\}$*. Comme* $(0, 0, 0)$*, le vecteur nul de* $\mathbb{R}^3$*, n'est pas dans* G*,* G *n'est pas un s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$*.*
- *Soit* $H := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | c = ab\}$*. On va montrer que* H *n'est pas un s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$ *en exhibant un contre-exemple. Les vecteurs* $(1, 1, 1)$ *et* $(-1, -1, 1)$ *sont dans* H*, mais leur somme* $(0, 0, 1)$ *n'y est pas.*

Théorème 1.4.3. *Toute intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration. Nous allons ici montrer que l'intersection $F \cap G$ de 2 sous-espaces vectoriels F et G de l'espace vectoriel $(E, \boxplus, \boxdot)$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

- Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, il contient 0_E. Il en va de même de G. On obtient donc que $0_E \in F \cap G$.
- Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Comme F est un sous-espace vectoriel de $(E, \boxplus, \boxdot)$, on a

  $$x \boxplus y \in F \text{ et } \lambda \boxdot x \in F.$$

  De même, puisque G est un sous-espace vectoriel de $(E, \boxplus, \boxdot)$, on a

  $$x \boxplus y \in G \text{ et } \lambda \boxdot x \in G.$$

  On a donc

  $$x \boxplus y \in F \cap G \text{ et } \lambda \boxdot x \in F \cap G.$$

□

Définition 1.4.4. *Soit* $(E, \boxplus, \boxdot)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

- *Soient* $u_1, u_2, ..., u_m$ *des vecteurs de* E*. On appelle* **espace vectoriel engendré** *par* $u_1, u_2, ..., u_m$ *et on note* $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_m)$ *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des* m *vecteurs* u_i*.*
- $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$*.*

Exemple 1.4.5. *Soit l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$*.*

- *On a déjà vu que* $E = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$*.*
- $\mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1)) = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1), x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$*.*
- *Soit* $u \in E - \{(0, 0, 0)\}$*. Alors* $\mathrm{Vect}(u)$ *est constitué de tous les multiples de* u*. Géométriquement,* $\mathrm{Vect}(u)$ *est donc la droite de direction* u *passant par l'origine.*
- *Soit* $u, v \in E - \{(0, 0, 0)\}$ *deux vecteurs non multiples l'un de l'autre. Alors* $\mathrm{Vect}(u, v)$ *est le plan contenant* u, v *et passant par l'origine.*

1.5 Dépendance et indépendance linéaires

Définition 1.5.1. *Soient $(E, \boxplus, \boxdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $u_1, u_2, ..., u_m \in E$.*

- *On dit que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$ sont* **linéairement dépendants** *ou* **liés** *s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ non tous nuls tels que*

$$(\lambda_1 \boxdot u_1) \boxplus (\lambda_2 \boxdot u_2) \boxplus ... \boxplus (\lambda_m \boxdot u_m) = 0_E.$$

- *Si*

$$(\lambda_1 \boxdot u_1) \boxplus (\lambda_2 \boxdot u_2) \boxplus ... \boxplus (\lambda_m \boxdot u_m) = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$$

alors les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$ sont dits **linéairement indépendants** *ou* **libres**.

Proposition 1.5.2. *Soit $(E, \boxplus, \boxdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

- *Si le vecteur nul 0_E fait partie des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$, alors ils sont linéairement dépendants. En effet, si $u_1 = 0_E$, alors on a*

$$1u_1 + 0u_2 + ... + 0u_m = 0_E.$$

- *Soit $v \in E - \{0_E\}$. Alors v est linéairement indépendant, puisque $\lambda \boxdot v = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$.*
- *Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont multiples l'un de l'autre.*
- *Si parmi les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$ deux d'entre eux, disons u_1 et u_2, sont égaux ou multiples l'un de l'autre, alors les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$ sont linéairement dépendants. En effet, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u_1 = \lambda u_2$, donc*

$$1u_1 - \lambda u_2 + 0u_3 + ... + 0u_m = 0_E.$$

- *Si une famille de vecteurs est linéairement indépendante, alors toute sous-famille est linéairement indépendante. Si une famille de vecteurs contient une sous-famille linéairement dépendante, alors la famille toute entière est linéairement dépendante.*

Exemple 1.5.3. *Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -7)$, $u_2 = (0, 0, 0)$, $u_3 = (2, 4, -14)$ et $u_4 = (2, 4, -13)$.*

- *Les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement dépendants : il existe les réels non tous nuls 0 et 1 tels que $0u_1 + 1u_2 = (0, 0, 0)$.*
- *Les vecteurs u_1 et u_3 sont liés, puisque $2u_1 - u_2 = (0, 0, 0)$. En revanche, les vecteurs u_1 et u_4 sont linéairement indépendants, parce que $-13 \neq 2(-7)$.*

1.6 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.6.1. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $u_1, u_2, ..., u_n \in E$. On dit que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ forment une* **base de** *E si*

- *ils sont linéairement indépendants ;*
- *et ils engendrent E.*

Exemple 1.6.2. *Soit l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$. *On a déjà vu que* $E = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.

Comme on peut montrer que les trois vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *et* $(0,0,1)$ *sont libres, ils forment une base de* $\mathbb{R}^3$.

De la même manière, on peut montrer que les trois vecteurs $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ *et* $(1,0,0)$ *sont libres. Ils forment donc aussi une base de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.6.3. *Soient* $(E, \boxplus, \boxdot)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* $u_1, u_2, ..., u_n \in E$. *On dit que les vecteurs* $u_1, u_2, ..., u_n$ *forment une* **base de** E *si tout vecteur* $v \in E$ *s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs* $u_1, u_2, ..., u_n$ *:*

$$\forall v \in E, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, v = (\lambda_1 \boxdot u_1) \boxplus (\lambda_2 \boxdot u_2) \boxplus ... \boxplus (\lambda_n \boxdot u_n).$$

On dit que les réels $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ *sont les* **coordonnées** *de* v *dans la base* $\mathcal{U} := \{u_1, u_2, ..., u_n\}$.

Exemple 1.6.4. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *les coordonnées du vecteur* $(1,2,-3)$ *sont*

- 1, 2, -3 *dans la base formée des vecteurs* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *et* $(0,0,1)$ *:*

$$(1,2,-3) = 1.(1,0,0) + 2.(0,1,0) - 3.(0,0,1);$$

- *et* -3, 5 *et* -1 *dans la base formée des vecteurs* $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ *et* $(1,0,0)$ *:*

$$(1,2,-3) = -3.(1,1,1) + 5.(1,1,0) - 1.(1,0,0).$$

Théorème 1.6.5. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *possédant une base composée de* n *vecteurs. Alors*

- *toute base de* E *possède* n *éléments ;*
- *on dit que* E *est de* **dimension** *finie* n *et on note* $\dim(E) = n$.

Par définition, l'espace vectoriel $\{0_E\}$ *est de dimension* 0.
Si un espace vectoriel n'admet pas de base avec un nombre fini de vecteurs, on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Exemples 1.6.6.

- *On a bien exhibé 2 bases de* $\mathbb{R}^3$ *à* 3 *vecteurs. On en déduit que* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
- *Pour l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$, *la famille* $\mathcal{E}$ *formée des* n *vecteurs*

$$e_1 := (1,0,...,0), e_2 := (0,1,0,...,0), ..., e_n := (0,...,0,1)$$

est une base, dite canonique. On en déduit que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- *L'espace vectoriel* $\mathcal{P}$ *des polynômes est un espace vectoriel de dimension infinie.*

Théorème 1.6.7. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* n.

- $n+1$ *vecteurs (ou plus) de* E *sont liés ;*
- *Toute famille libre de* n *vecteurs de* E *est une base de* E *;*
- *Toute famille génératrice de* n *vecteurs de* E *est une base de* E.

Exemples 1.6.8.

- *Comme* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, *les quatre vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *suivants sont nécessairement liés :*

$$(1,2,3), (45,0,-3), (-70,721,18), (1,1,1).$$

- *Comme les* $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ *vecteurs suivants sont libres, ils forment une base de* $\mathbb{R}^3$ *:* $(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$.

Théorème 1.6.9. *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* n *et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Alors*

- $\dim(F) \leq n$ *;*
- *si* $\dim(F) = n$*, alors* $F = E$*.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ une base de F. C'est donc une famille de m vecteurs linéairement indépendants de E. D'après le premier point du théorème précédent, on en déduit que $m \leq n$, c'est-à-dire $\dim(F) \leq n$.

— si $m = n$, alors $\mathcal{F}$ est une famille libre de n vecteurs de E. c'est donc une base de E. Ainsi $F = E$.

□

Exemple 1.6.10. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. Le théorème précédent indique que* $\dim(F)$ *vaut* $0,1,2$ *ou* 3*. On a donc les situations suivantes :*

- $\dim(F) = 0$*, c'est-à-dire* $F = \{(0,0,0)\}$ *;*
- $\dim(F) = 1$*, c'est-à-dire* F *est une droite passant par l'origine ;*
- $\dim(F) = 2$*, c'est-à-dire* F *est un plan passant par l'origine ;*
- $\dim(F) = 3$*, c'est-à-dire* $F = \mathbb{R}^3$*.*

Pour simplifier, par la suite, on notera de la même manière, par $+$*, toutes les lois de composition internes et on ne mettra pas de notation pour les lois de composition externe entre les éléments d'un espace vectoriel et les réels.*

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Applications

Soient E, F, G, H 4 ensembles non vides.

Définition 2.1.1. *On dit que f est une* **application** *de E dans F si à tout élément x de E on fait correspondre* **un et un seul** *élément $y \in F$.*

Exemples *:*
- *avec des patates ;*
- $\ln : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *n'est pas une application, mais* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *en est une.*
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une application et* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *aussi.*

Définition 2.1.2. *Soient f une application de E dans F, $E' \subset E$ et $F' \subset F$. On appelle*
- **image de E' par f** *et on note $f(E')$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de E' :*
$$f(E') = \{f(x) \in F, x \in E'\};$$
- **image réciproque de F' par f** *et on note $f^{-1}(F')$ l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans F' :*
$$f^{-1}(F') = \{x \in E | f(x) \in F'\}.$$

Exemples *:*
- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. L'image du réel -3 par f est 9 : $f(-3) = 9$, mais l'image réciproque de 9 est l'ensemble $\{-3, 3\}$: $f^{-1}(\{9\}) = \{-3, 3\}$. On a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.*
- *Soit* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. *Alors* $\ln(]0, 1]) =]-\infty, 0]$.
- *Soit* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Alors* $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ *et* $\exp^{-1}(]-\infty, 0]) = \emptyset$.

Définition 2.1.3. *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G. La* **composition de f et g**, *notée $g \circ f$ est l'application définie de E dans G par*
$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) := g\Big(f(x)\Big).$$

Exemple 2.1.4. *Soient f et g 2 applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) := x^2$ et $g(x) := x + 1$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\Big(f \circ g\Big)(x) = f\Big(g(x)\Big) = f\Big(x+1\Big) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

$$\Big(g \circ f\Big)(x) = g\Big(f(x)\Big) = g\Big(x^2\Big) = x^2 + 1.$$

Théorème 2.1.5. *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ 3 applications. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$\Big(h \circ (g \circ f)\Big)(x) = h\Big((g \circ f)(x)\Big) = h\bigg(g\Big(f(x)\Big)\bigg)$$

et

$$\Big((h \circ g) \circ f\Big)(x) = (h \circ g)\Big(f(x)\Big) = h\bigg(g\Big(f(x)\Big)\bigg)$$

On en déduit le résultat demandé. $\square$

Définition 2.1.6. *Une application f de E dans F est dite* **injective** *si 2 éléments distincts de E ont des images distinctes :*

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou, de manière équivalente, si

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Exemple 2.1.7. *L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective : $1 \neq -1$, mais $f(1) = f(-1) = 1$.*

En revanche, si on definit f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, elle est injective.

Définition 2.1.8. *Une application f de E dans F est dite* **surjective** *si tout élément $y \in F$ a au moins un antécédent dans E.*

Exemple 2.1.9. *L'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective : -1 n'a pas d'antécédent par f.*

En revanche, si on definit f de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, elle est surjective.

Définition 2.1.10. *Une application f de E dans F est dite* **bijective** *si elle est à la fois injective et surjective.*

Exemple 2.1.11. *L'application $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective.*

Définition 2.1.12. *L'application de E dans E définie par $f(x) := x$ pour tout $x \in E$ est appelée* **application identité de** *E et notée I_E.*

Définition 2.1.13. *Soit une application f de E dans F. S'il existe une application g de F dans E telle que*

$$f \circ g = I_F \text{ et } g \circ f = I_E,$$

on dit que f est **inversible**, *on appelle g l'***application inverse de** f *ou l'***application réciproque de** f *et on la note $g = f^{-1}$.*

Exemple 2.1.14.

— *Les applications $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ et $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ sont inverses l'une de l'autre :*

$$\forall x \geq 0, \quad \sqrt{x^2} = x \text{ et } \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

— *Les applications $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ sont réciproques l'une de l'autre :*

$$\forall x > 0, \quad \exp\Big(\ln(x)\Big) = x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\Big(\exp(x)\Big) = x.$$

Théorème 2.1.15. *Une application est inversible si et seulement si elle est bijective.*

2.2 Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.1. *Une application f de E dans F est appelée* **application linéaire** *ou* **homomorphisme** *si elle vérifie pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

ou, de manière équivalente, si pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Si $F = E$, on dit que f est un **endomorphisme**.

Remarque 2.2.2.

- *Si on choisit $\lambda = 0$ ci-dessus, on obtient immédiatement une propriété essentielle de toute application linéaire : $f(0_E) = 0_F$.*
- *Généralisation à un nombre quelconque de réels λ_i et d'éléments x_i de E :*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Exemples 2.2.3.

- *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur le plan $x0y$ définie par $f(x, y, z) := (x, y, 0)$. Soient $(x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{array}{rcll} f\Big((x,y,z) + (u,v,w)\Big) & = & f(x+u, y+v, z+w) & \textit{par définition de la somme dans } \mathbb{R}^3 \\ & = & (x+u, y+v, 0) & \textit{par définition de } f \\ & = & (x,y,0) + (u,v,0) & \textit{par définition de la somme dans } \mathbb{R}^3 \\ & = & f(x,y,z) + f(u,v,w) & \textit{par définition de } f \end{array},$$

et

$$\begin{array}{rcll} f\Big(\lambda(x,y,z)\Big) & = & f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) & \textit{par définition du produit par un réel d'un élément de } \mathbb{R}^3 \\ & = & (\lambda x, \lambda y, 0) & \textit{par définition de } f \\ & = & \lambda(x,y,0) & \textit{par définition du produit par un réel d'un élément de } \mathbb{R}^3 \\ & = & \lambda f(x,y,z) & \textit{par définition de } f. \end{array}$$

On en déduit la linéarité de f.

- *Soit* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la translation définie par* $g(x,y) := (x+1, y+2) = (x,y) + (1,2)$. *Comme* $g(0,0) = (1,2) \neq (0,0)$, g *n'est pas une application linéaire.*
- *L'application identité* I_E *est une application linéaire.*
- *L'application* $h : E \to F$ *définie par* $h(x) := 0_F$ *pour tout* $x \in E$ *est une application linéaire.*

Théorème 2.2.4. *Soient* $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base de* E *et* $f_1, f_2, ..., f_n$ *des éléments quelconques de* F*.Alors il existe une et une seule application linéaire* f *de* E *dans* F *telle que*

$$f(e_1) = f_1, f(e_2) = f_2, ..., f(e_n) = f_n.$$

Exemple 2.2.5. *Supposons que* $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ *et notons* f *l'application linéaire telle que*

$$f(1,0,0) = (1,2), f(0,1,0) = (1,1) \text{ et } f(0,0,1) = (3,-1).$$

Alors, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big) \\ &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \quad \textit{par linéarité de } f \\ &= x(1,2) + y(1,1) + z(3,-1) \\ &= (x+y+3z, 2x+y-z). \end{aligned}$$

Définition 2.2.6. E *et* F *sont dits* **isomorphes** *s'il existe une application linéaire bijective* f *de* E *dans* F. *Une telle application linéaire* f *est appelée* **isomorphisme** *entre* E *et* F.

Exemple 2.2.7. *Soit* E *l'ensemble des matrices à 2 lignes et 2 colonnes et* $F = \mathbb{R}^4$ *On peut montrer que l'application linéaire qui à une matrice* 2×2 *associe le vecteur de ses coefficients* $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ *est bijective. On en déduit donc que l'ensemble des matrices* 2×2 *est isomorphe à* $\mathbb{R}^4$.

2.3 Noyau, image et rang d'une application linéaire

Soient E, F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : E \to F$ *une application linéaire.*

Définition 2.3.1.
- *On appelle* **noyau de** f *et on note* $\mathrm{Ker}(f)$ *l'ensemble des éléments de* E *dont l'image est* 0_F *:* $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}$;
- *On appelle* **image de** f *et on note* $\mathrm{Im}(f)$ *l'ensemble des images des éléments de* E *:* $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$.

Théorème 2.3.2.
1. $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *;*
2. $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration. 1. Comme f est une application linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$ et donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.

Soient maintenant $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= 0_F + 0_F \quad \text{parce que } x, y \in \mathrm{Ker}(f) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

donc $x+y \in \text{Ker}(f)$ et

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lambda f(x) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda 0_F \quad \text{parce que } x \in \text{Ker}(f) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

donc $\lambda x \in \text{Ker}(f)$.

2. Comme f est une application linéaire, on a $0_F = f(0_E)$ et donc $0_F \in \text{Im}(f)$. Soient maintenant $u, v \in \text{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x, y \in E$ tels que $u = f(x), v = f(y)$. On a

$$\begin{aligned} u+v &= f(x)+f(y) \quad \text{parce que } x, y \in \text{Im}(f) \\ &= f(x+y) \quad \text{par linéarité de } f \end{aligned}$$

et $x+y \in E$, donc $u+v \in \text{Im}(f)$. On a aussi

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda f(x) \quad \text{parce que } x \in \text{Im}(f) \\ &= f(\lambda x) \quad \text{par linéarité de } f \end{aligned}$$

et $\lambda x \in E$, donc $\lambda u \in \text{Im}(f)$.

□

Proposition 2.3.3. *Soient* $e_1, e_2, ..., e_m$ *des vecteurs engendrant* E. *Alors* $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_m)$ *engendrent* $\text{Im}(f)$.

Démonstration. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $e_1, e_2, ..., e_m$ engendrent E, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m$. On a donc $y = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m)$, ou encore, par linéarité de f,

$$y = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_m f(e_m).$$

On peut effectivement en déduire que $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_m)$ engendrent $\text{Im}(f)$. □

Exemple 2.3.4. *Considérons l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y, z) = (x, y)$. *Alors* $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 0, 1))$.

On déduit de la proposition précédente que $\text{Im}(f)$ *est engendré par*

$$f(1, 0, 0) = (1, 0), \quad f(0, 1, 0) = (0, 1) \text{ et } f(0, 0, 1) = (0, 0)$$

c'est-à-dire par $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$. *On a donc* $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Définition 2.3.5. *On appelle* **rang de** f *et on note* $\text{rang}(f)$ *la dimension de l'image de* f.

Exemple 2.3.6. *Dans l'exemple précédent, le rang de* f *est donc* 2.

Théorème 2.3.7. *Si* E *est de dimension finie, alors* $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f)$.

Exemple 2.3.8. *Toujours dans le dernier exemple, on a bien* $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = 2 + 1 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)$.

2.4 Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives

Soient E, F 2 espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.

Théorème 2.4.1. *1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$;*

2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. 1. • Supposons que f est injective et montrons que $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$
($\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ est toujours vrai.).
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_F$. Mais on a aussi $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$. Par injectivité de f, on obtient $x = 0_E$. On a bien montré que $\mathrm{Ker}(f) \in \{0_E\}$.
• Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
Si $f(x) = f(y)$, on a $f(x)-f(y) = 0_F$ ou encore, par linéarité de f, $f(x-y) = 0_F$. On en déduit que $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc que $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$.

2. On a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Il reste donc à montrer que f est surjective si et seulement si $F \subset \mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in F, y \in \mathrm{Im}(f) \\ &\Leftrightarrow F \subset \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.4.2. *On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (3x + y, y + z)$.*

Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, -3x, 3x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -3, 3))$ et donc f n'est pas injective.

Maintenant, $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par $f(1, 0, 0) = (3, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 1)$. Comme $(3, 0)$ et $(0, 1)$ sont linéairement indépendants, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et donc f est surjective.

Théorème 2.4.3. *Si E et F sont de même dimension finie, alors f est injective si et seulement si f est surjective.*

Démonstration. • Si f est injective, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. D'après le théorème 2.3.7, on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(f) = \dim(E) = \dim(F)$$

et donc que $\mathrm{Im}(f) = F$.

• Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$ et donc $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) = \dim(E)$. D'après le théorème 2.3.7, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ et donc que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

□

Exemple 2.4.4. *On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y + 2z, x - y - z)$.*

Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) : x+y=0 \text{ et } y+2z=0 \text{ et } x-y-z=0\}$. *Une fois le système linéaire résolu, on obtient* $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0\}$ *et donc* f *est injective.*

Comme les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, f *est également surjective. Finalement,* f *est bijective.*

Définition 2.4.5. *L'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F *muni de la somme d'applications et de la multiplication d'une application par un scalaire est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*, noté* $\mathcal{L}(E,F)$.

Remarque 2.4.6. *Si* $F = \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E,F)$ *est appelé* **dual de** E *et est noté* E^*.

Chapitre 3

Applications linéaires et matrices

3.1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient E, F, G *des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\dim(E) = m$, $\dim(F) = n$ *et* $\dim(G) = p$. *On considère des bases quelconques*

$$\mathcal{E} := \{e_1, e_2, ..., e_m\}, \mathcal{F} := \{f_1, f_2, ..., f_n\} \text{ et } \mathcal{G} := \{g_1, g_2, ..., g_p\}$$

respectivement pour E, F *et* G *et deux applications linéaires quelconques* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$.

Alors les vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_m)$ *sont dans* F *et peuvent être exprimés dans la base* $\mathcal{F}$ *:*

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{n1}f_n, \\ f(e_2) & = & a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{n2}f_n, \\ ... & & \\ f(e_m) & = & a_{1m}f_1 + a_{2m}f_2 + ... + a_{nm}f_n. \end{array}$$

Définition 3.1.1. *La matrice ci-dessus, notée* $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, *est appelée* **représentation matricielle** *de* f *relativement aux bases* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$.

En d'autres termes, la colonne j *de* $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ *est le vecteur des composantes de* $f(e_j)$ *dans la base* $\mathcal{F}$.

Exemple 3.1.2. *On considère l'application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (x - y, x + z).$$

1. *On cherche la représentation matricielle de* f, *dans les bases canoniques* $\mathcal{C}_3$ *de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{C}_2$ $\mathbb{R}^2$. *Comme*

$$\begin{array}{rcl c l} f(1,0,0) & = & (1,1) & = & 1(1,0) + 1(0,1), \\ f(0,1,0) & = & (-1,0) & = & (-1)(1,0) + 0(0,1), \\ f(0,0,1) & = & (0,1) & = & 0(1,0) + 1(0,1), \end{array}$$

on a

$$[f]_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Faisons la même chose dans les bases* $\mathcal{E} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{F} = \{(1,1),(1,2)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$. *On a*

$$\begin{array}{rcl} f(1,1,0) & = & (0,1), \\ f(1,0,1) & = & (1,2), \\ f(0,1,1) & = & (-1,1). \end{array}$$

On a besoin d'exprimer ces résultats dans la base $\mathcal{F}$. *Pour ce faire, on résout le système linéaire*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right),$$

dont la solution est $(2a-b, b-a)$. *On en déduit que*

$$[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons $[x]_{\mathcal{E}}$ *le vecteur colonne des composantes d'un vecteur* $x \in E$ *relativement à la base* $\mathcal{E}$.

Théorème 3.1.3. *Pour tout* $x \in E$, $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}[x]_{\mathcal{E}} = [f(x)]_{\mathcal{F}}$.

Exemple 3.1.4. *On reprend l'exemple précédent.*

1. *Dans les bases canoniques, on a*

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

et donc

$$[(x,y,z,t)]_{\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on a

$$f(x,y,z,t) = (x-y)(1,0) + (x+z)(0,1)$$

et donc

$$[f(x,y,z)]_{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \end{pmatrix}.$$

Si on fait maintenant le produit matriciel $[f]_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}[(x,y,z,t)]_{\mathcal{C}_3}$, *on obtient*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \end{pmatrix}$$

et on retrouve bien $[f(x,y,z,t)]_{\mathcal{C}_3}$.

2. *Faisons maintenant la vérification dans les bases* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$.

On cherche a, b, c *tels que*

$$(x,y,z) = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1)$$

en résolvant le système linéaire

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right).$$

On aboutit à

$$(a,b,c) = \frac{1}{2}(x+y-z, x-y+z, -x+y+z)$$

et donc

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}[(x,y,z)]_{\mathcal{E}}$*, on obtient*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x-4y-2z \\ 2y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y-z \\ y+z \end{pmatrix}$$

D'après la résolution de système linéaire faite ci-dessus, on a

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & (x-y, x+z) \\ & = & (2(x-y)-(x+z))(1,1) + ((x+z)-(x-y))(1,2) \\ & = & (x-2y-z)(1,1) + (y+z)(1,2) \end{array}$$

et donc

$$[f(x,y,z)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x-2y-z \\ y+z \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{M}_{nm}$ *l'ensemble des matrices à coefficients réels qui ont* n *lignes et* m *colonnes.*

Théorème 3.1.5. *L'ensemble* $\mathcal{M}_{nm}$ *muni de l'addition matricielle et de la multiplication d'une matrice par un réel est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 3.1.6. *L'application* $v : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{nm}$ *définie par* $v(f) = [f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$*, où* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *sont respectivement les bases de* E *et* F*, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Cela signifie que pour tous* $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

- $[f+g]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} + [g]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ *;*
- $[\lambda f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \lambda [f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ *;*
- v *est bijective.*

Théorème 3.1.7.
1. *Si* f *est bijective,* $[f^{-1}]_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = [f]^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ *;*
2. $[g \circ f]_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = [g]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$*.*

3.2 Changement de base

Définition 3.2.1. *Soit $\mathcal{E}' := \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ une autre base de E. Puisque $\mathcal{E}$ est une base de E, chaque vecteur de $\mathcal{E}'$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{E}$:*

$$\begin{array}{rcl} e'_1 & = & a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{m1}e_m \\ e'_2 & = & a_{11}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{m2}e_m \\ ... & & \\ e'_m & = & a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + ... + a_{mm}e_m \end{array}$$

La matrice P ainsi définie est appelée **matrice de changement de base** *de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.*

Elle est en fait la représentation matricielle de l'application identité de E dans E relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$: $P = [Id_E]_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$.

Remarque 3.2.2.
- *La colonne j de P est constituée des composantes de e'_j dans la base $\mathcal{E}$.*
- *On peut aussi définir la matrice de changement de base Q de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$. La colonne j de Q est alors constituée des composantes de e_j dans la base $\mathcal{E}'$.*
- *Les vecteurs de la base $\mathcal{E}'$ étant libres, la matrice P est inversible. Naturellement, il en va de même de Q.*

Théorème 3.2.3. *Soient P (respectivement Q) la matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ (respectivement de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$). Alors $Q = P^{-1}$.*

Exemple 3.2.4. *On peut montrer que*

$$\mathcal{E} := \{e_1, e_2\} = \{(1,2), (3,5)\} \text{ et } \mathcal{E}' := \{e'_1, e'_2\} = \{(1,-1), (1,-2)\}$$

sont 2 bases de $\mathbb{R}^2$.

- *Cherchons la matrice de changement de base P de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. On a*

$$\begin{array}{rcl} e'_1 = xe_1 + ye_2 & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 = x + 3y \\ -1 = 2x + 5y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 - 3y \\ -1 = 2 - y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & x = -8 \text{ et } y = 3 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} e'_2 = xe_1 + ye_2 & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 = x + 3y \\ -2 = 2x + 5y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 - 3y \\ -2 = 2 - y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & x = -11 \text{ et } y = 4 \end{array}$$

On en déduit que

$$P = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- *Cherchons la matrice de changement de base Q de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$. Procédant comme ci-dessus, on obtient*
$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$
- *En faisant le produit de P et Q, on vérifie bien que $Q = P^{-1}$.*

Théorème 3.2.5. *Soient $\mathcal{E}' := \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ une autre base de E et $\mathcal{F}' := \{f'_1, f'_2, ..., f'_n\}$ une autre base de F. Soient encore P la matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et Q la matrice de changement de base de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$. Alors $[f]_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = Q^{-1}[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P$. On dit que $[f]_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}$ et $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ sont* **équivalentes**.

Dans le cas particulier où $E = F$, on a $[f]_{\mathcal{E}',\mathcal{E}'} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}P$ et on dit que $[f]_{\mathcal{E}',\mathcal{E}'}$ et $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ sont **semblables**.

Remarque 3.2.6. *On pourra utiliser le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{rccl} & \mathcal{E} & \overset{[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}}{\rightarrow} & \mathcal{F} \\ [Id_E]_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = P & \uparrow & & \downarrow \quad Q^{-1} = [Id_F]_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} \\ & \mathcal{E}' & \overset{[f]_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}}{\rightarrow} & \mathcal{F}' \end{array}$$

Exemple 3.2.7. *Revenons au premier exemple du chapitre :*

$$\begin{array}{rccl} & \mathcal{C}_3 & \overset{[f]_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}}{\rightarrow} & \mathcal{C}_2 \\ [Id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E},\mathcal{C}_3} = P & \uparrow & & \downarrow \quad Q^{-1} = [Id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{C}_2,\mathcal{F}} \\ & \mathcal{E} & \overset{[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}}{\rightarrow} & \mathcal{F} \end{array}$$

On a établi que
$$[f]_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a de manière évidente que $P = [Id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E},\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = [Id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{F},\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $Q^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}$ et

$$[f]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve le résultat obtenu dans le premier exemple du chapitre.

Chapitre 4

Valeurs et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Définition 4.0.8. *Un scalaire λ est appelé* **valeur propre** *de A s'il existe un vecteur colonne $v \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $Av = \lambda v$. Un tel vecteur v est appelé* **vecteur propre** *correspondant à la valeur propre λ. L'ensemble E_λ de tous les vecteurs propres correspondant à une valeur propre donnée λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ appelé* **sous-espace propre** *de λ.*

Théorème 4.0.9. *A est* **diagonalisable***, c'est-à-dire représentable par une matrice diagonale D, si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants.*

La matrice diagonale D ainsi définie a pour éléments les valeurs propres de A et la matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ a pour colonnes les composantes des vecteurs propres correspondants.

Exemple 4.0.10. *Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

On vérifie aisément que $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = 4v_2$. Les vecteurs v_1 et v_2 sont donc vecteurs propres de A correspondant respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$.

Comme v_1 et v_2 ne sont pas multiples l'un de l'autre, ils sont linéairement indépendants et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que la matrice A est diagonalisable.

Formant P la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme prévu, on retrouve les valeurs propres de A sur la diagonale de D.

Définition 4.0.11. *On appelle* **polynôme caractéristique de** A *le déterminant de la matrice* $tI_n - A$ *où* I_n *est la matrice identité de taille* n.

Théorème 4.0.12. *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*
- λ *est valeur propre de* A ;
- *la matrice* $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible ;*
- λ *est racine du polynôme caractéristique de* A : $\Delta(\lambda) = 0$.

Théorème 4.0.13. *Soient* $v_1, v_2, ..., v_n$ *les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *de* A. *Alors les vecteurs* $v_1, v_2, ..., v_n$ *sont linéairement indépendants.*

Théorème 4.0.14. *Si le polynôme caractéristique* $\Delta(t)$ *de* A *s'écrit comme produit de* n *facteurs distincts, soit* $\Delta(t) = (t - a_1)(t - a_2)...(t - a_n)$, *alors* A *est semblable à la matrice diagonale* $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Définition 4.0.15. *Soient* λ *une valeur propre de* A *et* $\Delta(t)$ *le polynôme caractéristique de* A. *On appelle*
- **multiplicité algébrique** *de* λ *la multiplicité de* λ *comme racine de* $\Delta(t)$.
- **multiplicité géométrique** *de* λ *la dimension de* E_λ.

Théorème 4.0.16. *Soient* λ *une valeur propre de* A. *La multiplicité géométrique de* λ $\dim(e_\lambda)$ *est inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique.*

Terminons ce chapitre par un algorithme qui calcule les valeurs propres et vecteurs propres de A. *Il permet également d'établir ou non l'existence d'une matrice inversible* P *telle que* $P^{-1}AP$ *soit diagonale.*

Algorithme 4.0.17.
1. *Trouver le polynôme caractéristique* $\Delta(t)$ *de* A.
2. *Déterminer les racines* λ_i *de* $\Delta(t)$.
3. *Pour chacune des valeurs propres* λ_i *de* A,
   (a) *construire la matrice* $M_i = A - \lambda_i I_n$
   (b) *et déterminer une base de l'ensemble des solutions du système linéaire* $M_i v = 0$. *Ces vecteurs sont les vecteurs propres de* A *linéairement indépendants correspondant à la valeur propre* λ_i.
4. *Appelons* $v_1, v_2, ..., v_m$ *tous les vecteurs collectés à l'étape précédente.*
   (a) *Si* $m \neq n$, A *n'est pas diagonalisable.*
   (b) *Si* $m = n$, A *est diagonalisable. On peut construire la matrice* P *dont la colonne* j *contient les composantes du vecteur* v_j. *Alors* $D = P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ *où* λ_i *est la valeur propre associée à* v_i.

Exemples 4.0.18.
- *Appliquons l'algorithme de diagonalisation à la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
  1. $\Delta(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-4 & -2 \\ -3 & t+1 \end{pmatrix} = (t-4)(t+1) - 6 = t^2 - 3t - 10.$
  2. *Il est simple de montrer que les racines de* $\Delta(t)$, *et donc les valeurs propres de* A, *sont* $\lambda_1 = 5$ *et* $\lambda_2 = -2$.

3. (a) i. $M_1 = A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

ii.

$$\begin{aligned} M_1 v = 0 & \Leftrightarrow & M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & -x + 2y = 0 \ \textit{et} \ 3x - 6y = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 2y. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $M_1 v = 0$ est donc

$$\{(x, y) | x = 2y\} = \{(2y, y)\} = \{y(2, 1)\} = \mathrm{Vect}((2, 1)).$$

Comme le vecteur $v_1 = (2, 1)$ est libre, il forme une base de l'ensemble des solutions de $M_1 v = 0$, c'est-à-dire de E_{λ_1}.

(b) i. $M_2 = A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ii.

$$\begin{aligned} M_2 v = 0 & \Leftrightarrow & M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & 6x + 2y = 0 \ \textit{et} \ 3x + y = 0 \\ & \Leftrightarrow & y = -3x. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $M_2 v = 0$ est donc

$$\{(x, y) | y = -3x\} = \{(x, -3x)\} = \{x(1, -3)\} = \mathrm{Vect}((1, -3)).$$

Comme le vecteur $v_2 = (1, -3)$ est libre, il forme une base de l'ensemble des solutions de $M_2 v = 0$, c'est-à-dire de E_{λ_2}.

4. *Soit P la matrice dont les colonnes sont les composantes de v_1 et v_2 :*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$P^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

et

$$D = P^{-1} A P = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- *Appliquons l'algorithme de diagonalisation à la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

1. $\Delta(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 \\ -1 & t-3 \end{pmatrix} = (t-5)(t-3) + 1 = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$.
2. $\Delta(t)$ *admet une unique racine $\lambda = 4$. C'est aussi l'unique valeur propre de A.*
3. (a) $M = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{aligned} Mv = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x - y = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $Mv = 0$ est donc

$$\{(x, y) | y = x\} = \{(x, x)\} = \{x(1, 1)\} = \mathrm{Vect}((1, 1)).$$

Comme le vecteur $v = (1, 1)$ est libre, il forme une base de l'ensemble des solutions de $Mv = 0$, c'est-à-dire de E_λ.

4. *A n'est pas diagonalisable.*

- *Appliquons l'algorithme de diagonalisation à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.*

1. $\Delta(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 5 \\ -2 & t+3 \end{pmatrix} = (t-3)(t+3) + 10 = t^2 + 1.$
2. *$\Delta(t)$ n'a pas de racine réelle. La matrice A n'a donc pas de valeurs propres réelles et n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 4.0.19. *Naturellement, tout ce qui a été défini ici pour les matrices est transposable aux endomorphismes sur E via leurs représentations matricielles.*