

## L3 SID

## Algèbre - TD4 - Eléments propres et diagonalisation

1. Trouver le polynôme caractéristique des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Trouver le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  défini par  $f(x, y) = (3x + 5y, 2x - 7y)$ .

3. Montrer qu'une matrice  $A$  et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

4. Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ .

(a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de  $A$ ;

(b) Trouver une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

5. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

(a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de  $A$ ;

(b) Trouver une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

(c) Exprimer  $A^6$  et  $f(A)$  pour  $f(t) = t^4 - 3t^3 - 6t^2 + 7t + 3$ .

(d) Trouver une racine carrée positive de  $A$ , c'est-à-dire une matrice  $B$  à valeurs propres positives telle que  $B^2 = A$ .

6. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables (dans  $\mathbb{R}$ ) ?

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. L'endomorphisme sur  $\mathbb{R}^3$  défini par  $f(x, y, z) = (2x + y - 2z, 2x + 3y - 4z, x + y - z)$  est-il diagonalisable ?

### Exercices d'entraînement

1. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables (dans  $\mathbb{R}$ ) ? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de  $A$  ;
- (b) Trouver une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .
- (c) Exprimer  $A^6$  et  $f(A)$  pour  $f(t) = t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 2t + 5$ .
- (d) Trouver une matrice  $B$  telle que  $B^2 = A$ .

3. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables (dans  $\mathbb{R}$ ) ? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Pour les opérateurs linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  suivants, trouver les valeurs propres et une base de l'espace propre correspondant :

$$f(x, y) = (3x + 3y, x + 5y), \quad g(x, y) = (3x - 13y, x - 3y).$$