L3 SID

Algèbre - TD3 - Applications linéaires et matrices

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x + 4y, 2x - 5y)$ et soient les bases $E = \{e_1, e_2\}$ et $S = \{u_1, u_2\}$ avec $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (2, 3)$.
   (a) Déterminer la représentation matricielle A de f sur la base E ;
   (b) Déterminer la représentation matricielle B de f sur la base S.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $g(x, y) = (2x - 7y, 4x + 3y)$ et $S = \{u_1, u_2\}$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie par $u_1 = (1, 3)$ et $u_2 = (2, 5)$.
   (a) Déterminer la représentation matricielle $[g]_S$ de g sur la base S ;
   (b) Vérifier la formule $[g]_S[v]_S = [g(v)]_S$ pour le vecteur $v = (4, -3)$.
3. Soient $S = \{u_1, u_2\}$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie par $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (3, -7)$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. La matrice A définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Trouver la matrice B qui représente l'endomorphisme A sur la base S.
4. Trouver la représentation matricielle des opérateurs linéaires de $\mathbb{R}^3$ suivants, sur la base canonique $\mathcal{C}_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) f défini par $f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 4x - 5y - 6z, 7x + 8y + 9z)$;
   (b) f défini par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;
   (c) f défini par $f(c_1) = (1, 3, 5)$, $f(c_2) = (2, 4, 6)$ et $f(c_3) = (7, 7, 7)$.
5. Pour chacune des transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes, exprimer la matrice qui les représente relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$:
   (a) f définie par $f(1, 0) = (2, 4)$ et $f(0, 1) = (5, 8)$;
   (b) f est la rotation de 90 degrés dans le sens direct ;
   (c) f est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$.
6. Considérons les 2 bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes :
   $$\mathcal{E} := \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\} \text{ et } \mathcal{E}' := \{e'_1, e'_2\} = \{(1, 3), (1, 4)\}.$$
   (a) Déterminer la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$;
   (b) Déterminer la matrice Q de changement de base de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$;
   (c) Exprimer le vecteur des composantes $[v]_{\mathcal{E}'}$ de $v = (5, -3)$.
7. On effectue une rotation des axes x et y du plan $\mathbb{R}^2$ dans le sens direct de 45 degrés.
   (a) Déterminer la matrice P de changement de base ;
   (b) Trouver les nouvelles coordonnées du point $(5, 6)$ dans la nouvelle base.
8. Les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 2, 2)$ forment une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes d'un vecteur arbitraire $v = (x, y, z)$ sur la base $\mathcal{E}$.

9. Soient les 2 bases suivantes de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\} = \{(1, -2), (3, -4)\}$ et $\mathcal{E}' := \{e_1', e_2'\} = \{(1, 3), (3, 8)\}$.
   (a) Trouver les composantes de $v = (a, b)$ sur la base $\mathcal{E}$;
   (b) Déterminer la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$;
   (c) Trouver les composantes de $v = (a, b)$ sur la base $\mathcal{E}'$;
   (d) Déterminer la matrice Q de changement de base de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$;
   (e) Vérifier que $Q = P^{-1}$;
   (f) Montrer que pour tout vecteur $v = (a, b)$, $P^{-1}[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{E}'}$.
10. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (5x - y, 2x + y)$ et les deux bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes : $E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ et $S = \{u_1, u_2\} = \{(1, 4), (2, 7)\}$.
    (a) Déterminer la matrice de changement de base P de E vers S, ainsi que la matrice de changement de base Q de S vers E ;
    (b) déterminer la matrice A représentant f sur la base E ;
    (c) déterminer la matrice B représentant f sur la base S.
11. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice représentant l'opérateur linéaire A sur la base $S = \{u_1, u_2\} = \{(1, 3), (2, 5)\}$.
12. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le morphisme défini par $f(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$.
    (a) Trouver la matrice M de f dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$: $S = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ et $S' = \{u_1, u_2\} = \{(1, 3), (2, 5)\}$.
    (b) Vérifier que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $M[v]_{S'} = [f(v)]_S$.
13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ et les bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ suivantes : $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\} = \{(1, 3), (2, 5)\}$. La matrice A définit une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Trouver la matrice B qui représente f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Exercices d'entrainement

1. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(x, y, z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ et $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$.
   (a) Déterminer la représentation matricielle $[g]_S$ de g sur la base S ;
   (b) Vérifier la formule $[g]_S[v]_S = [g(v)]_S$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$.
2. On considère la base de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice A définit une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice B qui représente f relativement à la base $\mathcal{E}$.
3. Les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (1, 3, 2)$ et $u_3 = (0, 1, 3)$ forment une base S de $\mathbb{R}^3$. Déterminer
   (a) la matrice P de changement de base de la base canonique $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ à S ;
   (b) la matrice Q de changement de base de S à $\mathcal{C}$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice B représentant l'opérateur linéaire A sur la base $S = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 2)\}$.