L3 SID

Algèbre - TD2 - Applications linéaires

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (yz, x^2)$. Trouver $f(2, 3, 4)$, $f(5, -2, 7)$ et $f^{-1}(0, 0)$.
2. Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3y, 2x)$ et $S = \{(x, y)|x^2+y^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Décrire $f(S)$ et trouver $f^{-1}(S)$.
3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = 2x - 3$. Donner l'expression de $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f$.
4. Trouver l'expression de l'inverse des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes :
   a) $f(x) = 2x - 3$, b) $f(x) = 3x - 7$, c) $f(x) = x^3 + 2$.
5. Soient les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ et $g(x) = f(x+1)$.
   (a) L'application f est-elle injective ?
   (b) Montrer que f n'est pas surjective.
   (c) Montrer que $g(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N})$.
6. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x)$;
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - 3y + 4z)$.
7. Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires :
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (xy, x)$;
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + 3, 2y, x + y)$;
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (|x|, y + z)$;
8. Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$ et soit $M \in V$ arbitraire mais fixée. On définit l'application $F : V \to V$ par $F(A) = AM + MA$ pour tout $A \in V$. Montrer que F est linéaire.
9. Soient $e_1 = (1, 2), e_2 = (0, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que les deux vecteurs e_1, e_2 forment une base de $\mathbb{R}^2$;
   (b) On définit alors l'application linéaire f par $f(1, 2) = (2, 3)$ et $f(0, 1) = (1, 4)$. Trouver l'expression de $f(x, y)$ pour x et y quelconques.
10. Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que sa réciproque f^{-1} est également linéaire.
11. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t).$$
    Trouver une base et la dimension de l'image et du noyau de f.
12. Soit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. Trouver une base et la dimension de l'image et du noyau de g.

13. Déterminer si chacune des applications linéaires suivantes est bijective et lorsque c'est le cas, déterminer f^{-1}.
    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x - 2y)$;
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x - 4y, 3x - 6y)$.
14. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$. L'application linéaire g est-elle inversible ?

Exercices d'entrainement

1. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 4x - 5y + 6z)$;
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires :
    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2, y^2)$;
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 1, y + z)$.
3. Trouver l'expression de $f(a, b)$ si l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifie $f(1, 2) = (3, -1)$ et $f(0, 1) = (2, 1)$.
4. Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x + 5y, 2x + 3y)$ et $S = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Trouver $f(S)$ et $f^{-1}(S)$.
5. Trouver une base et la dimension du noyau et de l'image de chacune des applications linéaires f ci-dessous :
    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + 5y - 4z, x + 4y + z)$;
    (b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x+2y+3z+2t, 2x+4y+7z+5t, x+2y+6z+5t)$;
    (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$;
    (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$.