L3 SID
Algèbre - TD1 - Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

1. Exprimer $v = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des 3 vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$, $u_3 = (2, -1, 1)$.
2. Exprimer $v = (2, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des 3 vecteurs $u_1 = (1, -3, 2)$, $u_2 = (2, -4, -1)$, $u_3 = (1, -5, 7)$.
3. Exprimer la matrice M comme combinaison linéaire des matrices A, B et C :
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
4. Dire si W, ensemble des triplets (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
$$i)\ a \geq 0, \qquad ii)\ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1, \qquad iii)\ a = 3b, \qquad iv)\ ab = 0.$$
5. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ et $u_3 = (1, 5, 8)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.
6. Trouver les conditions sur a, b et c pour que $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ appartienne à $W = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, avec $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$ et $u_3 = (3, 0, -4)$.
7. Déterminer si les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont ou non linéairement dépendantes :
   (a) $u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (2, 3, 1), u_3 = (4, 5, 5)$;
   (b) $u_1 = (1, 2, 5), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 7), u_4 = (3, 1, 4)$;
   (c) $u_1 = (1, 2, 5), u_2 = (2, 5, 1), u_3 = (1, 5, 2)$;
   (d) $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 0, 0), u_3 = (1, 5, 6)$.
8. Soient u, v, w trois vecteurs linéairement indépendants. Montrer que les vecteurs $a = u + v, b = u - v, c = u - 2v + w$ sont aussi linéairement indépendants.
9. Déterminer si les familles suivantes de vecteurs forment des bases de $\mathbb{R}^3$:
   (a) $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1)$;
   (b) $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, 3, 5), u_3 = (1, 0, 1), u_4 = (2, 3, 0)$;
   (c) $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (2, -1, 1)$;
   (d) $u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 2, 5), u_3 = (5, 3, 4)$.
10. Déterminer si les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 2)$, $(2, 5, 6, 4)$ et $(2, 6, 8, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Si la réponse est négative, trouver la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.
11. Compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ pour former une base de $\mathbb{R}^4$ avec $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $u_2 = (2, 2, 3, 4)$.
12. Trouver une base et la dimension des sous-espaces vectoriels W de $\mathbb{R}^3$ suivants :
    (a) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\}$;
    (b) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c\}$.
13. Soit F le sous-espace engendré par les vecteurs
$$u_1 = (1, -2, 5, -3), u_2 = (2, 3, 1, -4), u_3 = (3, 8, -3, -5).$$

(a) Trouver une base et la dimension de F.

(b) Compléter la base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

14. Soient V l'espace vectoriel des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$ et W le sous-espace des matrices symétriques. Montrer, en cherchant une base de W, que $\dim(W) = 3$.

15. Trouver une base et la dimension de l'espace W des solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & + & 2s & - & t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & 3s & - & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 7z & + & s & + & t & = & 0. \end{array}\right.$$

16. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$.
    (a) Montrer que $F = G$.
    (b) Trouver une équation de F.

Exercices d'entrainement

1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que $v = (3, 7, -4) \in E$ est combinaison linéaire des 3 vecteurs $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 7), u_3 = (3, 5, 6)$.
2. Dire si W, ensemble des triplets (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$i)\ a \leq b \leq c, \qquad ii)\ b = a^2, \qquad iii)\ a = 2b = 3c.$$

3. Soient les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Ecrire $w = (1, 3, 8)$ comme combinaison linéaire de u et v.
    (b) Ecrire $w = (2, 4, 5)$ comme combinaison linéaire de u et v.
    (c) Déterminer k pour que $w = (1, k, -2)$ soit combinaison linéaire de u et v.
    (d) Trouver les conditions sur a, b, c pour que $w = (a, b, c)$ puisse s'écrire comme combinaison linéaire de u et v.
4. Dire si les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ sont linéairement indépendants
    (a) $(1, 2, -3, 1)$, $(3, 7, 1, -2)$, $(1, 3, 7, -4)$;
    (b) $(1, 3, 1, -2)$, $(2, 5, -1, 3)$, $(1, 3, 7, -2)$.
5. Trouver une base et la dimension de l'espace W des solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & 3s & - & 4t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & - & s & + & 5t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & + & 4s & - & 2t & = & 0. \end{array}\right.$$

6. Répondre par oui ou par non ; si c'est non, exhiber un contre-exemple :
    (a) si u_1, u_2 et u_3 engendrent V, alors $\dim(V) = 3$;
    (b) si u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants, alors u_1, u_2, u_3 et w sont liés ;
    (c) si u_1, u_2, u_3 et u_4 sont linéairement indépendants, alors $\dim(V) \geq 4$;
    (d) si u_1, u_2 et u_3 engendrent V, alors w, u_1, u_2 et u_3 engendrent V ;
    (e) si u_1, u_2, u_3 et u_4 sont linéairement indépendants, alors u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants.