Université Paul Sabatier - TOULOUSE III **Année 2015-2016**
L2 Mathématiques : groupes et géométrie

Corrigé du partiel du 1er Mars 2016

Intructions : Tous les documents sont autorisés. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

1. Notons que :
$$15 = 3.5, \; 45 = 3^2.5, \; 60 = 2^2.3.5 \; ,$$
et que par conséquence $\mathrm{PGCD}(15, 45, 60) = 15$. Par caractérisation du PGCD de 15, 45 et 60 :
$$15\mathbb{Z} + 45\mathbb{Z} + 60\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} \; .$$
Ainsi, il nous est simplement demandé si -27354 est divisible par 15. Comme -27354 n'est même pas divisible par 5, la réponse est non.
2. Le raisonnement précédent demeure, à ceci près que $\mathrm{PGCD}(15, 45, 60, 9) = 3$. Ainsi, il nous est demandé si -27354 est divisible par 3. Comme $-27354 = -3.9116$, la réponse est oui.
3. Les entiers de la question précédente ne sont pas uniques. En effet, il suffit de trouver deux solutions (u_0, x_0) telles que :
$$5u_0 + 3x_0 = 1$$
et de les multiplier par -27354 pour avoir $(u, v, w, x) = -27354(u_0, 0, 0, x_0)$ solutions. Les paires $(2, -3)$ et $(5, -8)$ font l'affaire.

Exercice 2

Remarquons que $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application donnée par
$$f(x, y) = (5x - 15y, -2x + 6y)$$
est en fait la multiplication de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par $M = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. f est un morphisme car :
$$f(x + x', y + y') = M \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x, y) + f(x', y')$$
2. f n'est pas injective car
$$\mathrm{Ker}\, f = (3, 1)\mathbb{Z} \; .$$
3. f n'est pas surjective pour plusieurs raisons. Par exemple, l'abscisse d'un élément de l'image de f est nécessairement divisible par 5. Par conséquent $(1, 0)$ n'est pas dans l'image de f. En fait :
$$\mathrm{Im}\, f = (5, -2)\mathbb{Z}$$

4. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\operatorname{Ker} f$ est bien un groupe quotient licite, car $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe distingué. Par application du théorème d'isomorphisme à f, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f = (5,-2)\mathbb{Z}$, lui-même isomorphe à $\mathbb{Z}$.
5. Il n'existe pas de groupe G avec un morphisme $f : G \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $G/\operatorname{Ker} f$ contient un sous-groupe propre fini. En effet, par application du théorème d'isomorphisme, $G/\operatorname{Ker} f$ est toujours isomorphe à $\operatorname{Im} f$. Ou bien $\operatorname{Im} f = \{(0,0)\}$ et $G/\operatorname{Ker} f$ est trivial. Ou bien $\operatorname{Im} f$ contient un élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ non nul et donc contient tous ses multiples, qui forment un ensemble infini.
6. Il n'existe pas de groupe G avec un morphisme $f : G \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $G/\operatorname{Ker} f$ contient un sous-groupe non abélien. En effet, $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est toujours abélien.

Exercice 3

Soit $T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $GL_2(\mathbb{R})$.

1. T est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$. Les axiomes de sous-groupe se vérifient en remarquant que le produit de deux matrices triangulaires est triangulaire, et que l'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire.
2. T n'est pas un sous-groupe distingué de $GL_2(\mathbb{R})$.
3. Le centre $C(T)$ de T est donné par $C(T) = \{\lambda \operatorname{id},\ \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.
4. $T/C(T)$ est bien un groupe quotient licite, car $C(T)$ est distingué.
5. Si $T/C(T)$ est engendré par un seul élément $\bar{x}$ alors il existe $x \in T$ tel que $\bar{x} = xC(T)$. Par consequent pour chaque a et b dans T il existe i et j dans $\mathbb{Z}$ et c et c' dans $C(T)$ tel que $a = x^i c$ et $b = x^j c'$. Mais $ab = x^i c x^j c' = x^j c' x^i c = ba$ parce que c et c' sont dans le centre $C(T)$. Cela implique que T est abélien. Contradiction.
6. T contient bien un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,\ x \in \mathbb{Z} \right\} \subset T$$

7. T contient bien un sous-groupe à 4 éléments :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \subset T$$

qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.