

## Partiel du 1er Mars 2016

*Instructions : Tous les documents sont autorisés. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

### Exercice 1

1. Existe-t-il  $u, v, w \in \mathbb{Z}$  tels que

$$15u + 45v + 60w = -27354?$$

2. Existe-t-il  $u, v, w, x \in \mathbb{Z}$  tels que

$$15u + 45v + 60w + 9x = -27354?$$

3. Les entiers de la question précédente sont-ils uniques ?

### Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'application donnée par

$$f(x, y) = (5x - 15y, -2x + 6y)$$

1. Est-ce que  $f$  est un morphisme ?
2. Est-ce que  $f$  est injective ?
3. Est-ce que  $f$  est surjective ?
4. Est-ce que l'ensemble quotient  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \text{Ker } f$  est un groupe ? Si oui, à quel groupe usuel est-il isomorphe ?
5. Est-ce qu'il existe un groupe  $G$  et un morphisme  $f : G \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tel que  $G / \text{Ker } f$  contient un sous-groupe propre fini ?
6. Est-ce qu'il existe un groupe  $G$  et un morphisme  $f : G \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tel que  $G / \text{Ker } f$  contient un sous-groupe non abélien ?

### Exercice 3

Soit  $T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans  $GL_2(\mathbb{R})$ .

1. Est-ce que  $T$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$  ?
2. Est-ce que  $T$  est un sous-groupe distingué de  $GL_2(\mathbb{R})$  ?
3. Trouver le centre  $C(T)$  de  $T$ .
4. Est-ce que l'ensemble quotient  $T/C(T)$  est un groupe ?
5. Est-ce que  $T/C(T)$  est un groupe engendré par un seul élément ?
6. Est-ce que  $T$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ?
7. Est-ce que  $T$  contient un sous-groupe à 4 éléments ?