

Partiel du 1er Mars 2016

Instructions : Tous les documents sont autorisés. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

1. Existe-t-il $u, v, w \in \mathbb{Z}$ tels que

$$15u + 45v + 60w = -27354 ?$$

2. Existe-t-il $u, v, w, x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$15u + 45v + 60w + 9x = -27354 ?$$

3. Les entiers de la question précédente sont-ils uniques ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application donnée par

$$f(x, y) = (5x - 15y, -2x + 6y)$$

1. Est-ce que f est un morphisme ?
2. Est-ce que f est injective ?
3. Est-ce que f est surjective ?
4. Est-ce que l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \text{Ker } f$ est un groupe ? Si oui, à quel groupe usuel est-il isomorphe ?
5. Est-ce qu'il existe un groupe G et un morphisme $f : G \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $G / \text{Ker } f$ contient un sous-groupe propre fini ?
6. Est-ce qu'il existe un groupe G et un morphisme $f : G \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $G / \text{Ker } f$ contient un sous-groupe non abélien ?

Exercice 3

Soit $T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $GL_2(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que T est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?
2. Est-ce que T est un sous-groupe distingué de $GL_2(\mathbb{R})$?
3. Trouver le centre $C(T)$ de T .
4. Est-ce que l'ensemble quotient $T/C(T)$ est un groupe ?
5. Est-ce que $T/C(T)$ est un groupe engendré par un seul élément ?
6. Est-ce que T contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} ?
7. Est-ce que T contient un sous-groupe à 4 éléments ?