

## Corrigé de l'examen du 11 Mai 2016

*Instructions : Comme documents annexes, vous avez droit à deux feuilles recto-verso, manuscrites et non-photocopiées. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

### Exercice 1 - 6 points

1. En appliquant l'algorithme de décomposition en cycles consistant à trouver l'orbite par  $g$  (puis  $h$ ) de chaque élément de  $\{1, 2, \dots, 9\}$ , nous trouvons :

$$g = (1\ 2\ 5)(4\ 9)(6\ 8) ,$$

$$h = (1\ 9\ 3\ 6)(4\ 5\ 7\ 8) .$$

2. En utilisant l'identité suivante :

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{k-1}\ a_k) ,$$

nous décomposons chaque cycle en produit de transpositions. D'où les écritures (non uniques) :

$$g = (1\ 2)(2\ 5)(4\ 9)(6\ 8) ,$$

$$h = (1\ 9)(9\ 3)(3\ 6)(4\ 5)(5\ 7)(7\ 8) .$$

- 3.

$$\varepsilon(g) = \varepsilon(h) = 1$$

4. Deux arguments sont possibles pour voir que  $g$  et  $h$  ne sont pas conjugués. D'une part,  $\text{ord } g = 6$  et  $\text{ord } h = 4$ . Pourtant deux éléments conjugués sont nécessairement de même ordre. D'autre part, d'après le cours, deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles sont de même type i.e les longueurs des cycles dans leur décompositions en cycles sont les mêmes. Ici ce n'est pas le cas.

5. Rappelons que l'ordre d'une permutation  $\sigma$  décomposée en cycles

$$\sigma = c_1 c_2 \dots c_k ,$$

est donné par

$$\text{ord } \sigma = \text{ppcm}(c_i, 1 \leq i \leq k) .$$

Ainsi une permutation d'ordre  $20 = 4 \times 5$  dans  $S_9$  doit nécessairement être le produit d'un cycle de taille 4 et un cycle de taille 5. Par exemple :

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9) .$$

6. -  $D_5$  ne peut pas être un sous-groupe de  $S_4$ . En effet,  $\text{Card } D_5 = 10$  et  $\text{Card } S_4 = 24$ . Par le théorème de Lagrange, si  $D_5$  était un sous-groupe de  $S_4$  son cardinal diviserait 24, ce qui n'est pas le cas.

- Deux réponses sont possibles pour voir que  $D_5$  est un sous-groupe de  $S_n$  pour  $n$  suffisamment grand. D'une part,  $D_5$  permute naturellement les sommets d'un pentagone régulier. Comme tout élément de  $D_5$  est uniquement déterminé par les images des 5 sommets du pentagone (en fait 2 suffisent), on voit que  $D_5$  s'injecte naturellement dans  $S_5$ .

D'autre part, l'argument abstrait consiste à invoquer le théorème de Cayley vu en TD : tout groupe fini est un sous-groupe de  $S_n$  pour un certain  $n$ .

## Exercice 2 - 6 points

On se place dans l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de son repère canonique. Soit  $\mathcal{C}$  le carré de sommets :

$$A_1 = (1, 0), \quad A_2 = (0, 1), \quad A_3 = (-1, 0), \quad A_4 = (0, -1) .$$

- (a) Une application affine est uniquement déterminée par l'image d'un repère barycentrique. Comme  $(A_4, A_1, A_2)$  forment un repère barycentrique, il existe exactement une seule telle application.

Remarquons que la droite  $(A_3A_4)$  est nécessairement préservée vu que les applications affines respectent les barycentres.

- (b) Calculons  $f(A_2)$ . Par définition d'une application affine :

$$\begin{aligned} f(A_2) &= f(A_1) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_1A_2}) \\ &= f(A_1) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_4A_3}) \\ &= A_2 + \overrightarrow{A_4A_3} \\ &= (-1, 2) . \end{aligned}$$

- (c)  $f$  n'est certainement pas une isométrie car les longueurs ne sont pas préservées. Par exemple,  $A_1A_4 \neq f(A_1)f(A_4) = A_2A_4$ .
- (d)  $G$  est un groupe d'applications. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un sous-groupe des applications inversibles.
- (e) L'image de  $(0, 0)$  pour chaque élément de  $G$  est  $(0, 0)$ . En effet un élément de  $G$  permute les  $A_i$  et  $(0, 0) = \frac{1}{4} \sum_i A_i$  est un barycentre envoyé sur le barycentre des images, toujours  $(0, 0)$ .
- (f) Tout élément de  $G$  est une isométrie. En effet, soit  $f \in G$ . Quitte à composer par une rotation, on peut supposer  $f(A_1) = A_1$  et donc  $\mathbb{R}(1, 0)$  est fixe. Par conséquent ou bien  $f(A_2) = A_2$  et alors  $f = id$  ou bien  $f(A_2) = A_4$  et  $f$  est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Dans tous les cas, c'est une isométrie.

## Exercice 3 - 4 points

On se place dans l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni du repère canonique. Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application donnée par :

$$f(x, y, z) = (x, z + 2, -y + 2) .$$

- (a) Grâce au cours,  $f$  est une isométrie affine si et seulement si  $f$  est affine et que  $\overrightarrow{f}$ , sa partie linéaire est orthogonale ; ce qui se vérifie aisément. En effet,  $f$  est clairement affine, et sa partie linéaire s'écrit matriciellement comme :

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est exactement la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  dans le plan  $(Oyz)$ , d'axe  $(Ox)$ .

- (b) Décrivons précisément  $f$ .

- L'application  $f$  s'écrit comme la composition d'une translation de vecteur  $(0, 2, 2)$  et une rotation d'axe perpendiculaire :

$$f = T_{(0,2,2)} \circ \overrightarrow{f} .$$

Comme la direction de translation est perpendiculaire à l'axe de rotation,  $f$  n'est pas un vissage. C'est bel et bien une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  d'axe l'ensemble des points fixes  $\Delta$  (Cours).

- Points fixes : En résolvant  $M = (x, y, z) = f(M)$ , nous trouvons  $M \in (0, 2, 0) + \mathbb{R}e_1 =: \Delta$ .

(c) Les  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $f^n = \text{id}$  sont les entiers divisibles par 4.

## Exercice 4 - 4 points

On se place dans l'espace affine euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni du repère canonique. Considérons les points suivants :

$$A = (2, 1), B = (4, 2), C = (3, 5).$$

Soit  $\mathfrak{p} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application qui à un point

$$M = \text{Barycentre}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$$

associe

$$\mathfrak{p}(M) = \text{Barycentre}((A, \alpha + \gamma), (B, \beta)).$$

1. Pour montrer que  $\mathfrak{p}$  est une application affine, il suffit d'utiliser la caractérisation stipulant qu'une application respectant les barycentres est une application affine. Pour voir que c'est le cas, soit  $G$  un barycentre de certains points  $M_i$  :

$$G = \sum_i t_i M_i, \text{ avec } \sum_i t_i = 1,$$

$$M_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C.$$

Alors, par simple distributivité :

$$G = \left( \sum_i t_i \alpha_i \right) A + \left( \sum_i t_i \beta_i \right) B + \left( \sum_i t_i \gamma_i \right) C$$

et donc par définition de  $f$  :

$$f(G) = \left( \sum_i t_i \alpha_i + t_i \gamma_i \right) A + \left( \sum_i t_i \beta_i \right) B = \sum_i t_i f(M_i).$$

2. Nous avons aisément :

$$\mathfrak{p}(A) = A, \mathfrak{p}(B) = B, \mathfrak{p}(C) = A.$$

Pour l'origine  $O$ , on a :

$$O = 2A - B,$$

et donc

$$f(O) = 2A - B = O.$$

On peut aussi simplement dire que la droite  $(A, B)$  est nécessairement fixe, et que donc  $O \in (AB)$  est fixe.  $\mathfrak{p}$  est donc une application linéaire.

3. Pour voir que l'égalité entre application affines  $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$  a lieu, il suffit de le vérifier sur un repère barycentrique, ce qui est acquis par la question précédente dans le repère  $(A, B, C)$ .
4.  $\mathfrak{p}$  est le projecteur sur la droite  $(AB)$ , parallèlement à  $(AC)$ . En effet, toute la droite  $(AC)$  est envoyée sur  $A$  et l'image de  $\mathfrak{p}$  est  $(AB)$ .

Dans la base  $(u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC})$ , la matrice de  $\mathfrak{p}$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$