Université Paul Sabatier - TOULOUSE III **Année 2015-2016**
L2 Mathématiques : Théorie des groupes et géométrie affine

Examen du
11 Mai 2016

Instructions : Comme documents annexes, vous avez droit à deux feuilles recto-verso, manuscrites et non-photocopiées. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Partie I : Groupe symétrique

Exercice 1 - 6 points

On considère le groupe symétrique sur 9 éléments S_9. Soient

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 1 & 8 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} ,$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 6 & 5 & 7 & 1 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

1. Décomposer g et h en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer g et h en produit de transpositions.
3. Calculer la signature de g et h.
4. Est-ce que g et h sont conjugués dans S_9 ?
5. Existe-t-il un élément d'ordre 20 dans S_9 ?
6. Soit D_5 le groupe diédral c'est-à-dire le groupe des isométries du plan euclidien conservant un pentagone régulier. On rappelle que ce groupe a aussi une présentation abstraite :

$$D_n = \langle r, s\rangle / \langle r^n = \mathrm{id},\ srs = r^{-1}\rangle .$$

   Est-ce que D_5 est isomorphe à un sous-groupe de S_4 ? Existe-t-il un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que D_5 est isomorphe à un sous-groupe de S_n ?

Partie II : Géométrie affine

Exercice 2 - 6 points

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique. Soit $\mathcal{C}$ le carré de sommets :

$$A_1 = (1,0),\ A_2 = (0,1),\ A_3 = (-1,0),\ A_4 = (0,-1) .$$

(a) Combien existe-t-il d'applications affines $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que $f(A_3) = A_3$, $f(A_4) = A_4$ et $f(A_1) = A_2$?

(b) Calculer $f(A_2)$ pour chaque f trouvée.

(c) f est-elle une isométrie ?

Maintenant, on note G l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}^2$ qui laissent $\mathcal{C}$ invariant ($f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ pour tout $f \in G$).

(d) Est-ce que G est un groupe d'applications ?

(e) Calculer l'image de $(0,0)$ pour chaque élément de G.

(f) Chaque élément de G est-il une isométrie ?

Exercice 3 - 4 points

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application donnée par :

$$f(x, y, z) = (x, z + 2, -y + 2) \ .$$

(a) Est-ce que f est une isométrie affine ?

(b) Décrire précisément f, c'est-à-dire donner sa nature géométrique, ses caractéristiques et trouver sa forme canonique.

(c) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $f^n = \mathrm{id}$?

Exercice 4 - 4 points

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Considérons les points suivants :

$$A = (2, 1), \ B = (4, 2), \ C = (3, 5) \ .$$

Soit $\mathfrak{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application qui à un point

$$M = \text{Barycentre}\left((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\right)$$

associe

$$\mathfrak{p}(M) = \text{Barycentre}\left((A, \alpha + \gamma), (B, \beta)\right) \ .$$

Dans la notation additive des barycentres, celà équivaut à :

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{p} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & M = \alpha A + \beta B + \gamma C & \mapsto & (\alpha + \gamma) A + \beta B \end{array}$$

1. Est-ce que $\mathfrak{p}$ est une application affine ?
2. Calculer $\mathfrak{p}(A)$, $\mathfrak{p}(B)$, $\mathfrak{p}(C)$ et l'image de l'origine par $\mathfrak{p}$.
3. Montrer que $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.
4. Donner la matrice de $\mathfrak{p}$ dans une base adaptée. Justifier.