Autour du maximum du champs CβE et chaos gaussien

Reda CHHAIBI

Institut de Mathématiques de Toulouse, Toulouse, France

14th of April 2017, Séminaire Matrices Et Graphes Aléatoires, Paris

Sommaire

Le modèle

- Considérons la loi sur les configurations de n points sur le cercle:

$$(C\beta E) \qquad \frac{1}{Z_{n,\beta}} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \left| e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l} \right|^{\beta} d\theta = \frac{1}{Z_{n,\beta}} \left| \Delta(\theta) \right|^{\beta} d\theta$$

- Pour $\beta = 2$, on reconnait la formule d'intégration de Weyl pour les fonctions centrales sur le groupe compact $U(n)$. Il s'agit donc de la loi du spectre d'une matrice U_n Haar distribuée sur $U(n)$. L'étude de ce cas est très riche en théorie des représentations de U_n (Bump-Gamburd, Borodin-Okounkov, ...)
- Le polynôme charactéristique:

$$X_n(z) := \det\left(\mathrm{id} - zU_n^*\right) = \prod_{1 \leq j \leq n} \left(1 - ze^{-i\theta_j}\right)$$

- Nous choisissons une détermination du logarithme telle que $\log X_n(z = 0) = 1$. Définie sur un domaine simplement connexe maximal contenant le disque unité (ouvert).

Conjecture

Sur la base de calculs de transformées de Laplace de statistiques linéaires = déterminants de Toeplitz:

Conjecture (Fyodorov, Hiairy, Keating formulé pour $\beta = 2$)

Pour $n \to \infty$, nous avons la convergence en loi:

$$\max_{|z|=1} \log |X_n(z)| - \left[\log n - \frac{3}{4} \log \log n\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{2} (G_1 + G_2)$$

où G_1 et G_2 sont deux variables Gumbel indépendantes.

Progrès récents ($\beta = 2$):

- Le premier ordre par Arguin, Belius, Bourgade:

$$\frac{\max_{|z|=1} \log |X_n(z)|}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$$

- Le deuxième ordre par Paquette, Zeitouni:

$$\frac{\max_{|z|=1} \log |X_n(z)| - \log n}{\log \log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{3}{4}$$

Résultat principal

Theorem (C., Najnudel, Madaule)

Pour tout $\beta > 0$ and $\sigma \in \{1, i, -i\}$:

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}} \max_{|z|=1} \Re\left(\sigma \log X_n(z)\right) = \log n - \frac{3}{4} \log\log n + \mathcal{O}(1)$$

où $\mathcal{O}(1)$ est une famille tendue de variables aléatoires.

Quelques remarques:

- Il serait possible (mais technique) d'obtenir des estimées de queue pour le résidu $\mathcal{O}(1)$.
- La partie imaginaire donne des informations sur le "clustering" extrême des zéros.
- Je tâcherai de présenter quelques idées de notre méthode, avec une explication du facteur $\frac{3}{4}$.

Sommaire

Intuition du premier ordre

- Fait (Bourgade, Najnudel, Nikeghbali, Rouault, Yor ...): La loi marginale en un point $\log X_n(\theta)$ est une somme de n variable aléatoires indépendantes (non-identiquement distribuées). Grâce au TCL classique, pour chaque $z \in S^1$:
$$\log X_n(z) \approx \sqrt{\frac{1}{2}\log n}\, \mathcal{N}^{\mathbb{C}} \ .$$
- Par interpolation de Lagrange, le champs $\left(\log X_n(z)\right)_{|z| \in S^1}$ est totalement déterminé par ses valeurs en n points. Ces valeurs sont heuristiquement (!) approximées par n Gaussiennes indépendantes de variance $\frac{1}{2}\log n$.
- Ainsi:
$$\max_{|z|=1} \log |X_n(z)| \approx \sqrt{\frac{1}{2}\log n} \max_{1 \leq i \leq n} \Re \mathcal{N}_i^{\mathbb{C}} \approx \log n$$

Intuition pour le second ordre I: Log-correlation

- Sans structure de corrélation, le calcul du maximum parmi $\mathcal{O}(n)$ gaussiennes indépendantes donnerait:

$$\max_{|z|=1} \log |X_n(z)| \approx \log n - \frac{1}{4} (1 + o(1)) \log \log n$$

FAUX! Forte corrélation!

- En fait, pour $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ sur le cercle:

$$Cov(\theta, \theta') := Cov\left(\log X_n(\theta), \log X_n(\theta')\right) \approx -\log \left|1 - e^{i(\theta-\theta')}\right|.$$

D'où des liens profonds entre polynômes charactéristiques aléatoires et le chaos gaussien multiplicatif issu de champs log-corrélés (Kahane, Rhodes, Vargas, Duplantier, Sheffield...)

Intuition pour le second ordre II: Intuitions branchantes

La corrélation logarithmique apparait naturellement dans un contexte branchant (par ex BBM, BRW).

- Considérons un arbre dyadique de hauteur N (2^N feuilles $\subset [0,1]$). Chaque noeud v est décoré d'une v.a. indépendante $\mathcal{N}_v^{\mathbb{C}}$, vu comme une valeur relative pour la particule v par rapport à son ancêtre. On définit "le champs des valeurs" (position, fitness, ...) comme:

$$X_v = \sum_{u \in v} \mathcal{N}_u^{\mathbb{C}} \ ,$$

  où la somme $u \in v$ renvoie aux ancêtres possibles.

- Covariance issue d'une structure branchante explicite:

$$\begin{aligned} Cov\left(X_v, X_{v'}\right) &= \text{Distance à l'ancêtre commun dans l'arbre} \\ &\approx -\log |v - v'|_{\mathbb{Q}_2} \end{aligned}$$

- Pour les BRW, on a (Bramson, Shi, Aidékon, Zeitouni ...):

$$\max_{|v|=N} X_v = \log 2^N - \frac{3}{4} \log\log 2^N + \mathcal{O}(1)$$

Lien chaos I

- Fait (Diaconis-Shahshahani, Matsumoto-Jiang): Gaussianité des traces

$$\forall k,\ k^{-\frac{1}{2}}\, Tr\left(U_n^k\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\beta}}\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$$

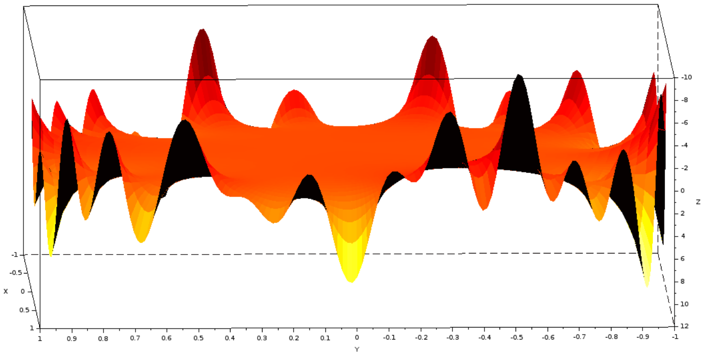
- $\rightsquigarrow$ Convergence dans le disque $\mathbb{D}$ de

$$|X_n(z)| = \exp\left(\Re\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Tr(U_n^k)}{k}z^k\right) \approx \exp\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}\Re\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}}{\sqrt{k}}z^k\right)\ .$$

- Sur le cercle $\partial\mathbb{D}$, on reconnait le champs Gaussien log-correlé qui forme le chaos. L'analyse du maximum de champs Gaussiens log-corrélés se fait en identifiant une structure branchante approximative (Madaule, Ding-Zeitouni).

Lien chaos II

Figure: Illustration de $\left(\Re \log X_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\beta}}\, \Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}}{\sqrt{k}} z^k\right)_{z\in\mathbb{D}}$



Sommaire

OPUC et récurrence de Szegö

- Considérons une mesure μ sur le cercle et appliquons Gram-Schmidt:

$$\{1, z, z^2, \dots\} \rightsquigarrow \{\Phi_0(z), \Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots\}$$

- Récurrence de Szegö:

$$\begin{cases} \Phi_{j+1}(z) &= z\Phi_j(z) - \overline{\alpha_j}\Phi_j^*(z) \\ \Phi_{j+1}^*(z) &= -\alpha_j z\Phi_j(z) + \Phi_j^*(z) \end{cases} .$$

Ici:

$$\Phi_j^*(z) := z^j\overline{\Phi_j(1/\bar{z})}$$

est le polynôme avec coefficients renversés et conjugués. Les α_j forment une suite dans le disque, connue sous le nom de coefficients de réflection/Verblunsky/Schur.

Theorem (Verblunsky)

Il existe un homomorphisme entre les mesures μ sur S^1 et les suites de coefficients de Verblunsky. De plus, si $n = |supp(\mu)| < \infty$, alors $|\alpha_n| = 1$ et $\alpha_j = 0$ pour $j > n$.

Les travaux de Killip, Nenciu et Stoiciu

Killip and Nenciu ont découvert une distribution explicite pour les coefficients de Verblunsky, telle que le polynôme caractérisque X_n soit un Φ_n^*!

Theorem (Killip, Nenciu)

- *Soit $(\alpha_j)_{j\geq 0}$, η des variables complexes indépendantes, de phase uniformes, et de modules comme suit:*

$$|\alpha_j|^2 \overset{\mathcal{L}}{=} Beta(1, \beta_j := \frac{\beta}{2}(j+1)) \quad , |\eta| = 1$$

- *Soit $(\Phi_j, \Phi_j^*)_{j\geq 0}$ la suite d'OPUC obtenue à partir des coefficients $(\alpha_j)_{j\geq 0}$ et la récurrence de Szegö.*

Alors, nous avons l'égalité suivante en loi:

$$X_n(z) = \Phi_{n-1}^*(z) - z\eta\Phi_{n-1}(z).$$

Cela a été étudié plus finement par Killip et Stoiciu. Analogue circulaire de la présentation tridiagonale de Dumitriu-Edelman.

Préparons le terrain

- Fait: La suite de v.a

$$\sup_{|z|=1} \left| \log X_n(z) - \log \Phi_{n-1}^*(z) \right|$$

  est tendue $\rightsquigarrow$ On se contente alors d'étuder les valeurs extrêmes de $\log \Phi_{n-1}^*(z)$ seulement.
- La récurrence peut être réécrite en terme de *coeffs de Verblunsky déformés* $(\gamma_j)_{j\geq 0}$, ayant les mêmes modules que les $(\alpha_j)_{j\geq 0}$ et la même distribution jointe. On a, pour $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$\log \Phi_k^*(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{k-1} \log \left(1 - \gamma_j e^{i\psi_j(\theta)}\right) .$$

- Les *phases de Prüfer relatives* $(\psi_k)_{k\geq 0}$ satisfont:

$$\psi_k(\theta) = (k+1)\theta - 2\sum_{j=0}^{k-1} \log \left(\frac{1 - \gamma_j e^{i\psi_j(\theta)}}{1 - \gamma_j}\right) .$$

Sommaire

Une simplification I

Commencons par quelques approximations

- Rappelons que $\gamma_j \stackrel{\mathcal{L}}{=} Beta(1, \beta_j)$ avec $\beta_j = \frac{\beta}{2}(j+1)$. Par Taylor:

$$\log\left(1 - \gamma_j e^{i\psi_j(\theta)}\right) \approx -\gamma_j e^{i\psi_j(\theta)} \ ,$$

- Aussi soient $\mathcal{E}$, Γ et Θ des v.a de lois exponentielle, gamma et uniforme sur $[0, 2\pi]$. Toutes indépendantes. Pour $j \to \infty$ on a:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_j}{\mathcal{E}_j + \Gamma_j(\beta_j)}} e^{i\Theta_j} \quad \text{“Identité Beta gamma”} \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_j}{j+1}} e^{i\Theta_j} = \sqrt{\frac{2}{\beta(j+1)}} \mathcal{N}_j^{\mathbb{C}} \ . \end{aligned}$$

Une simplification II

Ainsi on conçoit bien que:

Proposition

Considérons le champs suivant avec des marginales Gaussiennes:

$$Z_n(\theta) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathcal{N}_j^{\mathbb{C}}}{\sqrt{j+1}} e^{i\psi_j(\theta)} \ .$$

On a:

$$\log \Phi_{n-1}^*(e^{i\theta}) = -\sqrt{\frac{2}{\beta}} Z_n(\theta) + \mathcal{O}(1) \ ,$$

où $\mathcal{O}(1)$ est une famille tendue de fonctions.

Remarque: Pour θ fixé, $\left(Z_n(e^{i\theta})\right)_{n \geq 1}$ est une marche aléatoire Gaussienne (à incréments inhomogènes).

Borne supérieure I

On veut ($\log\log = \log_2$):

$$(BSup)\ \lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_\theta \Re Z_n(\theta) \geq \log n - \frac{3}{4}\log_2 n + C\right) = 0$$

- L'élément crucial est d'ajouter la barrière:

$$(*) = \left\{\forall k \leq n,\ \sup_\theta \Re Z_{\lfloor e^k \rfloor}(\theta) \leq k + ...\right\}\ ,$$

  évennement vrai avec grande probabilité (via une estimée grossière de la borne sup).

- En approximant $\log \Phi_n^* \approx -\sqrt{\frac{\beta}{2}} Z_n$ par ses valeurs en $\mathcal{O}(n)$ points, $(BSup)$ est impliqué par (inégalité de Boole):

$$\lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}\Big(\Re Z_n(\theta = 0) \geq \log n - \frac{3}{4}\log_2 n + C,$$
$$\forall k \leq \log n,\ \Re Z_{\lfloor e^k \rfloor}(\theta = 0) \leq k\Big) = 0$$

Borne supérieure II

- En écrivant $W_k = \Re Z_{\lfloor e^k \rfloor}(\theta = 0)$, qui est une marche Gaussienne, on veut:

$$\lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left(W_{\log n} \geq \log n - \frac{3}{4}\log_2 n + C, \forall k \leq \log n,\ W_k \leq k \right) = 0$$

- Via Girsanov, c'est impliqué par:

$$\lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(W_{\log n} \geq -\frac{3}{4}\log_2 n + C \text{ et } \forall k \leq \log n,\ W_k \leq 0 \right) = 0 \ .$$

- On conclut avec une version quantitative du principe de réflexion pour les marches gaussiennes (connu pour le MB):

$$\mathbb{P}\left(W_N \geq \kappa + C \text{ et } \forall k \leq N, W_k \leq 0 \right) \sim \frac{e^{-2\kappa - 2C}}{N^{3/2}}$$

with

$$\kappa = -\frac{3}{4}\log\log n$$

$$N = \log n \ .$$

Un mot sur la borne inférieure

- Le contrôle de la borne inférieure se fait par une méthode de second moment (inequalité de Paley-Zygmund habituelle). Cela dépend de façon cruciale en la corrélation à deux points du champs $(Z_n(\theta))_{\theta\in[0,2\pi)}$.
- $\rightsquigarrow$ Il faut comprendre les phases de Prüfer et leur comportement à toutes échelles (points proches à distance de n^α).

Sommaire

Bibliographie

- Louis Pierre Arguin, David Belius, and Paul Bourgade. Maximum of the characteristic polynomial of random unitary matrices. Communications in Mathematical Physics, pages 1–49, 9 2016.
- R. Chhaibi, T. Madaule, J. Najnudel. On the maximum of the CβE field. ArXiv e-prints, July 2016, 1607.00243
- Y. V. Fyodorov, G. A. Hiary, and J. P. Keating. Freezing Transition, Characteristic Polynomials of Random Matrices, and the Riemann Zeta Function. Physical Review Letters , 108(17):170601, April 2012
- E. Paquette and O. Zeitouni. The maximum of the CUE field. ArXiv e-prints, February 2016, 1602.08875

Remerciements

Merci de votre attention!