Université Paul Sabatier

Équations d'évolution

Jean-Pierre RAYMOND

Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées.

Table des matières

Chapitre 1

Opérateurs m-dissipatifs

1.1 Définitions et notions préliminaires

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire non borné dans* X *est un couple* $(A, D(A))$ *où* $D(A)$ *un sous-espace vectoriel de* X *et* A *est une application linéaire de* $D(A)$ *dans* X*. Le sous-espace* $D(A)$ *est le domaine de* A*.*

De manière analogue, un opérateur linéaire non borné de X *dans* Y *est un couple* $(A, D(A))$ *où* $D(A)$ *un sous-espace vectoriel de* X *et* A *est une application linéaire de* $D(A)$ *de* X *dans* Y*.*

Définition 1.1.2 *Un opérateur* $(A, D(A))$*, linéaire non borné dans* X*, est fermé si son graphe* $G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ *est fermé dans* $X \times X$*.*

Définition 1.1.3 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans* X*. Lorsque* $D(A)$ *est dense dans* X*, on dit que* $(A, D(A))$ *est de domaine dense dans* X*.*

Définition 1.1.4 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans* X*, de domaine dense dans* X*. On appelle adjoint de* A *l'opérateur* $(A^*, D(A^*))$ *défini par*

$$D(A^*) = \{y \in X' \mid \exists c \geq 0 \text{ tel que } \langle Ax, y\rangle_{X,X'} \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in D(A)\},$$

et

$$\langle x, A^*y\rangle_{X,X'} = \langle Ax, y\rangle_{X,X'} \text{ pour tout } x \in D(A) \text{ et tout } y \in D(A^*).$$

Théorème 1.1.1 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans* X*. Si* X *est un espace réflexif et* A *est fermé alors* $D(A^*)$ *est dense dans* X'*.*

Preuve. Si $D(A^*)$ n'est pas dense dans X', alors il existe $x_0 \in X$, non nul, tel que $\langle x_0, y\rangle = 0$ pour tout $y \in D(A^*)$. Étant donné que $x_0 \neq 0$, $(0, x_0)$ n'appartient pas à $G(A)$. Le graphe de A étant fermé dans $X \times X$, d'après le Théorème de Hahn-Banach, il existe $(y_1, y_2) \in X' \times X'$ tel que $\langle x, y_1\rangle_{X,X'} - \langle Ax, y_2\rangle_{X,X'} = 0$ pour tout $x \in D(A)$ et $\langle 0, y_1\rangle_{X,X'} - \langle x_0, y_2\rangle_{X,X'} \neq 0$. De la deuxième équation, on déduit $\langle x_0, y_2\rangle_{X,X'} \neq 0$ et $y_2 \neq 0$. De la première, on déduit que $y_2 \in D(A^*)$. Donc $\langle x_0, y_2\rangle = 0$ et on obtient une contradiction. La preuve est complète.

1.2 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.2.1 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0, \qquad \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 1.2.2 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est m-dissipatif si*

- *A est dissipatif,*
- $\forall f \in X,\ \forall \lambda > 0, \qquad \exists x \in D(A) \quad \text{tel que} \quad \lambda x - Ax = f.$

Théorème 1.2.1 *Si A est m-dissipatif alors, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1} f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $f \in X$, l'équation

$$\lambda x - Ax = f, \tag{1.1}$$

admet au moins une solution x_f dans $D(A)$ d'après la définition 1.2.2. Cette solution vérifie

$$\lambda \|x_f\| \leq \|\lambda x_f - Ax_f\| = \|f\|,$$

d'après la définition 1.2.1. Nous en déduisons d'une part que l'équation (1.1) admet une solution unique x_f dans $D(A)$ et d'autre part que

$$\|x_f\| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|.$$

Le théorème en découle.

Théorème 1.2.2 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans X. L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement si*

$$\exists \lambda_0 > 0 \quad \text{tel que } \forall f \in X, \qquad \exists x \in D(A) \quad \text{vérifiant} \quad \lambda_0 x - Ax = f. \tag{1.2}$$

Preuve. Il est évident que si l'opérateur A est m-dissipatif alors la condition (1.2) est satisfaite.

Montrons la réciproque. De la condition (1.2) et du fait que A est dissipatif, il découle que, pour tout $f \in X$, l'équation $\lambda_0 x - Ax = f$ admet une solution unique dans $D(A)$. Comme dans la preuve du Théorème 1.2.1 nous pouvons montrer que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Soit $\lambda > 0$. L'équation

$$\lambda x - Ax = f$$

est équivalente à

$$\lambda_0 x - Ax = f + (\lambda_0 - \lambda) x,$$

soit encore

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1}\Big(f + (\lambda_0 - \lambda)x\Big).$$

L'application

$$F \;:\; x \longmapsto (\lambda_0 I - A)^{-1}\Big(f + (\lambda_0 - \lambda)x\Big),$$

est une application de X dans X et elle vérifie

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0}\|x_1 - x_2\|.$$

Si $\lambda \in (0, 2\lambda_0)$, F est une contraction dans X. On a donc montré que

$$\forall f \in X,\ \forall \lambda \in (0, 2\lambda_0), \qquad \exists x \in D(A) \quad \text{tel que} \quad \lambda x - Ax = f.$$

En itérant ce procédé, nous pouvons résoudre l'équation $\lambda x - Ax = f$ pour tout $\lambda \in (0, 2^n\lambda_0)$ et pour tout $n \geq 1$, i.e. pour tout $\lambda > 0$.

Théorème 1.2.3 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans X. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - A$ est une bijection de $D(A)$ sur X, et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X, alors A est fermé.*

En particulier, si A est m-dissipatif alors A est fermé.

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergeant vers x dans X, et supposons que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans X. L'opérateur $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ étant borné, nous obtenons

$$x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x_n - Ax_n) \to (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Par conséquent, nous avons

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \in D(A)$$

et $(\lambda_0 I - A)x = \lambda_0 x - y$, soit encore $Ax = y$. La preuve est complète.

Remarquons que si $(A, D(A))$ est un opérateur non borné sur X, l'application

$$x \longmapsto \|x\| + \|Ax\|$$

est une norme sur $D(A)$. Nous la noterons $\|\cdot\|_{D(A)}$.

Corollaire 1.2.1 *Soit A un opérateur m-dissipatif. L'espace $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ est un espace de Banach et $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A); X)$.*

Preuve. Avec le Théorème 1.2.3, on peut facilement vérifier que $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ est un espace de Banach. Par définition de $\|\cdot\|_{D(A)}$, il est évident que $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A); X)$.

Du Théorème 1.2.1, il découle que l'opérateur $(\lambda I - A)|_{D(A)}$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X. Par abus nous dirons parfois que l'opérateur $(\lambda I - A)$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X.

Définition 1.2.3 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans X. La famille d'opérateurs $R(\lambda; A)$, $\lambda > 0$, définie par $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelée résolvante de A.*

L'opérateur $A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A)$ est appelé 'approximation de Yosida' de A.

Remarque. Nous avons

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A) = \lambda(A - \lambda I)R(\lambda; A) + \lambda^2 R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I.$$

L'opérateur A_λ est donc un opérateur borné dans X. De plus nous avons

$$A_\lambda x = \lambda R(\lambda; A)Ax \qquad \text{pour tout } x \in D(A). \tag{1.3}$$

En effet, pour tout $x \in D(A)$, nous avons

$$\lambda R(\lambda; A)Ax = \lambda R(\lambda; A)(A - \lambda I)x + \lambda^2 R(\lambda; A)x = -\lambda x + \lambda^2 R(\lambda; A)x = A_\lambda x,$$

d'après l'identité ci-dessus.

Théorème 1.2.4 *Soit A un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X. Alors*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = 0, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

De plus

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|A_\lambda x - Ax\| = 0, \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Remarque. Remarquons que le premier résultat du théorème signifie que $\lambda R(\lambda; A)$ est une approximation de l'identité. Le second signifie que $(A_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une suite d'opérateurs bornés approchant A.

Preuve. Soit $x \in D(A)$, on a :

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x - x + A(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}Ax.$$

Nous en déduisons

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to \infty. \tag{1.4}$$

Le premier résultat est donc démontré pour tout $x \in D(A)$.

Soit $x \in X$ et soit $(x_n)_n$ une suite dans $D(A)$ convergeant vers x dans X. Comme $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)\|\|x_n - x\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + 2\|x_n - x\|.\end{aligned}$$

La fin est standard.

Pour tout $x \in D(A)$, nous avons

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|A_\lambda x - Ax\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda; A)Ax - Ax\| = 0.$$

Théorème 1.2.5 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif et de domaine dense dans X. Si A est fermé et A^* est dissipatif alors A est m-dissipatif.*

Preuve. Montrons tout d'abord que $(I-A)(D(A))$ est fermé dans X. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $(I-A)(D(A))$ convergeant vers f dans X. Comme $f_n \in (I-A)(D(A))$, il existe $x_n \in D(A)$ tel que $x_n - Ax_n = f_n$. L'opérateur A étant dissipatif, on a

$$\|x_n\| \leq \|f_n\|.$$

La suite $(x_n)_n$ converge donc vers un élément $x \in X$. Nous en déduisons que $Ax_n = x_n - f_n$ converge vers $x-f$. L'opérateur A étant fermé, nous avons $Ax = x-f$. Donc $f \in (I-A)(D(A))$ et $(I-A)(D(A))$ est fermé dans X.

De [2, Théorème II.18] nous déduisons

$$[(I-A)(D(A))]^\perp = \ker(I-A^*) = \{0\}.$$

et nous avons $\ker(I-A^*) = \{0\}$, car A^* est dissipatif. Donc $(I-A)(D(A)) = X$ et A est m-dissipatif d'après le Théorème 1.2.2.

1.3 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3.1 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A), \qquad (Ax, x) \leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A), \qquad \mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0.$$

Preuve. Supposons que A est dissipatif. Pour tout $x \in D(A)$, non nul, et tout $\lambda > 0$, posons $y_{x,\lambda} = \lambda x - Ax$ et $z_{x,\lambda} = y_{x,\lambda}/\|y_{x,\lambda}\|$. L'opérateur A étant dissipatif, on a

$$\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = (\lambda x - Ax, z_{x,\lambda})$$

$$= \lambda \mathrm{Re}(x, z_{x,\lambda}) - \mathrm{Re}(Ax, z_{x,\lambda}) \leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}(Ax, z_{x,\lambda}).$$

Par conséquent, nous avons

$$\mathrm{Re}(Ax, z_{x,\lambda}) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}(x, z_{x,\lambda}) \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

La suite $(z_{x,\lambda})_\lambda$ étant bornée dans X, il existe $z_x \in X$ et une suite $(\lambda_n)_n$ convergeant vers l'infini tels que

$$\lim_{n\to\infty} z_{x,\lambda_n} = z_x.$$

Avec les inégalités précédentes, par passage à la limite, nous obtenons

$$\mathrm{Re}(Ax, z_x) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}(x, z_x) \geq \|x\|.$$

Comme
$$\mathrm{Re}(x, z_x) \leq |(x, z_x)| \leq \|x\|,$$
nous obtenons
$$(x, z_x) = \|x\| \qquad \text{et} \qquad z = x.$$
Nous avons donc
$$\mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0.$$
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$. Alors nous avons
$$\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geq |(\lambda x - Ax, x)| \geq \mathrm{Re}(\lambda x - Ax, x) \geq \lambda\|x\|^2.$$
La condition de dissipativité en découle.

Théorème 1.3.2 *Si A est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans X.*

Preuve. Soit $y_0 \in X$ tel que $(y_0, x) = 0$ pour tout $x \in D(A)$. On a $(I - A)^{-1}y_0 \in D(A)$,
$$(y_0, (I - A)^{-1}y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad ((I - A)(I - A)^{-1}y_0, (I - A)^{-1}y_0) = 0.$$
L'opérateur A étant m-dissipatif, il vient
$$\|(I - A)^{-1}y_0\|^2 = (A(I - A)^{-1}y_0, (I - A)^{-1}y_0) \leq 0.$$
Donc $(I - A)^{-1}y_0 = 0$, $y_0 = 0$, et $D(A)$ est dense dans X.

Remarque. Nous avons énoncé les Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 dans un cadre Hilbertien par souci de simplicité. Mais ces théorèmes admettent une généralisation dans le cadre des espaces de Banach. La généralisation du Théorème 1.3.1 dans le cadre des espaces de Banach est énoncée dans [7, Théorème 4.2 et définition 4.1, Chapitre 1]. Le Théorème 1.3.2 reste vrai dans le cas d'un espace de Banach réflexif [7, Théorème 4.6, Chapitre 1].

Théorème 1.3.3 *Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans X. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.*

Preuve. Supposons que A est m-dissipatif. Nous savons que A est fermé (Théorème 1.2.3), nous devons montrer que A^* est dissipatif. De manière à simplifier la preuve nous identifions X et X'. Dans ce cas, $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de X'.

Pour tout $y \in D(A^*)$, nous avons
$$(A^*y, \lambda R(\lambda; A)y) \leq (y, \lambda AR(\lambda; A)y) = (y, A_\lambda y)$$
$$= (y, \lambda^2 R(\lambda; A)y - \lambda y) \leq \lambda(y, \lambda R(\lambda; A)y) - \lambda\|y\|^2 \leq 0,$$
et
$$(A^*y, \lambda R(\lambda; A)y) \to (A^*y, y) \qquad \text{quand } \lambda \to 0.$$
On en déduit que
$$(A^*y, y) \leq 0,$$
donc que A^* est dissipatif.

La réciproque découle du Théorème 1.2.5.

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Identifions X et X', alors A et A^* opèrent sur le même espace. Dans ce cas le domaine de A^* est

$$D(A^*) = \{y \in X \mid \exists c \geq 0 \text{ tel que } (Ax, y)_X \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in D(A)\}.$$

Définition 1.3.1 *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$, de domaine dense dans X est dit auto-adjoint si $A = A^*$. Il est dit anti-adjoint si $A = -A^*$.*

1.4 Exemples d'opérateurs m-dissipatifs

Dans cette section, Ω désigne un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ.

1.4.1 L'opérateur de la chaleur dans $L^2(\Omega)$

On pose $X = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $Au = \Delta u$ pour tout $u \in D(A)$. Démontrer que $(A, D(A))$ est m-dissipatif dans $L^2(\Omega)$.

1.4.2 L'opérateur de la chaleur dans $H^{-1}(\Omega)$

On munit $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ de la norme

$$f \longmapsto \Big(\langle(\Delta_D)^{-1}f, f\rangle\Big)^{1/2},$$

où $u = (\Delta_D)^{-1}f$ est la solution du problème

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad \Delta u = f \qquad \text{dans} \quad \Omega.$$

On pose $X = H^{-1}(\Omega)$, $D(A) = H_0^1(\Omega)$, et $Au = \Delta u$ pour tout $u \in D(A)$. Démontrer que $(A, D(A))$ est m-dissipatif dans $H^{-1}(\Omega)$.

1.4.3 L'opérateur de la chaleur dans $L^p(\Omega)$

On pose $X = L^p(\Omega)$, avec $1 < p < \infty$, $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et $Au = \Delta u$ pour tout $u \in D(A)$. Démontrer que $(A, D(A))$ est m-dissipatif dans $L^p(\Omega)$.

1.4.4 L'opérateur des ondes dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Pour étudier l'équation

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ &z = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \quad z(x,0) = z_0 \text{ et } \tfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z_1 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{1.5}$$

avec $(z_0, z_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$, nous transformons l'équation en une équation d'évolution du premier ordre. Posons $y = (z, \frac{dz}{dt})$, l'équation (1.5) peut être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F, \quad y(0) = y_0,$$

avec

$$Ay = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad y_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Posons $Y = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Le domaine de A dans Y est $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$. Démontrer que $(A, D(A))$ est m-dissipatif dans Y.

1.4.5 L'opérateur des ondes dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$

Pour étudier l'équation (1.5) quand $(z_0, z_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, nous posons $\widehat{Y} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$\widehat{A}y = \widehat{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix},$$

et $D(\widehat{A}) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Montrer que que $(\widehat{A}, D(\widehat{A}))$ est m-dissipatif dans $\widehat{Y}$.

1.4.6 Un opérateur de convection

Soit $1 \leq p < \infty$. On pose $X_1 = L^p(\mathbb{R}^n)$ et $X_2 = C_0(\mathbb{R}^n)$. Pour $i = 1, 2$, nous définissons A_i par

$$D(A_i) = \{u \in X_i \mid a \cdot \nabla u \in X_i\},$$

et

$$Au = -a \cdot \nabla u = \Sigma_{i=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \text{pour tout} \quad u \in D(A_i),$$

où $a \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que $(A_i, D(A_i))$ est m-dissipatif dans X_i pour $i = 1, 2$.

Indication : Pour $\lambda > 0$ et $f \in X_i$, on pourra rechercher la solution de l'équation

$$\lambda u + a \cdot \nabla u = f$$

sous la forme

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(x - as)\, ds.$$

1.4.7 L'opérateur de Stokes

On pose

$$X(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^n \mid \text{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma\}.$$

Nous admettrons que

$$(L^2(\Omega))^n = X(\Omega) \oplus G(\Omega),$$

où

$$G(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^n \mid \exists v \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad \nabla v = u\}.$$

On note P l'opérateur dans $(L^2(\Omega))^n$ de projection orthogonale sur $X(\Omega)$, et on pose

$$D(A) = (H^2(\Omega))^n \cap (H_0^1(\Omega))^n \cap X(\Omega) \qquad \text{et} \qquad A = P\Delta.$$

À l'aide du Théorème de Lax-Milgram, démontrer que, pour tout $f \in (L^2(\Omega))^n$ l'équation

$$\begin{aligned} &u \in (H_0^1(\Omega))^n \cap X(\Omega), \qquad p \in L^2(\Omega), \\ &-\Delta u + \nabla p = f \qquad \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

admet une solution unique. Montrer que cette équation est équivalente à l'équation

$$u \in (H_0^1(\Omega))^n \cap X(\Omega), \qquad -Au = Pf.$$

Démontrer que $(A, D(A))$ est m-dissipatif dans $X(\Omega)$.

Chapitre 2

Théorème de Hille-Yosida

2.1 Équations différentielles dans un espace de Banach

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ la série $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ converge dans $\mathcal{L}(X)$. L'opérateur limite est noté e^{tA}. On peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

(i) $e^{0A} = 0$,

(ii) $e^{s+tA} = e^{sA}e^{tA}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{t\to 0}\|e^{tA} - I\| = 0$,

(iv) $Ax = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(e^{tA}x - x\Big)$ pour tout $x \in X$,

(v) l'équation différentielle

$$x' = Ax + f, \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

avec $f \in L^1(0,T;X)$ et $x_0 \in X$, admet pour solution

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds,$$

pour tout $t \in [0,T]$.

2.2 L'équation de la chaleur en dimension 1

Considérons l'équation

$$\begin{aligned}
&y \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap C([0,T];L^2(0,L)),\\
&y_t - y_{xx} = 0 \qquad \text{dans } (0,L)\times(0,T),\\
&y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad \text{dans } (0,T),\\
&y(x,0) = y_0(x) \qquad \text{dans } (0,L),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

où $T > 0$, $L > 0$, et $y_0 \in L^2(0,L)$. Nous pouvons reécrire l'équation sous la forme

$$\begin{aligned}
&y \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap C([0,T];L^2(0,L)) \qquad \text{et} \qquad \tfrac{dy}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(0,L)),\\
&\tfrac{dy}{dt} = Ay \qquad \text{dans } L^2(0,T;H^{-1}(0,L)),\\
&y(0) = y_0 \qquad \text{dans } L^2(0,L),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

où $A \in \mathcal{L}(H_0^1(0,L); H^{-1}(0,L))$ est défini par

$$\langle Ay, z\rangle = -\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla z \, dx.$$

On peut aussi définir A comme opérateur non borné dans $L^2(0,L)$, en posant

$$D(A) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \qquad Ay = y_{xx}.$$

L'équation (2.3) est bien de la forme (2.1). Nous souhaiterions donc écrire la solution de l'équation (2.3) sous la forme

$$y(t) = e^{tA}y_0.$$

Mais A étant un opérateur non borné dans $L^2(0,L)$, l'opérateur e^{tA} ne peut pas être défini comme dans la section 1. Essayons de trouver une autre définition pour e^{tA}. Pour cela remarquons que la famille $(\phi_k)_{k\geq 1}$ définie par

$$\phi_k = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big),$$

est une base hilbertienne de $L^2(0,L)$, formée de fonctions propres de l'opérateur $(A, D(A))$. Recherchons la solution de l'équation (2.2) sous la forme

$$y(x,t) = \Sigma_{k=1}^\infty g_k(t)\phi_k(x).$$

Si l'équation (2.2) est vérifiée au sens des distributions dans $(0,L)\times(0,T)$, alors g_k vérifie

$$\begin{aligned} &g_k' + \tfrac{k^2\pi^2}{L^2} g_k = 0 \qquad \text{dans } (0,T),\\ &g_k(0) = y_{0k} = (y_0, \phi_k). \end{aligned}$$

On a donc $g_k(t) = y_{0k}e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}$. On pose

$$y(x,t) = \Sigma_{k=1}^\infty y_{0k} e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}\phi_k(x). \tag{2.4}$$

On peut facilement vérifier que $y \in L^2(0,T; H_0^1(0,L)) \cap C([0,T]; L^2(0,L))$ et que y est solution de l'équation (2.2).

Remarquons que la série de (2.4) n'est pas définie pour $t < 0$.

Posons

$$S(t)y_0 = \Sigma_{k=1}^\infty (y_0, \phi_k) e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}\phi_k(x).$$

Pour tout $t \geq 0$, $S(t)$ appartient à $\mathcal{L}(L^2(0,L))$, $S(0) = I$, et nous avons

$$S(t+s)y_0 = S(t)S(s)y_0 \qquad \forall t \geq 0,\ \forall s \geq 0.$$

Les conditions (i) et (ii) de la section 1 sont donc vérifiées par la famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$. La condition (iii) est remplacée par

$$\lim_{t\searrow 0} \|S(t)y_0 - y_0\|_{L^2(0,L)} = 0.$$

Ce sont ces propriétés qui permettent d'étendre la notion d'exponentielle d'opérateurs au cas des opérateurs non bornés.

2.3 Semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach

Définition 2.3.1 *Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est un semi-groupe fortement continu sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées*

(i) $S(0) = I$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $s \geq 0$,

(iii) $\lim_{t\to 0}\|S(t)x - x\| = 0$ pour tout $x \in X$.

Théorème 2.3.1 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. Alors il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Preuve. Montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\|S(t)\|$ est borné pour tout $0 \leq t \leq \eta$. Supposons qu'il existe une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ et $\|S(t_n)\| \geq n$. Du Théorème de Banach-Steinhaus on déduit qu'il existe $x \in X$ tel que $\|S(t_n)x\|$ est non borné. Ce qui contredit la condition (iii) de la définition 2.3.1.

Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\|S(t)\| \leq M \qquad \text{pour tout } 0 \leq t \leq \eta.$$

Étant donné que $S(0) = I$, on a $M \geq 1$.

On pose $\omega = \frac{\ell n(M)}{\eta} \geq 0$. Soit $t \geq 0$, et soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \delta \leq \eta$ tels que $t = n\eta + \delta$. Utilisant les propriétés de semi-groupe, nous avons

$$\|S(t)\| \leq \|S(\delta)\|\|S(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = Me^{\omega t}.$$

Corollaire 2.3.1 *Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X alors, pour tout $x \in X$, l'application*

$$t \longmapsto S(t)x$$

est continue de $[0, \infty)$ dans X.

Preuve. (i) Soient $t \geq 0$ et $h \geq 0$, nous avons

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq \|S(t)\|\|S(h)x - x\| \leq Me^{\omega t}\|S(h)x - x\|.$$

On a donc

$$\lim_{h\searrow 0}\|S(h)x - x\| = 0.$$

(ii) Soient $t > 0$ et $t \geq h \geq 0$, nous avons

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|x - S(h)x\|.$$

On conclut avec le résultat montré en (i).

Définition 2.3.2 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur non borné $(A, D(A))$ défini par*

$$D(A) = \Big\{ x \in X \mid \quad \text{la limite } \lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{existe dans } X \Big\},$$

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Théorème 2.3.2 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) Pour tout $x \in X$, on a

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x.$$

(ii) Pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$, $\int_0^t S(s)x\, ds$ appartient à $D(A)$ et

$$A\Big(\int_0^t S(s)x\, ds \Big) = S(t)x - x.$$

(iii) Si $x \in D(A)$ alors $S(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(iv) Si $x \in D(A)$ alors

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AS(\tau)x\, d\tau$$

Preuve. (i) Soit $x \in X$. Le résultat (i) découle de la continuité de $\mathbb{R}^+$ dans X de l'application

$$t \longrightarrow S(t)x.$$

(ii) Utilisant les propriétés de semi-groupe, et le fait que $S(h) \in \mathcal{L}(X)$ pour $h > 0$, nous pouvons écrire

$$\frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(s)xds = \frac{1}{h} \int_0^t (S(s+h)x - S(s)x)ds$$

$$= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s)xds = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h S(s)xds.$$

En passant à la limite quand h tend vers zéro, nous obtenons

$$A \int_0^t S(s)xds = S(t)x - x.$$

(iii) Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$, on a :

$$\frac{S(h)-I}{h}S(t)x = S(t)\frac{S(h)-I}{h}x.$$

En pssant à la limite quand h tend vers zéro, nous obtenons :

$$AS(t)x = S(t)Ax = \frac{d^+}{dt}S(t)x.$$

Calculons $\frac{d^-}{dt}S(t)x - S(t)Ax$. Nous avons

$$\frac{1}{h}(S(t)x - S(t-h)x) - S(t)Ax = S(t-h)\frac{S(h)x-x}{h} - S(t)Ax$$

$$= S(t-h)\Big(\frac{S(h)x-x}{h} - Ax\Big) + \Big(S(t-h) - S(t)\Big)Ax.$$

Nous pouvons facilement établir que

$$\lim_{h\searrow 0}\|S(t-h) - S(t)\| = 0 \qquad \text{pour tout } t > 0,$$

et $\|S(t-h)\|$ est uniformément borné pour $h \in [0,t]$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\Big(S(t)x - S(t-h)x\Big) - S(t)Ax = 0,$$

i.e. $\frac{d^-}{dt}S(t)x - S(t)Ax = 0$.

(iv) Le résultat s'obtient en intégrant l'identité (iii) entre s et t.

Corollaire 2.3.2 *Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X alors $D(A)$ est dense dans X, et A est fermé.*

Preuve. (i) Montrons que $D(A)$ est dense dans X. Soit $x \in X$. Alors, du Théorème 2.3.2(ii), on déduit

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(s)xds \in D(A).$$

Avec le Théorème 2.3.2(i), on a $\lim_{h\searrow 0}x_h = x$.

(ii) Montrons que A est fermé. Soit $(x_n)_n \subset D(A)$ une suite telle que $\lim_{n\to 0}x_n = x$ et $\lim_{n\to 0}Ax_n = y$ dans X. Avec le Théorème 2.3.2(iv), on a

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(s)Ax_nds.$$

Or $S(s)Ax_n$ converge vers $S(s)y$ dans X, uniformément sur $[0,t]$. En passant à la limite sur n, il vient

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)yds.$$

En divisant cette égalité par $t > 0$, et en faisant tendre t vers zéro, avec le Théorème 2.3.2(i), on obtient $\lim_{t\searrow 0}\frac{S(t)x-x}{t} = y$. Nous en déduisons que $x \in D(A)$ et que $Ax = y$.

Théorème 2.3.3 *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X. Pour tout $x_0 \in D(A)$, $x(t) = S(t)x_0$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{aligned} &x \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X), \\ &x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \qquad x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Preuve. Soit $x_0 \in D(A)$, posons $x(t) = S(t)x_0$. Du Théorème 2.3.2(ii), nous déduisons que $x \in C([0,\infty); D(A))$. Du Théorème 2.3.2(iii), nous déduisons que $x \in C^1([0,\infty); X)$ et que $x' = Ax$.

Montrons l'unicité. Soit $t > 0$ arbitraire fixé. Soit $u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X)$ une autre solution du problème (2.5). Posons

$$v(s) = S(t-s)u(s) \qquad \text{pour } 0 \leq s \leq t.$$

Nous avons

$$\frac{dv}{dt}(s) = -AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s) = 0.$$

Par conséquent $v(s) = v(0)$ pour tout $s \in [0,t]$. En particulier $v(t) = u(t)$ et $v(0) = x(t)$. Donc $u(t) = x(t)$. La preuve est complète.

Théorème 2.3.4 *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X vérifiant*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $(A - cI, D(A))$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{-ct}S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X.

Preuve. Il est facile de vérifier que $(e^{-ct}S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X. Pour montrer que $(A - cI, D(A))$ son générateur infinitésimal, il suffit d'appliquer le Théorème 2.3.2(iii).

2.4 Semi-groupes de contractions

Définition 2.4.1 *Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X est un semi-groupe de contractions si*

$$\|S(t)\| \leq 1 \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Théorème 2.4.1 *(Théorème de Hille-Yosida 1) Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) A est fermé,

(ii) $D(A)$ est dense dans X,

(iii) pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 2.4.2 *(Théorème de Hille-Yosida 2) Un opérateur linéaire non borné* $(A, D(A))$ *dans* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si* A *est m-dissipatif et de domaine dense dans* X.

Remarque. L'énoncé du Théorème 2.4.1 correspond à l'une des multiples variantes de ce qui est qualifié comme étant le 'Théorème de Hille-Yosida' (cf [7, Théorème 3.1, Chapitre 1]). L'équivalence entre le Théorème 2.4.1 et le Théorème 2.4.2 découle de la définition d'opérateur m-dissipatif et des Théorèmes 1.2.1 et 1.2.3.

Preuve. Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X. Du Corollaire 2.3.2, nous déduisons que A est fermé et de domaine dense dans X.

Pour tout $\lambda > 0$, posons

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt.$$

Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ étant un semi-groupe de contractions sur X, on a

$$\|S(t)x\| \leq \|x\| \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Cette estimation permet de montrer que $R(\lambda)$ est un opérateur borné, en effet nous avons

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|S(t)x\| dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Nous voulons montrer que

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I \qquad \text{et} \qquad R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad \forall x \in D(A).$$

Pour tout $h > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{S(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t+h)x - S(t)x)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} S(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x\, dt.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $h \searrow 0$, nous obtenons

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Nous avons donc montré que $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$.

Pour tout $x \in D(A)$, on a :

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)x\, dt.$$

Du Théorème 2.3.2(iii), on déduit

$$\int_0^T e^{-\lambda t} AS(t)x\, dt = A\int_0^T e^{-\lambda t} S(t)x\, dt.$$

L'opérateur A étant fermé nous pouvons écrire

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)x\,dt = \lim_{T\to\infty} A \int_0^T e^{-\lambda t} S(t)x\,dt = A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt.$$

Nous avons donc

$$R(\lambda)Ax = A\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt = AR(\lambda)x,$$

soit encore

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad \forall x \in D(A).$$

Nous avons donc montré que, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ est inversible, et que son inverse $R(\lambda)$ vérifie l'estimation

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

L'opérateur A est donc m-dissipatif.

Réciproque. Supposons que A est m-dissipatif et de domaine dense dans X. Montrons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X.

Nous avons

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)}\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2\|R(\lambda;A)\|} \leq 1, \tag{2.6}$$

car $\lambda\|R(\lambda;A)\| \leq 1$. Donc $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contractions sur X. De plus

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = \left\|\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(e^{t\theta A_\lambda} e^{t(1-\theta)A_\mu})x\,d\theta\right\|$$

$$\leq \int_0^1 t\left\|e^{t\theta A_\lambda} e^{t(1-\theta)A_\lambda}(A_\lambda x - A_\mu x)\right\| d\theta$$

$$\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Pour tout $x \in D(A)$, on a donc

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|.$$

On en déduit que $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ converge, quand $\lambda \to \infty$, vers un élément $y(t)$ dans X, uniformément sur tout intervalle de temps $[0,T]$ borné. Posons

$$y(t) = T(t)x.$$

On vérifie aisément que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X, et que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contractions. En effet, on a

$$\|e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x - e^{sA_\lambda}T(t)x\| \leq \|e^{sA_\lambda}\|\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| \leq \|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\|.$$

En passant à la limite quand $\lambda \to \infty$, on obtient

$$T(t)T(s)x = T(s+t)x.$$

Les autres propriétés de semi-groupe se vérifient de manière analogue.

Il reste à vérifier que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Soit $x \in D(A)$. De la définition de $T(t)$ et du Théorème 2.3.2, on déduit

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\, ds,$$

car $\frac{d}{dt}e^{tA_\lambda} = e^{tA_\lambda}A_\lambda$. De plus, $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ converge vers $T(s)Ax$ uniformément sur $[0,t]$. On a donc

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\, ds.$$

Notons $(B, D(B))$ le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. En divisant l'égalité précédente par t et en faisant tendre t vers zéro, nous obtenons

$$Bx = \lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} = Ax \qquad \text{pour tout } x \in D(A).$$

On a donc

$$D(B) \supset D(A) \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } x \in D(A).$$

L'opérateur $(B, D(B))$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$. De la première partie de la preuve, nous déduisons que B est m-dissipatif. Donc $(I - B)$ est un isomorphisme de $D(B)$ sur X. Nous avons

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X,$$

car $Bx = Ax$ si $x \in D(A)$, et $(I - A)D(A) = X$ car A est m-dissipatif. Donc

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = (I - B)^{-1}(I - B)D(A) = D(A).$$

La preuve est terminée.

Théorème 2.4.3 *(Théorème de Lumer-Phillips) Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Si A est fermé et si A et A^* sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X.*

Remarque. L'énoncé ci-dessus n'est en fait qu'un corollaire du Théorème de Lumer-Phillips (cf [7, Théorème 4.3, Chapitre 1] pour un énoncé complet du Théorème de Lumer-Phillips, et [7, Corollaire 4.4, Chapitre 1] pour l'énoncé du Théorème 2.4.3).

Preuve. Le résultat découle des Théorèmes 1.2.5 et 2.4.2.

Si $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X, nous pouvons définir les puissances de A en tant qu'opérateurs non bornés de la façon suivante :

$$D(A^2) = \Big\{x \in D(A) \mid Ax \in D(A)\Big\} \qquad \text{et } A^2x = A(Ax).$$

De manière itérative, pour tout entier $k \geq 2$, nous posons

$$D(A^k) = \Big\{x \in D(A^{k-1}) \mid Ax \in D(A^{k-1})\Big\} \qquad \text{et } A^kx = A(A^{k-1}x).$$

Si $(A, D(A))$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, il est possible de définir de nouveaux opérateurs m-dissipatifs comme suit. Nous définissons $(A_1, D(A_1))$ par

$$D(A_1) = D(A^2) \qquad \text{et} \quad A_1x = Ax \quad \text{pour tout } \ x \in D(A_1).$$

Théorème 2.4.4 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur X engendré par A. Alors $(A_1, D(A_1))$ est un opérateur m-dissipatif dans $D(A)$ (muni de la norme du graphe). De plus le semi-groupe $(S_1(t))_{t\geq 0}$ sur $D(A)$ engendré par A_1 vérifie $S_1(t)x = S(t)x$ pour tout $x \in D(A)$.*

Preuve. (i) Montrons tout d'abord que A_1 est un opérateur dissipatif dans $D(A)$. Pour tout $x \in D(A_1) = D(A^2)$, et tout $\lambda > 0$, nous avons

$$\|A(\lambda x - Ax)\|_X = \|\lambda(Ax) - A(Ax)\|_X \geq \lambda\|Ax\|_X$$

car A est dissipatif. Nous en déduisons

$$\|\lambda x - Ax\|_{D(A)} = \|\lambda x - Ax\|_X + \|A(\lambda x - Ax)\|_X \geq \lambda(\|x\|_X + \|Ax\|_X) = \lambda\|x\|_{D(A)}.$$

Donc A_1 est dissipatif.

(ii) Soit $\lambda > 0$ et $f \in D(A)$. Alors $x = R(\lambda; A)f$ est la solution dans $D(A)$ de l'équation

$$\lambda x - Ax = f,$$

et Ax est la solution dans $D(A)$ de

$$\lambda(Ax) - A(Ax) = Af.$$

Donc $x \in D(A_1)$ et A_1 est m-dissipatif dans $D(A)$.

(iii) Montrons que $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$. Soit $x \in D(A)$. Pour tout $\lambda > 0$, posons $x_\lambda = \lambda R(\lambda; A)x$. Comme en (ii), nous pouvons montrer que $x_\lambda \in D(A_1)$. Du Théorème 1.2.4 nous déduisons

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|x_\lambda - x\|_X = 0,$$

et

$$Ax_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)x = A_\lambda x \to Ax \qquad \text{quand} \quad \lambda \to \infty.$$

On a donc montré que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|x_\lambda - x\|_{D(A)} = 0.$$

(iv) Du Théorème 2.4.2 il découle que $(A_1, D(A_1))$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe de contractions $(S_1(t))_{t\geq 0}$ sur $D(A)$. Nous allons établir que $S_1(t) = S(t)|_{D(A)}$. Soit $x_0 \in D(A^2)$. Posons $x(t) = S(t)x_0$. Du Théorème 2.3.3 il découle que x est l'unique solution du problème

$$x \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X),$$
$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \qquad x(0) = x_0.$$

Mais, toujours d'après le Théorème 2.3.3, $y(t) = Ax(t) = AS(t)x_0 = S(t)Ax_0$ est l'unique solution du problème

$$y \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X),$$
$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \qquad y(0) = Ax_0.$$

Comme $y(t) = x'(t)$ et $y(t) = Ax(t) = A_1x(t)$, nous obtenons $x \in C([0,\infty); D(A^2)) \cap C^1([0,\infty); D(A))$. Donc x est l'unique solution du problème

$$\begin{aligned} &x \in C([0,\infty); D(A_1)) \cap C^1([0,\infty); D(A)), \\ &x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \qquad x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Appliquant le Théorème 2.3.3 au problème (2.7), nous obtenons

$$S_1(t)x_0 = S(t)x_0 \qquad \text{pour tout} \quad x_0 \in D(A_1).$$

Par densité le résultat reste vrai pour tout $x_0 \in D(A)$.

Si $(A, D(A))$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, pour tout $k \geq 1$, nous définissons $(A_k, D(A_k))$ par

$$D(A_k) = D(A^{k+1}) \qquad \text{et} \quad A_kx = Ax \quad \text{pour tout } x \in D(A_k).$$

Corollaire 2.4.1 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur X engendré par A. Alors $(A_k, D(A_k))$ est un opérateur m-dissipatif dans $D(A^k)$ (muni de la norme du graphe). De plus le semi-groupe $(S_k(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur $D(A^k)$ engendré par A_k vérifie $S_k(t)x = S(t)x$ pour tout $x \in D(A^k)$.*

Preuve. Le corollaire se démontre par récurrence sur k, et la preuve est analogue à celle du Théorème 2.4.4.

Théorème 2.4.5 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur X engendré par A. Si $x_0 \in D(A^2)$ alors la solution $x(t) = S(t)x_0$ du problème (2.5) vérifie*

$$x \in C^2([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); D(A)) \cap C([0,\infty); D(A^2)).$$

Plus généralement si $x_0 \in D(A^k)$ alors

$$x \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,\infty); D(A^j)).$$

Preuve. Si $x_0 \in D(A^2)$, nous avons déjà dans la partie (iv) de la preuve du Théorème 2.4.4 que la solution du problème (2.5) appartient à $C^2([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); D(A)) \cap C([0,\infty); D(A^2))$. La généralisation à $k > 1$ se démontre de manière analogue.

Théorème 2.4.6 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X et soit $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur X engendré par A. Alors, pour tout $x \in X$, nous avons*

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}\Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n}x = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t}; A\Big)\Big)^{n}x \qquad \text{pour tout } t > 0. \tag{2.8}$$

Preuve. Par définition de la résolvante, nous avons

$$\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big) = \frac{n}{t}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)^{-1} = \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-1}.$$

Dans la preuve du Théorème 2.4.2 nous avons déjà montré que

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty}\Big(e^{tA_\lambda}\Big)x.$$

Posons $\lambda = \frac{n}{t}$, nous avons

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}\Big(e^{tA_{n/t}}\Big)x.$$

Avec l'égalité $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda I$, nous obtenons

$$tA_{n/t} = t\Big[\frac{n^2}{t^2}R\Big(\frac{n}{t};A\Big) - \frac{n}{t}I\Big] = n\Big[\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big) - I\Big].$$

Utilisant le Lemme 2.4.1 avec $L = \frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)$, nous obtenons

$$\Big\|\exp\Big(n\Big[\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big) - I\Big]\Big)x - \Big[\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big]^n x\Big\| \leq \sqrt{n}\Big\|\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)x - x\Big\|.$$

Avec l'estimation (cf (1.4))

$$\Big\|\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)x - x\Big\| \leq \frac{t}{n}\|Ax\|,$$

nous obtenons

$$\Big\|e^{tA_{n/t}}x - \Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big)^n x\Big\| \leq \frac{t}{\sqrt{n}}\|Ax\|, \qquad \forall x \in D(A).$$

Soit $x \in X$ fixé, et soit $(x_k)_k$ une suite de $D(A)$ convergeant vers x dans X. Utilisant l'estimation précédente et (2.6), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\Big\|e^{tA_{n/t}}x - \Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big)^n x\Big\| &\leq \Big\|e^{tA_{n/t}}x - e^{tA_{n/t}}x_k\Big\| + \Big\|e^{tA_{n/t}}x_k - \Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big)^n x_k\Big\| \\ &+\Big\|\Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big)^n x_k - \Big(\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big)^n x\Big\| \\ &\leq 2\|x - x_k\| + \frac{t}{\sqrt{n}}\|Ax_k\|.\end{aligned}$$

On en déduit (2.8).

Lemme 2.4.1 *Soit $L \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|L\| \leq 1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on a*

$$\|e^{n(L-I)}x - L^n x\| \leq \sqrt{n}\|x - Lx\|.$$

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq n$, nous avons

$$\|L^k x - L^n x\| = \|\Sigma_{j=n}^{k-1}(L^{j+1}x - L^j x)\| \leq \|x - Lx\|\Sigma_{j=n}^{k-1}\|L^j\| \leq (k-n)\|x - Lx\|.$$

Donc $\|L^k x - L^n x\| \leq |k-n|\|x - Lx\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons

$$\|e^{t(L-I)}x - L^n x\| = \left\|e^{-t}\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(L^k x - L^n x)\right\| \leq e^{-t}\Big(\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}|k-n|\Big)\|x - Lx\|.$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous déduisons

$$\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}|k-n| \leq \Big(\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big)^{1/2}\Big(\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}|k-n|^2\Big)^{1/2}.$$

De plus, on a

$$\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}|k-n|^2 = n^2\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} - (2n-1)t\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} + t^2\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = (t^2 - (2n-1)t + n^2)e^t.$$

En prenant $t = n$, nous obtenons

$$\|e^{n(L-I)}x - L^n x\| \leq \|x - Lx\|e^{-n}e^{n/2}\sqrt{n}e^{n/2} = \sqrt{n}\|x - Lx\|.$$

2.5 Semi-groupes sur un espace de Hilbert

Dans cette section, nous supposerons que X est un espace de Hilbert, et nous identifions X et X'.

Théorème 2.5.1 *Soit $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X. Si l'opérateur A est auto-adjoint alors, pour tout $x_0 \in X$, $x(t) = S(t)x_0$ est l'unique solution du problème*

$$x \in C([0,\infty); X) \cap C((0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X),$$
$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout } t > 0, \qquad x(0) = x_0.$$

De plus, pour tout $t > 0$, on a

$$\|Ax(t)\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|x_0\| \qquad \text{et} \qquad -(Ax(t), x(t)) \leq \frac{1}{2t}\|x_0\|^2,$$

et

$$\|Ax(t)\|^2 \leq -\frac{1}{2t}(Ax(t), x(t)) \qquad \text{si } x_0 \in D(A).$$

Preuve. Nous renvoyons à [3, Théorème 3.2.1] ou à [6, Théorème 4.5.2].

Théorème 2.5.2 *Soit $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X. Si l'opérateur A est anti-adjoint alors le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ s'étend à un groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ tel que*

$$\forall x_0 \in X, \qquad S(\cdot)x_0 \in C(\mathbb{R}; X),$$
$$\forall x_0 \in X,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|S(\cdot)x_0\| = \|x_0\|,$$
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall s \in \mathbb{R}, \qquad S(s+t) = S(s)S(t),$$

et pour tout $x_0 \in D(A)$, $x(t) = S(t)x_0$ vérifie

$$x \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}; X),$$
$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = x_0.$$

Preuve. Nous renvoyons à [3, Théorème 3.2.3].

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1

Nous considérons le système de la thermo-élasticité linéaire en dimension 1 suivant

$$\begin{aligned} &z_{tt} - \alpha^2 z_{xx} + \gamma_1 \theta_x = 0 \qquad \text{dans } (0,L) \times (0,T), \\ &\theta_t + \gamma_2 z_{xt} - k\theta_{xx} = 0 \qquad \text{dans } (0,L) \times (0,T), \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec les conditions limites

$$z(0,t) = z(L,t) \quad \text{dans } (0,T), \qquad \text{et } \theta_x(0,t) = 0,\ \ \theta_x(L,t) = 0, \tag{2.10}$$

et les conditions initiales

$$z(x,0) = z_0(x), \quad z_t(x,0) = z_1(x), \quad \text{et } \theta(x,0) = \theta_0(x) \quad \text{dans } (0,L), \tag{2.11}$$

avec $\alpha > 0$, $k > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. Physiquement z représente le déplacement d'une corde élastique et θ sa température. En posant $y = (y_1, y_2, y_3) = (z, z_t, \theta)$, le système (2.9)-(2.11) peut être écrit sous la forme d'une équation d'évolution du premier ordre $y' = Ay$, $y(0) = y_0$. Nous posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \alpha^2 \dfrac{d^2}{dx^2} & 0 & -\gamma_1 \dfrac{d}{dx} \\ 0 & -\gamma_2 \dfrac{d}{dx} & k\dfrac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix},$$

et

$$D(A) = \{y \mid y_1 \in H^2 \cap H_0^1(0,L),\ \ y_2 \in H_0^1(0,L),\ \ y_3 \in H^2(0,L) \text{ tel que } y_{3x}(0) = y_{3x}(L) = 0\}.$$

Nous munissons $Y = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$ du produit scalaire

$$(y, w) = \int_0^L (\frac{dy_1}{dx}\frac{dw_1}{dx} + y_2 w_2 + y_3 w_3).$$

1 - Démontrer que $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur Y.

2 - Nous supposons que $z_0 \in H_0^1(0,L)$, $z_1 \in L^2(0,L)$, et $\theta \in L^2(0,L)$. Prouver que le système (2.9)-(2.11) admet une unique solution (z, z_t, θ) in $C([0,T]; H_0^1(0,L)) \times C([0,T]; L^2(0,L)) \times C([0,T]; L^2(0,L))$.

Exercice 2.6.2

Considérons le système hyperbolique du premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} z_1(x,t) \\ z_2(x,t) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} m_1 z_1 \\ -m_2 z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{dans} \ \ (0,\ell)\times(0,T) \tag{2.12}$$

avec les conditions initiales

$$z_1(x,0) = z_{01}(x), \qquad z_2(x,0) = z_{02}(x) \qquad \text{dans} \ \ (0,\ell), \tag{2.13}$$

avec les conditions limites

$$z_1(\ell,t) = 0, \qquad z_2(0,t) = 0 \qquad \text{dans} \ \ (0,T). \tag{2.14}$$

Pour simplifier nous supposons que les coefficients $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} sont constants. Nous supposons aussi que

$$b_{11}z_1^2 + b_{21}z_2z_1 + b_{21}z_1z_2 + b_{22}z_2^2 \geq 0 \qquad \text{pour tout} \ \ (z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Nous posons $Z = L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$, et nous définissons l'opérateur A non borné dans Z par

$$D(A) = \{z \in H^1(0,\ell)\times H^1(0,\ell) \mid z_1(\ell) = 0, \quad z_2(0) = 0\}$$

et

$$Az = \begin{bmatrix} m_1\dfrac{dz_1}{dx} - b_{11}z_1 - b_{12}z_2 \\ -m_2\dfrac{dz_2}{dx} - b_{21}z_1 - b_{22}z_2 \end{bmatrix}.$$

Nous munissons $D(A)$ de la norme $\|z\|_{D(A)} = (\|z_1\|^2_{H^1(0,\ell)} + \|z_2\|^2_{H^1(0,\ell)})^{1/2}$. Montrer que l'opérateur $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions sur Z.

Chapitre 3

Équations d'évolution non-homogènes

Dans ce chapitre X désigne un espace de Banach, $(A, D(A))$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, et $(S(t))_{t\geq 0}$ désigne le semi-groupe sur X engendré par A.

Soit $T > 0$, $x_0 \in X$ et f une application de $[0, T]$ à valeurs dans X. Nous souhaitons étudier l'équation

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \qquad \text{dans } (0, T), \qquad x(0) = x_0. \tag{3.1}$$

Si $u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$ vérifie l'équation (3.1), alors nécessairement $x_0 \in D(A)$ et $f \in C([0, T]; X)$. De plus l'équation est vérifiée en tout point $t \in [0, T]$. Nous verrons au Théorème 3.1.2 que si $x_0 \in D(A)$ et $f \in C([0, T]; X) \cap L^1(0, T; D(A))$ alors l'équation (3.1) admet une solution unique dans $u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$. Pour étudier cette équation quand $x_0 \notin D(A)$ ou $f \notin C([0, T]; X) \cap L^1(0, T; D(A))$, nous devons étendre la notion de solution.

3.1 Solutions faibles dans $L^p(0, T; X)$

Nous supposons dans cette section que $f \in L^p(0, T; X)$ avec $1 \leq p < \infty$.

Définition 3.1.1 *Une solution faible de l'équation (3.1) dans $L^p(0, T; X)$ est une fonction $u \in L^p(0, T; X)$ telle que, pour tout $v \in D(A^*)$, l'application*

$$t \longmapsto \langle u(t), v\rangle$$

appartient à $W^{1,p}(0, T)$ et vérifie

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle = \langle u(t), A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle, \qquad \text{et} \quad \langle u(0), v\rangle = \langle x_0, v\rangle. \tag{3.2}$$

Nous admettons le lemme suivant dont la preuve n'est pas complique.

Lemme 3.1.1 *Soit $(A, D(A))$ est un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans X. Si $u \in X$ et $z \in X$ vérifient*

$$\langle y, u\rangle = \langle A^*y, z\rangle,$$

pour tout $y \in D(A^*)$, alors $z \in D(A)$ et $u = Az$.

Théorème 3.1.1 *Si $x_0 \in X$ et si $f \in L^p(0,T;X)$, alors l'équation (3.1) admet une solution faible unique dans $L^p(0,T;X)$. De plus cette solution appartient à $C([0,T];X)$ et est définie par*

$$u(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Preuve. La fonction u définie par (3.3) appartient à $C([0,T];X) \subset L^p(0,T;X)$. Soit $y \in D(A^*)$ et $\phi \in \mathcal{D}(]0,T[)$. Nous voulons montrer que

$$-\int_0^T \langle y, u(t)\rangle \phi'(t)\,dt = \int_0^T \Big[\langle A^*y, u(t)\rangle + \langle y, f(t)\rangle\Big]\phi(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle y, u(t)\rangle \phi'(t)\,dt &= -\int_0^T \Big[\langle y, S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds\rangle\Big]\phi'(t)\,dt \\ &= -\int_0^T \langle y, S(t)x\rangle \phi'(t)\,dt - \int_0^T\int_s^T \langle y, S(t-s)f(s)\rangle\phi'(t)\,dt\,ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De plus

$$\frac{d}{dt}\langle y, S(t)x\rangle = \langle y, AS(t)x\rangle = \langle A^*y, S(t)x\rangle,$$

pour tout $x \in D(A)$. Par densité, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\langle y, S(t)x\rangle = \langle A^*y, S(t)x\rangle,$$

pour tout $x \in X$. Nous utilisons cette identité pour faire les intégrations par parties suivantes

$$-\int_0^T \langle y, S(t)x\rangle\phi'(t)\,dt = \int_0^T \langle A^*y, S(t)x\rangle\phi(t)\,dt, \tag{3.6}$$

et

$$-\int_s^T \langle y, S(t-s)f(s)\rangle\phi'(t)\,dt = \int_s^T \langle A^*y, S(t-s)f(s)\rangle\phi(t)\,dt + \langle y, f(s)\rangle\phi(s). \tag{3.7}$$

Avec (3.5), (3.6), et (3.7), nous obtenons l'identité (3.4) pour tout $y \in D(A^*)$ et $\phi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, ce qui est équivalent à l'équation (3.2). Nous avons donc montré que la fonction u définie par (3.3) est solution faible de l'équation (3.1).

Pour montrer l'unicité, nous allons montrer que la seule solution faible de l'équation (3.1) correspondant à $x = 0$ et $f = 0$ est la solution $u = 0$. Par définition de la solution faible, nous avons

$$\frac{d}{dt}\langle y, u(t)\rangle = \langle A^*y, u(t)\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle y, u(t)\rangle|_{t=0} = 0,$$

pour tout $y \in D(A^*)$. Par conséquent

$$\langle y, u(t)\rangle = \langle A^*y, \int_0^t u(s)\,ds\rangle = \langle A^*y, z(t)\rangle, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T],$$

où

$$z(t) = \int_0^t u(s)\,ds.$$

Du Lemme 3.1.1, on déduit que $z(t) \in D(A)$ et $u(t) = Az(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. De plus, comme $u \in L^p(0,T;X)$, alors $z \in L^p(0,T;D(A))$ et

$$\frac{dz}{dt}(t) = u(t) = Az(t) \in L^p(0,T;D(A)).$$

Donc $z \in L^p(0,T;D(A)) \cap W^{1,p}(0,T;X)$. En posant $w(t) = \int_0^t z(s)\,ds$, et par un calcul analogue au précédent, nous établissons que $w \in W^{1,p}(0,T;D(A)) \cap W^{2,p}(0,T;X)$ et $\frac{dw}{dt}(t) = z(t) = Aw(t) \in W^{1,p}(0,T;D(A))$. Donc w est solution du problème

$$\begin{aligned} & w \in C([0,\infty);D(A)) \cap C^1([0,\infty);X), \\ & w'(t) = Aw(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \qquad w(0) = 0. \end{aligned}$$

Du Théorème 2.3.3 on déduit que l'unique solution de ce problème est $w = 0$. On a donc $z = 0$ et $u = 0$.

Théorème 3.1.2 *Si $x_0 \in D(A)$ et si $f \in C([0,T];X) \cap L^1(0,T;D(A))$ ou si $f \in W^{1,1}(0,T;X)$ alors la solution faible u de l'équation (3.1) appartient à $C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];X)$.*

Preuve. Nous renvoyons à [3, Proposition 4.1.6] (voir aussi [6, page 207] et [7, page 109] pour des résultats recouvrant partiellement le Théorème 3.1.2).

3.2 Semi-groupe adjoint

Théorème 3.2.1 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Si $(\lambda I - A)$ est un opérateur bijectif de $D(A)$ sur X, et si $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, alors $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur bijectif de $D(A^*)$ sur X', $(\lambda I - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X')$, et*

$$(\lambda I - A^*)^{-1} = [(\lambda I - A)^{-1}]^*.$$

Preuve. De la définition de l'adjoint d'un opérateur, nous déduisons que $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A^*$. (Dans l'écriture $\lambda I - A^*$, I désigne l'identité dans X', et $(\lambda I - A)$ est ici considéré comme opérateur appartenant à $\mathcal{L}(D(A);X)$.) Comme $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X, $[(\lambda I - A)^{-1}]^*$ est un opérateur borné sur X'. Nous allons montrer que $(\lambda I - A^*)$ est inversible et que son inverse est égal à $[(\lambda I - A)^{-1}]^*$. Montrons tout d'abord que $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur injectif. S'il existe $y \in X' \neq 0$ tel que $(\lambda I - A^*)y = 0$, alors $\langle (\lambda I - A^*)y, x\rangle = \langle y, (\lambda I - A)x\rangle$ pour tout $x \in D(A)$. Comme $(\lambda I - A)$ est bijectif de $D(A)$ sur X, on a nécessairement $y = 0$ et $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur injectif.

Pour tout $x \in X$ et tout $y \in D(A^*)$, nous avons

$$\langle y, x\rangle = \langle y, (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\rangle = \langle (\lambda I - A^*)y, (\lambda I - A)^{-1}x\rangle.$$

Par conséquent

$$[(\lambda I - A)^{-1}]^*(\lambda I - A^*)y = y \qquad \text{pour tout } y \in D(A^*). \tag{3.8}$$

Pour tout $x \in D(A)$ et tout $y \in X'$, nous avons

$$\langle y, x\rangle = \langle y, (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x\rangle = \langle [(\lambda I - A)^{-1}]^* y, (\lambda I - A)x\rangle,$$

d'où l'on déduit

$$(\lambda I - A^*)[(\lambda I - A)^{-1}]^* y = y \qquad \text{pour tout } y \in X'. \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), nous déduisons que $(\lambda I - A^*)$ est un opérateur bijectif de $D(A^*)$ sur X' et que $(\lambda I - A^*)^{-1} = [(\lambda I - A)^{-1}]^*$. La preuve est complète.

Théorème 3.2.2 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Si X est réflexif et si A est m-dissipatif alors, $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X', ayant $(A^*, D(A^*))$ comme générateur infinitésimal.*

Preuve. Il est facile de vérifier que $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs bornés sur X' vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2.3.1. Nous voulons montrer que $(A^*, D(A^*))$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X', et que ce semi-groupe n'est autre que $(S(t)^*)_{t\geq 0}$.

Des Théorèmes 3.2.1, 2.4.1, et 2.4.2, nous déduisons que, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A^*)$ est une bijection de $D(A^*)$ sur X', $(\lambda I - A^*)^{-1}$ est un opérateur borné sur X', et

$$\|(\lambda I - A^*)^{-1}\| = \|[(\lambda I - A)^{-1}]^*\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Avec le Théorème 1.1.1, nous savons que $D(A^*)$ est dense dans X'. Du Théorème 1.2.3 nous déduisons que A^* est fermé. Finalement, appliquant le Théorème 2.4.1, nous avons montré que $(A^*, D(A^*))$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X'.

Notons $(S^*(t))_{t\geq 0}$. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in X'$, grâce au Théorème 3.2.1, nous avons

$$\Big\langle y, \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} x\Big\rangle = \Big\langle \Big(I - \frac{t}{n}A^*\Big)^{-n} y, x\Big\rangle.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ avec le Théorème 2.4.4, nous obtenons

$$\langle y, S(t)x\rangle = \langle S^*(t)y, x\rangle.$$

Nous avons donc montré que $S^*(t) = S(t)^*$.

3.3 Solutions faibles dans $L^p(0, T; (D(A^*))')$

Lorsque les données de l'équation (3.1) sont peu régulières, il est possible d'étendre la notion de solution en utilisant des arguments de dualité. C'est l'objet de cette section. Dans la suite du chapitre, nous nous limitons au cas où X est un espace de Hilbert. (Les résultats présentés peuvent s'étendre sans trop de difficulté au cas où X est un espace de Banach réflexif. Le cas non réflexif a aussi été étudié dans la littérature, mais il est beaucoup plus délicat.)

Les injections

$$D(A) \hookrightarrow X \qquad \text{et} \qquad D(A^*) \hookrightarrow X'$$

sont continues et à image dense. On en déduit

$$D(A) \hookrightarrow X \hookrightarrow (D(A^*))'.$$

L'opérateur $(A, D(A))$ étant le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X, du Théorème 3.2.2 il découle que $(A^*, D(A^*))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X'. Notons $(S^*(t))_{t\geq 0}$ ce semi-groupe.

Rappelons que l'opérateur $(A_1^*, D(A_1^*))$ défini par

$$D(A_1^*) = D((A^*)^2), \qquad A_1^* y = A^* y \quad \text{pour tout } y \in D(A_1^*),$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur $D(A^*)$ et que ce semi-groupe $(S_1^*(t))_{t\geq 0}$ vérifie $S_1^*(t)y = S^*(t)y$ pour tout $y \in D(A^*)$ (Théorème 2.4.4).

Du Théorème 3.2.2 nous déduisons que $((S_1^*)^*(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe sur $(D(A^*))'$ engendré par $(A_1^*)^*$. Nous allons montrer que $(S_1^*)^*(t)$ est l'extension continue de $S(t)$ à $(D(A^*))'$. Plus précisément nous avons le

Théorème 3.3.1 *L'adjoint de l'opérateur non borné $(A_1^*, D(A_1^*))$ dans $D(A^*)$ est l'opérateur $((A_1^*)^*, D((A_1^*)^*))$ défini par*

$$D((A_1^*)^*) = X, \qquad \langle (A_1^*)^* x, y\rangle = \langle x, A_1^* y\rangle \qquad \text{pour tout } x \in X \quad \text{et tout } y \in D(A_1^*).$$

De plus, $(A_1^*)^* x = Ax$ pour tout $x \in D(A)$. Le semi-groupe $((S_1^*)^*(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe sur $(D(A^*))'$ engendré par $(A_1^*)^*$ et

$$(S_1^*)^*(t)x = S(t)x \qquad \text{pour tout } x \in X \quad \text{et tout } t \geq 0.$$

Preuve. Montrons que $D((A_1^*)^*) = X$. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in D(A_1^*)$, on a

$$|\langle x, A_1^* y\rangle_{(D(A^*))', D(A^*)}| = |\langle x, A_1^* y\rangle_{X,X'}| \leq \|x\|_X \|y\|_{D(A^*)}.$$

Par conséquent

$$X \subset D((A_1^*)^*). \tag{3.10}$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in X$, et soit $y_x \in X'$ tel que

$$\|x\|_X = \sup_{y\in X'} \frac{\langle x, y\rangle_{X,X'}}{\|y\|_{X'}} = \frac{\langle x, y_x\rangle_{X,X'}}{\|y_x\|_{X'}}.$$

Nous avons

$$\|x\|_X = \frac{\langle x, (I-A_1^*)(I-A_1^*)^{-1} y_x\rangle_{X,X'}}{\|y_x\|_{X'}} = \frac{\langle x, (I-A_1^*) z_x\rangle_{X,X'}}{\|z_x\|_{D(A^*)}}$$

avec $z_x = (I - A_1^*)^{-1} y_x$. Étant donné que

$$\|x\|_{D((A_1^*)^*)} = \sup_{z\in D(A^*)} \frac{\langle x, (I-A_1^*) z\rangle_{X,X'}}{\|z\|_{D(A^*)}},$$

on a

$$\|x\|_{D((A_1^*)^*)} \leq \|x\|_X. \tag{3.11}$$

L'égalité $D((A_1^*)^*) = X$ découle de (3.10) et (3.11).

Pour tout $x \in D(A)$, et tout $y \in D(A_1^*)$, nous avons

$$\langle (A_1^*)^* x, y \rangle = \langle x, A_1^* y \rangle = \langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle.$$

Par conséquent, $(A_1^*)^* x = Ax$ pour tout $x \in D(A)$.

Du Théorème 3.2.2 nous déduisons que $((S_1^*)^*(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe sur $(D(A^*))'$ engendré par $(A_1^*)^*$. Pour montrer que $(S_1^*)^*(t)x = S(t)x$ pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$, il suffit de remarquer que

$$\langle (S_1^*)^*(t)x, y \rangle = \langle x, S_1^*(t)y \rangle = \langle x, S^*(t)y \rangle = \langle S(t)x, y \rangle,$$

pour tout $x \in X$, tout $y \in D(A^*)$, et tout $t \geq 0$.

Remarque. Nous pouvons donc étendre la notion de solution pour l'équation (3.1) dans le cas où $x_0 \in (D(A^*))'$ et $f \in L^p(0, T; (D(A^*))')$, en considérant l'équation

$$u'(t) = (A_1^*)^* u(t) + f(t) \qquad \text{dans } (0, T), \qquad x(0) = x_0. \tag{3.12}$$

De nombreux auteurs font l'abus de notation consistant à remplacer A_1^* par A^* et écrivent donc l'équation (3.12) sous la forme (cf [1, page 160])

$$u'(t) = (A^*)^* u(t) + f(t) \qquad \text{dans } (0, T), \qquad x(0) = x_0. \tag{3.13}$$

Étant donné que $(A_1^*)^*$ est une extension de l'opérateur A, on trouve parfois les équations (3.12) ou (3.13) encore écrites sous la forme (3.1) même si $x_0 \in (D(A^*))'$ ou si $f \in L^p(0, T; (D(A^*))')$.

Chapitre 4

Sujets d'examens

Examen Janvier 2001

Dans la suite ω désigne un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$, de frontière γ. Soit $L > 0$, on notera Ω le cylindre de $\mathbb{R}^3$ défini par $\Omega = \omega \times (0, L)$. Un point quelconque de ω sera noté (x, y), z désignera un point quelconque de $(0, L)$, et (x, y, z) désignera un point quelconque de Ω. Le but du problème est d'étudier l'équation aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, z, t) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, y, z, t) = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, L) \times (0, T), \\ u(x, y, 0, t) = u_1(x, y, t) & \text{pour } (x, y, t) \in \omega \times (0, T), \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Dans ce système T est un réel positif donné, on précisera plus loin comment sont choisies les fonctions f, u_0 et u_1. Pour simplifier les notations on posera $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$, $\frac{\partial u}{\partial z} = u_z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$, et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$.

1 - Pour tout réel $\lambda \geq 0$, on étudie tout d'abord l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} u_z - u_{xx} - u_{yy} + \lambda u = \phi(x, y, z) & \text{dans } \omega \times (0, L), \\ u(x, y, z) = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, L), \\ u(x, y, 0) = 0 & \text{dans } \omega. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Montrer que pour tout $\phi \in L^2(\Omega)$ et tout $\lambda > 0$, l'équation (4.2) admet une solution faible unique u^λ, et que cette solution vérifie

$$\|u^\lambda\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

On admettra qu'il existe une constante positive C_1 telle que

$$\|u^0\|_{L^2(0,L;H^2(\omega))} \leq C_1 \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } \phi \in L^2(\Omega),$$

où u^0 est la solution de (4.2) correspondant à $\lambda = 0$. On pose

$$D(A) = \{u \in L^2(0, L; H^2 \cap H^1_0(\omega)) \mid u \in H^1(0, L; L^2(\omega)),\ u(x, y, 0) = 0 \text{ dans } \omega\},$$

et

$$Au = u_z - u_{xx} - u_{yy} \text{ pour tout } u \in D(A).$$

Montrer que $(-A)$, de domaine $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$, est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions dans $L^2(\Omega)$.

Montrer que l'adjoint de A dans $L^2(\Omega)$ est défini par

$$D(A^*) = \{v \in L^2(0, L; H^2 \cap H_0^1(\omega)) \mid v \in H^1(0, L; L^2(\omega)),\ v(x, y, L) = 0 \text{ dans } \omega\},$$

et

$$A^*v = -v_z - v_{xx} - v_{yy} \text{ pour tout } v \in D(A^*).$$

2 - On étudie maintenant l'équation suivante

$$\begin{cases} u_t + u_z - u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, z, t) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, y, z, t) = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, L) \times (0, T), \\ u(x, y, 0, t) = 0 & \text{pour } (x, y, t) \in \omega \times (0, T), \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ et tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, l'équation (4.3) admet une solution faible unique u, que cette solution appartient à $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, L; L^2(\omega \times (0, T))) \cap L^2((0, T) \times (0, L); H_0^1(\omega))$ et vérifie

$$\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,L;L^2(\omega\times(0,T)))} + \|u\|_{L^2((0,T)\times(0,L);H_0^1(\omega))}$$
$$\leq C_2(\|f\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}),$$

pour une certaine constante $C_2 > 0$. Montrer que u appartient à $C([0, L]; L^2(\omega \times (0, T)))$.

Montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que la solution u de l'équation (4.3) vérifie

$$\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|u\|_{C([0,L];L^2(\omega\times(0,T)))} + \|u\|_{L^2((0,T)\times(0,L);H_0^1(\omega))}$$
$$\leq C_3(\|f\|_{L^1(0,L;L^2(\omega\times(0,T)))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}),$$

pour tout $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ et tout $u_0 \in L^2(\Omega)$.

3 - Montrer que, pour tout $\psi \in L^2(\Omega \times (0, T))$, l'équation

$$\begin{cases} -v_t - v_z - v_{xx} - v_{yy} = \psi(x, y, z, t) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v(x, y, z, t) = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, L) \times (0, T), \\ v(x, y, L, t) = 0 & \text{pour } (x, y, t) \in \omega \times (0, T), \\ v(x, y, z, T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

admet une solution faible unique dans $L^2(\Omega \times (0, T))$. (Indication : on pourra considérer la fonction $u(x, y, z, t) = v(x, y, L - z, T - t)$.)

Montrer que si u est la solution de l'équation (4.3), alors

$$\int_{\Omega\times(0,T)} u\,\psi = \int_{\Omega\times(0,T)} f\,v + \int_\Omega u_0\,v(x, y, z, 0)$$

pour tout $\psi \in L^2(\Omega \times (0, T))$, où v est la solution de (4.4).

Dans toute la suite, on suppose que $f \in L^2(\Omega\times(0,T))$**,** $u_0 \in L^2(\Omega)$ **et** $u_1 \in L^2(\omega\times(0,T))$**.**

4 - On note u_1^n la fonction définie par

$$u_1^n(x,y,z,t) = \begin{cases} nu_1(x,y,t) & \text{si} \quad z \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si} \quad z > 1/n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Soit u_n la solution de l'équation

$$\begin{cases} u_t + u_z - u_{xx} - u_{yy} = (f + u_1^n)(x,y,z,t) & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,y,z,t) = 0 & \text{sur } \gamma \times (0,L) \times (0,T), \\ u(x,y,0,t) = 0 & \text{pour } (x,y,t) \in \omega \times (0,T), \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge (pour une topologie que l'on précisera) vers une fonction u vérifiant

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\times(0,T)} u(-v_t - v_z - v_{xx} - v_{yy}) \\ &= \int_{\Omega\times(0,T)} fv + \int_\Omega u_0 v(x,y,z,0) + \int_{\omega\times(0,T)} u_1 v(x,y,0,t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

pour toute fonction $v \in H$, où

$$H = \{v \in L^2(\Omega \times (0,T)) \mid v \text{ est solution de (4.4) avec } \psi \in L^2(\Omega \times (0,T))\}.$$

On appelle solution faible de (4.1) une fonction u de $L^2(\Omega \times (0,T))$ vérifiant (4.7) pour tout $v \in H$. Montrer que l'équation (4.1) admet une solution faible unique.

5 - Considérons l'équation

$$\begin{cases} u_t + u_z - u_{xx} - u_{yy} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ v(x,y,z,t) = 0 & \text{sur } \gamma \times (0,L) \times (0,T), \\ u(x,y,0,t) = u_1(x,y,t) & \text{pour } (x,y,t) \in \omega \times (0,T), \\ u(x,y,z,0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

Sans utiliser la méthode d'approximation de la question 4, démontrer que l'équation (4.8) admet une solution faible unique dans $L^2(\Omega \times (0,T))$, et que cette solution appartient à $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C([0,L]; L^2(\omega\times(0,T)) \cap L^2((0,T)\times(0,L); H_0^1(\omega))$. Peut-on utiliser ce résultat pour montrer l'existence de solution faible pour l'équation (4.1) ?

Examen Septembre 2001

1. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \text{dans } (0,L)\times(0,T), \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ pour } t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 \quad \text{pour } x \in (0,L),$$

avec $L > 0$, $T > 0$ et $K > 0$. Écrire cette équation sous la forme d'un système du premier ordre, et montrer que l'on peut appliquer le théorème de Hille-Yoshida pour obtenir

$$\|u\|_{C([0,T];H_0^1(0,L))\cap C^1([0,T];L^2(0,L))} \le C\Big(\|u_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|u_1\|_{L^2(0,L)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\Big).$$

2. On veut étudier le système

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K\Big(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tfrac{\partial \phi}{\partial x}\Big) = 0, \quad \text{dans } (0,L)\times(0,T),\\ &\tfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \tfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K\Big(\phi - \tfrac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0, \quad \text{dans } (0,L)\times(0,T), \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec les conditions limites

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ pour } t \in (0,T),\\ &\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 \text{ pour } t \in (0,T), \end{aligned} \tag{4.10}$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0 \ \text{ pour } \ \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 \text{ pour } x \in (0,L),\\ &\phi(x,0) = \phi_0 \ \text{ pour } \ \tfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) = \phi_1 \text{ pour } x \in (0,L). \end{aligned} \tag{4.11}$$

On suppose dans la suite que $u_0 \in H_0^1(0,L)$, $u_1 \in L^2(0,L)$, $\phi_0 \in H_0^1(0,L)$, $\phi_1 \in L^2(0,L)$.

Pour étudier le système d'équations (4.9)-(4.11), on utilise une méthode de point fixe. Soit $\tau > 0$. Pour $\psi \in L^2(0,\tau;L^2(0,L))$, on note u_ψ la solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \psi\Big) = 0, \quad \text{dans } (0,L)\times(0,\tau), \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ pour } t \in (0,\tau),$$

$$u(x,0) = u_0 \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 \text{ pour } x \in (0,L),$$

et on note ϕ_ψ la solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K\Big(\phi - \frac{\partial u_\psi}{\partial x}\Big) = 0, \quad \text{dans } (0,L)\times(0,T), \quad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 \text{ pour } t \in (0,T),$$

$$\phi(x,0) = \phi_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) = \phi_1 \text{ pour } x \in (0,L).$$

Montrer que pour $\tau > 0$ suffisamment petit, l'application

$$\psi \longmapsto \frac{\partial \phi_\psi}{\partial x}$$

est une contraction dans $L^2(0,\tau;L^2(0,L))$.

3. Soit (u,ϕ) la solution de (4.9)-(4.11) sur $(0,L)\times(0,\tau)$. On pose

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L\Big(u_t^2(x,t)+\phi_t^2(x,t)+K(\phi(x,t)-u_x(x,t))^2+\phi_x^2(x,t)\Big)dx.$$

Montrer que $E(t)=E(0)$ pour tout $t\in(0,\tau)$.

4. Montrer que le système (4.9)-(4.11) admet une solution unique (u,ϕ) appartenant à $(C([0,T];H_0^1(0,L))\cap C^1([0,T];L^2(0,L)))\times(C([0,T];H_0^1(0,L))\cap C^1([0,T];L^2(0,L)))$.

Examen Janvier 2002

Partie 1.

1 - Soit a une contante positive. On suppose que $f \in L^2((0,L)\times(0,T))$ et que $u_0 \in L^2(0,L)$. Utiliser le théorème de Hille-Yosida pour montrer que l'équation

$$\begin{cases} u_t + au_x - u_{xx} + u = f, & \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, & \text{dans } (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{dans } (0,L), \end{cases} \tag{4.12}$$

admet une solution faible unique dans $C([0,T];L^2(0,L))$. Donner des estimations précises de la solution u dans $C([0,T];L^2(0,L))$ et dans $L^2(0,T;H^1(0,L))$.

2 - Soient $g \in L^2((0,L)\times(0,T))$, $v_0 \in L^2(0,L)$ et b une constante positive.

On considère l'équation

$$\begin{cases} v_t - bv_x = g, & \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ v(L,t) = 0, & \text{dans } (0,T), \\ v(x,0) = v_0(x), & \text{dans } (0,L). \end{cases} \tag{4.13}$$

Démontrer l'existence d'une solution unique, dans un espace à préciser, pour l'équation (4.13). Donner les estimations correspondantes.

Partie 2.

On se propose d'étudier le système

$$\begin{cases} u_t + au_x - u_{xx} + u - v = f, & \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ v_t - bv_x - u = g, & \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = v(L,t) = 0, & \text{dans } (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{dans } (0,L). \end{cases} \tag{4.14}$$

3 - Pour $\bar{t} \in [0,T[$ et $y \in C([0,\bar{t}];L^2(0,L))$, montrer que le système

$$\begin{cases} u_t + au_x - u_{xx} + u - y = f, & \text{dans } (0,L)\times(0,\bar{t}), \\ v_t - bv_x - u = g, & \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = v(L,t) = 0, & \text{dans } (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{dans } (0,L), \end{cases} \tag{4.15}$$

admet une solution unique dans $C([0,\bar{t}];L^2(0,L))\times C([0,\bar{t}];L^2(0,L))$, solution que l'on notera $(u(y),v(y))$.

On considère l'application Φ de $C([0,\bar{t}];L^2(0,L))$ dans lui-même, qui à $y \in C([0,\bar{t}];L^2(0,L))$, associe la solution $v(y)$ du système (4.15). Montrer qu'il existe $\bar{t}$ pour lequel Φ est une contraction dans $C([0,\bar{t}];L^2(0,L))$. Montrer que l'équation (4.14) admet une solution faible unique dans $C([0,T];L^2(0,L))\times C([0,T];L^2(0,L))$.

Partie 3.

4 - Comment adapteriez-vous la méthode de la partie 2 pour étudier le système

$$\begin{cases} u_t + au_x - u_{xx} + u - v_x = f, \qquad \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ v_t - bv_x - u_x = g, \qquad \text{dans } (0,L)\times(0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = v(L,t) = 0, \quad \text{dans } (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \qquad \text{dans } (0,L). \end{cases} \tag{4.16}$$

On précisera le sens que l'on peut donner à v_x dans la première équation lorsque v est recherché dans $C([0,T];L^2(0,L))$. On remarquera que la condition limite pour u en $x = L$ est différente de celle de la partie 2.

Partie 4.

5 - Comment utiliser le théorème de Hille-Yosida pour étudier directement le système (4.14) de la partie 2.

On pourra éventuellement faire un changement d'inconnue préalable de la forme $(u,v) = e^{kt}(w,z)$, pour $k > 0$ convenablement choisi.

Examen Septembre 2002

1. On considère l'équation

$$u_{xxxx} - u_{xx} = f, \quad \text{dans } (0,L), \quad u(0) = u(L) = u_{xx}(0) = u_{xx}(L) = 0,$$

avec $L > 0$ et $f \in L^2(0,L)$. Utiliser le théorème de Lax-Migram pour montrer que cette équation admet une solution unique dans $V = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$. En déduire que cette solution appartient à $H^4(0,L)$.

2. On considère l'opérateur A de domaine $D(A)$ dans $H = (H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times L^2(0,L)$ défini par

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} + u_{xx} \end{pmatrix},$$

et

$$D(A) = \{(u,v) \in (H^4(0,L) \cap V) \times V \mid u_{xx}(0) = u_{xx}(L) = 0\}.$$

Montrer que pour tout $(f,g) \in H$ l'équation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} + u_{xx} \end{pmatrix},$$

admet une solution unique $(u,v) \in D(A)$.

Montrer que A est un opérateur fermé dans H et que $D(A)$ est dense dans H.

3. On considère l'équation d'évolution

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} = 0, \quad \text{dans } (0,L) \times (0,T), \tag{4.17}$$

avec

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0 \text{ pour } t \in (0,T), \tag{4.18}$$

et

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = u_1 \quad \text{pour } x \in (0,L). \tag{4.19}$$

On suppose que $T > 0$, $u_0 \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ et $u_1 \in L^2(0,L)$.

Écrire le système (4.17)-(4.19) sous la forme d'un système du premier ordre, et montrer qu'il admet une soution faible unique vérifiant

$$\|u\|_{C([0,T];V)} + \|u_t\|_{C^1([0,T];L^2(0,L))} \le C\Big(\|u_0\|_V + \|u_1\|_{L^2(0,L)}\Big).$$

4. On pose

$$[E(u)](t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t(t)|^2 + |\Delta u(t)|^2)dx.$$

Montrer que si u est solution du système (4.17)-(4.19), alors

$$[E(u)](0) = [E(u)](t) \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

5. On considère l'opérateur A_1 de domaine $D(A_1)$ dans $H_1 = H_0^1(0,L) \times H^{-1}(0,L)$ défini par

$$A_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} + u_{xx} \end{pmatrix},$$

et

$$D(A_1) = \{(u,v) \in (H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times H_0^1(0,L) \mid u_{xx}(0) = u_{xx}(L) = 0\}.$$

Montrer que pour tout $(f,g) \in H_1$ l'équation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} + u_{xx} \end{pmatrix},$$

admet une solution unique $(u,v) \in D(A_1)$. Quel résultat peut-on obtenir pour le système (4.17)-(4.19) ? Que doit-on vérifier pour démontrer ce résultat ?

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour, S. K. Mitter, Representation and Control of Infinite Dimensional Systems, Vol. 1, Birkhäuser, 1992.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[3] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, 1990.

[4] R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, Évolution : semi-groupe, variationnel, Vol. 8, Masson, Paris 1988.

[5] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Math. Soc., 1999.

[6] S. Kesavan, Topics in Functional Analysis and Applications, Wiley-Eastern, New Delhi, 1989.

[7] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, 1983.

[8] M. Tucsnak, Wellposedness and controllability of linear evolution partial differential equations, Lectures Notes, Nancy, 2002.