Jean-Pierre Dedieu, Jean-Pierre Raymond

ANALYSE : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Institut de Mathématiques
Université Paul Sabatier

31062 Toulouse cedex 09

jean-pierre.dedieu@math.univ-toulouse.fr
jean-pierre.raymond@math.univ-toulouse.fr

Table des Matières

Avant-Propos

La rédaction de ce polycopié a bénéficié de versions préliminaires, d'une part le polycopié "Suites Numériques" de Jean-Pierre Dedieu et Jean-Claude Yakoubsohn qui a servi de base pour la rédaction du chapitre 1 et d'autre part un cours polycopié de Solenn Autret correspondant à cet enseignement. Nous remercions tout particulièrement Solenn Autret qui nous a fourni les fichiers des figures utilisées ici.

1. Rappels

1.1 Nombres réels

Définition 1.1 *Le corps des nombres réels, que l'on note $\mathbb{R}$, est défini axiomatiquement de la façon suivante : c'est un corps commutatif, totalement ordonné, qui vérifie l'axiome de la borne supérieure.*

Dans les lignes qui suivent nous allons préciser ces termes.

1.1.1 Corps commutatif

Définition 1.2 *Un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un ensemble équipé de deux opérations notées $+$ et $\times$ qui vérifient :*

$$\begin{array}{cc}
(\mathbb{K},+)\,\textit{groupe commutatif} & (\mathbb{K}^*,\times)\,\textit{groupe commutatif} \\
a+b=b+a & ab=ba \\
a+(b+c)=(a+b)+c & a(bc)=(ab)c \\
a+0=0+a=a & a\times 1=1\times a=a \\
a+(-a)=(-a)+a=0 & a\times a^{-1}=a^{-1}a=1,\ (a\neq 0)
\end{array}$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

1.1.2 Totalement ordonné

Définition 1.3 *Un corps $(\mathbb{K},\leq)$ est totalement ordonné lorsque, pour tout $a,b,c\in\mathbb{K}$, la relation $\leq$ vérifie :*

$$\begin{array}{cc}
a\leq a, & \textit{réflexivité} \\
a\leq b \ \textit{ et } \ b\leq a\Rightarrow a=b & \textit{antisymétrie} \\
a\leq b \ \textit{ et } \ b\leq c\Rightarrow a\leq c & \textit{transitivité} \\
a\leq b \ \textit{ ou } \ b\leq a & \textit{ordre total}
\end{array}$$

et lorsqu'elle est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$$
$$a\leq b \textit{ et } c\geq 0\Rightarrow ac\leq bc.$$

1.1.3 Borne inférieure, supérieure

Définition 1.4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que*

- *a est un* **majorant** *de A si pour tout $x \in A$ on a $x \leq a$,*
- *a est un* **minorant** *de A si pour tout $x \in A$ on a $a \leq x$,*
- *A est* **majoré** *s'il a un majorant,*
- *A est* **minoré** *s'il a un minorant,*
- *A est* **borné** *s'il est majoré et minoré.*

Exemple 1.1 L'intervalle $]0,1]$ est borné : -2 est un minorant, 2 est un majorant. ■

Proposition 1.1 *Lorsque A est majoré et non-vide, l'ensemble des majorants de A est un intervalle illimité à droite : si a est un majorant de A et si $a \leq b$ alors b est un majorant de A.*

Axiome de la borne supérieure. Soit $A \subset \mathbb{R}$ majoré et non-vide. L'ensemble des majorants de A est du type $[M, +\infty[$. On appelle M la **borne supérieure** de A. On la note $M = \sup A$.

Proposition 1.2 *Lorsque A est minoré et non-vide, l'ensemble des minorants de A est du type $]-\infty, m]$. On appelle m la* **borne inférieure** *de A. On la note $m = \inf A$.*

Définition 1.5 *Si la borne supérieure M (resp. inférieure m) de A est un élément de A on l'appelle le* **maximum**[1] *ou le* **plus grand élément** *de A (resp. le* **minimum** *ou le* **plus petit élément** *de A). On note alors $M = \max A$ (resp. $m = \min A$).*

Exemple 1.2 L'ensemble des majorants de $]0,1[$ est l'intervalle $[1, +\infty[$. Ainsi, $\sup\,]0,1[= 1$ et $\max\,]0,1[$ n'existe pas. L'ensemble des majorants de $]0,1]$ est l'intervalle $[1, +\infty[$ mais cette fois-ci $\max\,]0,1] = 1$. ■

Une caractérisation de la borne supérieure est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Soit A une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre*

1. *$M = \sup\ A$,*
2. *M est le plus petit des majorants de A,*
3. *M est un majorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$.*

On a une proposition similaire pour la borne inférieure :

[1] Au féminin de l'adjectif le dictionnaire de l'Académie donne maxima et la langue technique utilise tantôt maximum (vitesse maximum), tantôt maxima (température maxima). Pluriel courant des maximums, comme des albums ou des pensums, le pluriel latin maxima étant réservé à la langue scientifique. Les mathématiciens disent au pluriel des maxima, mais les grammairiens demandent qu'on traite le mot comme français et qu'on dise des maximums.

Proposition 1.4 *Soit A une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre*

1. $m = \inf\ A$
2. *m est le plus grand des minorants de A,*
3. *m est un minorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x < m + \epsilon$.*

Définition 1.6 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ où E est un ensemble quelconque. On note*

$$\inf_{x \in E} f(x) = \inf \{f(x)\ \ x \in E\}$$

et idem pour min, sup *et* max.

1.1.4 $\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème 1.1 *$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < n$.*

Démonstration. Si $x \leq 0$ on prend $n = 1$. Supposons que $x > 0$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N}\ :\ k \leq x\}$ est majoré par x et contient 0. Nous pouvons donc considérer sa borne supérieure $M = \sup\ A$. Prenons $\epsilon = 1/2$. D'après la proposition 1.3 il existe $k \in A$ tel que $M - 1/2 < k \leq M$ de sorte que $M < M + 1/2 < k + 1$ et que $k + 1 \notin A$ (sans quoi M ne serait pas le supremum de A). Ainsi, $k + 1 > x$ et on prend $n = k + 1$.
∎

1.1.5 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 1.5 *Entre deux réels il y a toujours un rationnel : pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un rationnel p/q tel que $x < p/q < y$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Par le théorème 1.1, il existe un entier $q > 0$ tel que $1/(y - x) < q$ ainsi qu'un entier $n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^*\ \ :\ \ qx < n\}$ est minoré par 1 et non vide. Admettons que tout ensemble non vide d'entiers, ici $A \subset \mathbb{N}$, possède un minimum. Notons $p = \min\ A$. On a donc $p - 1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx + 1$ et $x < p/q \leq x + 1/q < y$ par la première inégalité. ∎

1.2 Suites

Définition 1.7 *Une suite numérique est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On dit que v est une sous-suite d'une suite u lorsque $v = u \circ k$ où $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Une suite u se note traditionnellement $u = (u_n)_{n \geq 0}$ (ou, plus simplement, (u_n)) et une sous-suite $v = u \circ k = (u_{k_n})_{n \geq 0}$.

1.2.1 Définition de la limite

Définition 1.8 *On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite l quand n tend vers l'infini si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a*

$$|u_n - l| \leq \epsilon.$$

On dit aussi que la suite u converge vers l ou encore que la suite u est convergente et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Définition 1.9 *On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ a pour limite ∞ (resp. $-\infty$) quand n tend vers l'infini si pour tout $M > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq M$ (resp. $u_n \leq -M$). On note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \infty \quad (\text{ resp. } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty).$$

Théorème 1.2 *La limite d'une suite est unique.*

1.2.2 Stabilité des limites

Proposition 1.6 *Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ deux suites ayant pour limites respectives l et m (finies ou infinies). Alors, pour autant que les opérations envisagées soient définies,*

1. *La suite $u + v$ a pour limite $l + m$,*
2. *La suite uv a pour limite lm,*
3. *Sous la condition $u_n \neq 0$ pour tout n et $l \neq 0$, la suite $1/u$ a pour limite $1/l$,*
4. *La suite λu a pour limite λl,*
5. *La suite $|u|$ a pour limite $|l|$.*

Noter que les formes suivantes sont indéterminées : $\infty + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $1/0$, ∞/∞.

Proposition 1.7 *Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ deux suites ayant pour limites respectives l et m (finies ou infinies). Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $l \leq m$*

Attention ! $u_n < v_n$ pour tout $n \geq 0$ n'implique pas $l < m$!

1.2.3 Convergence monotone

Définition 1.10 *Une suite u est croissante lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Une suite est majorée (resp. minorée) lorsqu'il existe A tel que $u_n \leq A$ (resp. $u_n \geq A$) pour tout $n \geq 0$. Une suite est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.*

Théorème 1.3 *Lorsqu'une suite u est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) elle converge vers $l = \sup\{u_n \ : \ n \geq 0\}$ (resp. $l = \inf\{u_n \ : \ n \geq 0\}$). Lorsqu'une suite u est croissante (resp. décroissante) et n'est pas majorée (resp. minorée) sa limite est ∞ (resp. $-\infty$).*

Définition 1.11 *Deux suites u et v sont adjacentes lorsque*

- *u est croissante et v est décroissante,*
- $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$

Proposition 1.8 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus*

$$u_n \leq l \leq v_n$$

pour tout $n \geq 0$.

Théorème 1.4 *(Bolzano - Weierstrass) Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

1.2.4 Suites de Cauchy

Définition 1.12 *Une suite u est de Cauchy si*

$$(\forall \epsilon > 0) \ \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n \geq N) \ \ (\forall m \geq N) \ \ |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Remarque 1.1 Il revient au même de dire que

$$(\forall \epsilon > 0) \ \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n \geq N) \ \ (\forall p \geq 0) \ \ |u_n - u_{n+p}| \leq \epsilon.$$

Cela revient à supposer que $m \geq n$ et à prendre $m = n + p$ dans la définition précédente. ∎

Théorème 1.5 *Une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Soit u une suite de Cauchy. Notons $N(\epsilon)$ un entier tel que

$$(\forall n \geq N) \ \ (\forall m \geq N) \ \ |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Cette suite est bornée. En effet,

$$|u_n| \leq \max\{|u_k|, \ 0 \leq k \leq N(1) - 1\}$$

pour tout $n \leq N(1) - 1$ et

$$|u_n - u_m| \leq 1$$

pour tout n et $m \geq N(1)$. On en déduit que

$$|u_n| \leq |u_n - u_{N(1)} + u_{N(1)}| \leq |u_n - u_{N(1)}| + |u_{N(1)}| \leq 1 + |u_{N(1)}|$$

pour tout $n \geq N(1)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a toujours

$$|u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N(1)-1}|,\ 1 + |u_{N(1)}|\}.$$

En vertu du théorème de Bolzano-Weirstrass, il existe une sous-suite de u qui est convergente : il existe une suite strictement croissante d'entiers $k = (k_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_{k_n} = l$ autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $M(\epsilon)$ tel que, pour tout $k_n \geq M(\epsilon)$ on a $|u_{k_n} - l| \leq \epsilon$.

Montrons que u a pour limite l. Donnons nous $\epsilon > 0$ ainsi qu'un terme de la sous-suite u_{k_p} avec $k_p \geq M(\epsilon/2)$ et $k_p \geq N(\epsilon/2)$. Un tel entier existe puisque $\lim k_n = \infty$. Pour tout $n \geq N(\epsilon/2)$ on a

$$|u_n - l| = |(u_n - u_{k_p}) + (u_{k_p} - l)| \leq |u_n - u_{k_p}| + |u_{k_p} - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

et le théorème est prouvé. ■

Exemple 1.3 Soit b un entier $b \geq 2$. Pour tout $n \geq 1$ on se donne un entier $x_n \in \{1-b, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, b-1\}$. La suite

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k}$$

est convergente. ■

1.2.5 Limites classiques

1. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^a,\ a \in \mathbb{Z}}$
   (a) Si $a = 0$ alors la suite est constante : $n^0 = 1$.
   (b) Si $a \geq 1$ alors $n^a \geq n$ et $\lim n^a = +\infty$.
   (c) Si $a \leq -1$ alors $n^a = 1/n^{-a}$ alors $\lim n^a = 0$.
2. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},\ P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes}}$

   Supposons que
   $$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_d x^d$$
   avec $a_d \neq 0$ et que
   $$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots b_e x^e$$
   avec $b_e \neq 0$.
   (a) Si $d < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$,
   (b) Si $e < d$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$, le signe étant celui de a_d/b_e,

(c) Si $d = e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_d}{b_d}$.

3. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r^n,\ r \in \mathbb{R}}$

   (a) Si $r \leq -1$ cette suite n'a pas de limite.

   (b) Si $r > 1$ alors $\lim r^n = +\infty$.

   (c) Si $-1 < r < 1$ alors $\lim r^n = 0$.

4. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1,\ a > 0}$

5. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^p} = +\infty, \qquad a > 1 \quad et \quad p \in \mathbb{N}^*}$

6. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a^{-n} n^p = 0, \qquad a > 1 \quad et \quad p \in \mathbb{N}^*}$

7. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.}$

1.3 Limites de fonctions

1.3.1 Intervalles

- On appelle intervalle un ensemble du type $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ avec $-\infty < a \leq b < \infty$ ou bien $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$, $]a, \infty[$, $[a, \infty[$, $]-\infty, \infty[$. Noter que $\emptyset =]a, a[$ et $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ sont des intervalles.
- Un intervalle est ouvert s'il est du type $]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$ ou $]-\infty, \infty[$,
- Un intervalle est fermé s'il est du type $\emptyset$, $[a, b]$, $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ ou $]-\infty, \infty[$,
- Un intervalle est borné s'il est du type $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$,
- Un intervalle est compact s'il est fermé et borné donc du type $[a, b]$.

1.3.2 Définition des limites

Définition 1.13 *(Limites finies) Soient $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$ et $l \in \mathbb{R}$.*

1. *(Limite) $\lim_{x\to c} f(x) = l$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x - c| \leq \eta$ et $x \neq c$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.*
2. *(Limite à gauche) $\lim_{x\to c, x<c} f(x) = l$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $c - \eta \leq x < c$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.*
3. *(Limite à droite) $\lim_{x\to c, x>c} f(x) = l$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $c < x \leq c + \eta$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.*
4. *(Limite à l'infini) Lorsque $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ on dit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > a$ tel que, pour tout $x \geq M$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.*

Définition 1.14 *(Limites infinies) Soient* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *et* $c \in [a, b]$.

1. $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ *lorsque : pour tout* $N > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $x \in I$ *avec* $|x - c| \leq \eta$ *et* $x \neq c$, *on a* $f(x) \geq N$.
2. *(Limite à gauche)* $\lim_{x \to c, x < c} f(x) = \infty$ *lorsque : pour tout* $N > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $x \in I$ *avec* $c - \eta \leq x < c$, *on a* $f(x) \geq N$.
3. *(Limite à droite)* $\lim_{x \to c, x > c} f(x) = \infty$ *lorsque : pour tout* $N > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $x \in I$ *avec* $c < x \leq c + \eta$, *on a* $f(x) \geq N$.
4. *(Limite à l'infini) Lorsque* $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ *on dit que* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ *lorsque : pour tout* $N > 0$, *il existe* $M > a$ *tel que pour tout* $x \geq M$ *on ait* $f(x) \geq N$.

Proposition 1.9 *(Unicité) La limite est unique.*

Proposition 1.10 *La limite en un point existe si et seulement si les limites à droite et à gauche existent en ce point et sont égales.*

1.3.3 Limites de fonctions et limites de suites

Théorème 1.6 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ *et* $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. *On a* $\lim_{x \to c} f(x) = l$ *si et seulement si* $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = l$ *pour toute suite* (u_n) *telle que* $u_n \in I$ *et* $u_n \neq c$ *pour tout* $n \geq 0$ *et* $\lim_{n \to \infty} u_n = c$.

1.3.4 Stabilité des limites

Proposition 1.11 *(Opérations algébriques) Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions ayant pour limites respectives* l *et* m *(finies ou infinies) lorsque* $x \to c$ *(*c *est dans* I *ou bien c'est l'une des bornes, éventuellement infinie, de* I*). Alors, pour autant que les opérations envisagées soient licites,*

1. $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = l + m$,
2. $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = lm$,
3. *Sous la condition* $f(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$ *et* $l \neq 0$, $\lim_{x \to c} 1/f(x) = 1/l$,
4. $\lim_{x \to c} \lambda f(x) = \lambda l$.

Proposition 1.12 *(Composition des applications) Soient* I *et* J *deux intervalles et* $c \in I$. *Soit* $f : I \to J$ *et supposons que que* $\lim_{x \to c} f(x) = l \in J$. *Soit* $g : J \to \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{y \to l} g(y) = m$. *Alors, on a* $\lim_{x \to c} g \circ f(x) = m$.

Proposition 1.13 *(Inégalités) Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions ayant pour limites respectives* l *et* m *(finies ou infinies) lorsque* $x \to c$ *(*c *est dans* I *ou bien c'est l'une des bornes, éventuellement infinie, de* I*). Si* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in I$ *alors* $l \leq m$.

Attention ! $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I$ n'implique pas $l < m$!

1.3.5 Limite et supremum

Proposition 1.14 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (pour tout $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$). Notons $b = \sup I$ si I est majoré et $b = \infty$ sinon. Sous cette hypothèse, si f est majorée sur I*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$$

et sinon

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty.$$

2. Fonctions continues

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle. La définition de la continuité présentée ici est essentiellement due à Cauchy. Augustin Louis Cauchy, 1789 - 1857.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *f est continue à droite en $c \in I$ lorsque $\lim\limits_{x\to c, x>c} f(x) = f(c)$.*
- *f est continue à gauche en $c \in I$ lorsque $\lim\limits_{x\to c, x<c} f(x) = f(c)$.*
- *f est continue en $c \in I$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.*
- *f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.*

On écrit aussi $\lim_{x\to c^+} f(x)$ et $\lim_{x\to c^-} f(x)$ pour les limites à droite et à gauche.

Remarque 2.1

- A l'aide des quantificateurs, la définition de la continuité en $c \in I$ se traduit ainsi :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in I)\ \left(|x - c| \leq \eta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon\right).$$

  Le nombre η dépend à la fois de ε et de c ; on le note donc $\eta = \eta(\varepsilon, c)$.

- f est discontinue en c lorsque

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \eta > 0)\ (\exists x \in I)\ \left(|x - c| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(c)| > \varepsilon\right).$$

∎

Exemple 2.1 *(Exemples de fonctions continues)*

1. *Les fonctions constantes ($f(x) = a$),*
2. *La fonction identité ($f(x) = x$),*
3. *La valeur absolue ($f(x) = |x|$),*
4. *Toute fonction lipschitzienne ($f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x, y \in I$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \lambda\,|x - y|$).*

5. *Les polynômes, les fractions rationnelles (sauf aux pôles),*
6. *Les fonctions trigonométriques* sin *et* cos*,*
7. *Les fonctions puissance ($f(x) = x^a$, $x > 0$), exponentielle ($f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$), logarithme.*

Proposition 2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$. f est continue en $c \in I$ si et seulement si f est continue à gauche et à droite de c.*

Proposition 2.2 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$. f est continue en c si et seulement si pour toute suite (u_n) telle que $u_n \in I$ et $\lim u_n = c$ on a $\lim f(u_n) = f(c)$.*

Démonstration. Si f est continue en c alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$ tel que $|x - c| \leq \eta$. Prenons une suite (u_n) dans I qui converge vers c et montrons que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ comme ci-dessus. Puisque la suite (u_n) converge vers c il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - c| \leq \eta$ pour tout $n \geq N$. Par continuité de f on a $|f(u_n) - f(c)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Si f n'est pas continue en c, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe $x_\eta \in I$ vérifiant $|x_\eta - c| \leq \eta$ et $|f(x_\eta) - f(c)| > \varepsilon$. On construit une suite $u_n \to c$ en prenant $u_n = x_\eta$ avec $\eta = 1/n$. Comme $|f(u_n) - f(c)| > \varepsilon$ pour tout n la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(c)$. ∎

Exemple 2.2 *(Exemples de fonctions discontinues)*

1. *La fonction $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est discontinue en 0,*
2. *La fonction partie entière ($f(x) = E(x)$, encore notée $\lfloor x \rfloor$) est discontinue en tout point entier,*
3. *La fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1/q$ si $x \in \mathbb{Q}$ avec $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p et q premiers entre eux, est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.*

Proposition 2.3 *(Prolongement par continuité) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I =]a, b[$. Supposons que $\lim_{x \to b} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, l'application $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x < b$ et $\tilde{f}(b) = l$ est continue. On l'appelle le prolongement par continuité de f à $]a, b]$.*

Exemple 2.3 Puisque $\lim_{x \to 0} \sin x/x = 1$ on peut prolonger par continuité la fonction $\sin x/x$ à $\mathbb{R}$ tout entier en lui donnant la valeur 1 à l'origine. ∎

2.2 Propriétés algébriques

Proposition 2.4 *La continuité est stable par les opérations élémentaires : si f et g sont continues en $c \in I$ alors $f + g$, $\lambda \times f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$, f/g (si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$) et $\max(f, g)$ sont continues en c.*

Démonstration. Pour la somme : notons $\eta(c, f, \varepsilon) > 0$ et $\eta(c, g, \varepsilon) > 0$ les nombres associés à f et g de la remarque 2.1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \min(\eta(c, f, \varepsilon/2),\ \eta(c, g, \varepsilon/2))$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - c| \leq \eta$ on a $|x - c| \leq \eta(c, f, \varepsilon/2)$ de sorte que $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon/2$. De la même manière $|g(x) - g(c)| \leq \varepsilon/2$. Par l'inégalité du triangle on a :

$$|(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))| \leq |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pour le max : une première réduction consiste à écrire que $\max(f(x), g(x)) = g(x) + \max(f(x) - g(x), 0)$. Il suffit donc de prouver que si f est continue en c alors $\max(f(x), 0)$ est continue en c. Pour ce faire on envisage trois cas :

1. $f(c) > 0$. La définition de la continuité avec $\varepsilon = f(c)/2$ prouve l'existence d'un $\eta > 0$ tel que
$$-\frac{f(c)}{2} \leq f(x) - f(c) \leq \frac{f(c)}{2}$$
de sorte que $f(x) \geq f(c)/2 > 0$ pour tout $x \in I$, $|x - c| \leq \eta$. Sur l'ensemble $I \cap [c - \eta, c + \eta]$ la fonction f est > 0 et donc $\max(f(x), 0) = f(x)$ qui est continue en c.
2. $f(c) < 0$. On raisonne de la même manière mais ici $\max(f(x), 0) = 0$.
3. $f(c) = 0$. Dans ce cas $\max(f(c), 0) = 0$ et l'on doit prouver que
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in I)\ (|x - c| \leq \eta \ \Rightarrow\ |\max(f(x), 0)| \leq \varepsilon)\,.$$
Comme $|\max(f(x), 0)| \leq |f(x)|$ il suffit de prouver que
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in I)\ (|x - c| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x)| \leq \varepsilon)$$
ce qui est donné par la continuité de f en c.

■

Proposition 2.5 *Soient I et J deux intervalles, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $c \in I$. Si f est continue en c et g continue en $f(c)$ alors $g \circ f$ est continue en c.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que $|g(y) - g(f(c))| \leq \varepsilon$ si $|y - f(c)| \leq \eta$. Un tel η existe parce que g est continue en $f(c)$. Soit $\theta > 0$ tel que $|f(x) - f(c)| \leq \eta$ pour tout $x \in I$ dès que $|x - c| \leq \theta$. Un tel θ existe parce que f est continue en c. On a bien $|g(f(x)) - g(f(c))| \leq \varepsilon$ si $|x - c| \leq \theta$. ■

2.3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle compact

2.3.1 Le théorème de Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 - 1897.

Théorème 2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'ensemble $f([a,b]) = \{f(x) \; : \; x \in [a,b]\}$ est borné et il existe $x_m \in [a,b]$ et $x_M \in [a,b]$ tels que*

$$f(x_m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

et

$$f(x_M) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Remarque 2.2 *Les hypothèses de ce théorème sont essentielles :*

- *Prenons $f(x) = x$ si $0 \le x < 1$, $f(1) = 1/2$. Alors $\sup_{0\le x\le 1} f(x) = 1$ mais ce n'est pas un maximum (f est discontinue en 1).*
- *La fonction $f(x) = 1/x$ si $0 < x \le 1$ n'est pas bornée sur l'intervalle considéré. Dans cet exemple f est continue, l'intervalle considéré est borné mais n'est pas fermé.*
- *Considérons $f(x) = \exp(x)$ si $-\infty < x \le 0$. On a $\inf_{-\infty<x\le 0} \exp(x) = 0$ mais ce n'est pas un minimum. Ici f est continue et l'intervalle considéré est fermé mais il n'est pas borné.*

Démonstration. Montrons que f est majorée, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'ensemble $\{f(x) \; : \; x \in [a,b]\}$ ne soit pas majoré. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $c_n \in [a,b]$ tel que $f(c_n) \ge n$. La suite (c_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 1.4) il existe une sous-suite (c_{k_n}) de (c_n) qui converge vers une limite c. Comme $a \le c_{k_n} \le b$ par passage à la limite dans cette inégalité $a \le c \le b$ et puisque f est continue sur $[a,b]$, $\lim_{n\to+\infty} f(c_{k_n}) = f(c)$. D'autre part, par construction, $f(c_{k_n}) \ge k_n$ par conséquent, $f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(c_{k_n}) = \infty$ ce qui est absurde.

Notons $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Par la proposition 1.3, pour tout entier $n > 0$, il existe $c_n \in [a,b]$ tel que $M - \frac{1}{n} < f(c_n) \le M$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 1.4), il existe une sous-suite (c_{k_n}) de (c_n) qui converge vers une limite $x_M \in [a,b]$. Par continuité, $\lim_{n\to+\infty} f(c_{k_n}) = f(x_M)$ et par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus $\lim_{n\to+\infty} f(c_{k_n}) = M$. Ainsi, $f(x_M) = M$ et le sup est atteint en x_M, c'est donc un max ! ∎

2.3.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Ce théorème est du à Bolzano. Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781 - 1848.

Théorème 2.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, borné ou non, fermé ou non. Pour tout $a, b \in I$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.*

Démonstration. Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'ensemble $\{x \in [a,b] \; : \; f(x) \le y\}$ est non vide (si par exemple $f(a) \le y \le f(b)$ alors a est dans l'ensemble) et il est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure $c = \sup\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \leq y\}$. Montrons que $y = f(c)$. Par la proposition 1.3, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in [a,b]$ avec $f(x_n) \leq y$ et tel que $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. La suite (x_n) converge donc vers c. Puisque $f(x_n) \leq y$ et que f est continue, par passage à la limite dans cette inégalité on obtient $f(c) \leq y$. Montrons maintenant que $y \leq f(c)$. Supposons que $f(a) \leq y \leq f(b)$. Si $c = b$ c'est évident. Si $c < b$, puisque c est la borne supérieure, on a $y < f(x)$ pour tout $x \in]c,b]$. En faisant tendre x vers c et puisque f est continue, on obtient $y \leq f(c)$. Le cas $f(b) \leq y \leq f(a)$ se traite de la même manière. ∎

Corollaire 2.1
1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*
2. *Tout polynôme à coefficients réels et de degré impair possède une racine réelle.*
3. *Toute fonction continue $g : [a,b] \to [a,b]$ admet un point fixe : il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = c$.*

On peut résumer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Weierstrass en l'énoncé suivant :

Corollaire 2.2 *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle, l'image d'un intervalle compact par une application continue est un intervalle compact.*

2.3.3 Continuité uniforme

Définition 2.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq \eta$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.*

Remarque 2.3 La définition « epsilonesque » de la continuité est

$$(\forall x \in I) \ (\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta(\varepsilon, x) > 0) \ (\forall y \in I) \ (|x - y| \leq \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

et celle de la continuité uniforme

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta(\varepsilon) > 0) \ (\forall x \in I) \ (\forall y \in I) \ (|x - y| \leq \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) .$$

Dans le premier cas η dépend de x et ε, dans le second cas η ne dépend que de ε. ∎

Proposition 2.6 *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Exemple 2.4 Toute fonction lipschitzienne $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I. $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. ∎

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ pour tout $x, y \in I$; on peut prendre $\eta = \varepsilon/\lambda$.

Pour obtenir $|x^2 - y^2| \leq \varepsilon$ il faut que $|x - y| \leq \varepsilon/|x + y|$. Il faut donc prendre $\eta \leq \varepsilon/|x+y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y \neq 0$. Hélas $\inf \{\varepsilon/|x + y| \ : \ x + y \neq 0\} = 0$ et un tel η ne saurait être > 0. ∎

2.3.4 Le théorème de Heine

Heinrich Eduard Heine 1821 - 1881.

Théorème 2.3 *Toute fonction continue sur un intervalle compact est uniformément continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si f n'est pas uniformément continue alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe x_η et $y_\eta \in [a,b]$ avec $|x_\eta - y_\eta| \leq \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| > \varepsilon$. Prenons $\eta = 1/n$ où n est un entier positif. On obtient ainsi deux suites (x_n) et (y_n) qui vérifient $x_n, y_n \in [a,b]$, $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 1.4) on peut extraire de ces suites deux sous-suites convergentes (x_{k_n}) et (y_{k_n}). Comme $|x_{k_n} - y_{k_n}| \leq 1/k_n$ elles ont une limite commune l. Comme $\varepsilon < |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})|$ et puisque f est continue on a

$$\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = |f(l) - f(l)| = 0$$

ce qui est absurde. ∎

Exemple 2.5 $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, M]$. On peut prendre $\eta = \inf \{\varepsilon/|x+y| \ : 0 \leq x, y \leq M\}$ qui est un nombre > 0. Que vaut-il ? ∎

2.3.5 Fonctions en escalier

Définition 2.3 *Une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$:*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

et des nombres réels c_k tels que $g(x) = c_k$ pour tout $x \in]a_{k-1}, a_k[$ et $1 \leq k \leq n$.

Remarque 2.4 Les nombres c_k n'ont aucun lien avec les valeurs $g(a_k)$. Une telle fonction peut donc être discontinue aux points a_k mais elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche. ∎

Théorème 2.4 *Toute fonction continue sur un intervalle compact peut être approchée uniformément sur cet intervalle par une fonction en escalier. Autrement dit : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration. Par le théorème 2.3 f est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Prenons $n = \lfloor (b-a)/\eta \rfloor$ et définissons une fonction en escalier par

$$g(x) = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ lorsque } x \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right[, \ 0 \leq k \leq n-1,$$

et $g(b) = f(b)$. Lorsque $x \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right[$ on a

$$|f(x) - g(x)| = \left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$$

parce que

$$\left|x - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \eta.$$

Lorsque $x = b$ on a $|f(x) - g(x)| = 0$. ∎

3. Dérivation

Pierre de Fermat (1601–1665), juriste et mathématicien français, est un précurseur du calcul différentiel : il est le premier à utiliser la formule (sinon le concept) du nombre dérivé. Blaise Pascal, dans la première moitié du XVII^e siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Dès la seconde moitié du XVII^e siècle, le calcul différentiel et intégral connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz. Le marquis de l'Hospital participa aussi à la fin du XVII^e à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particulières.

Il est possible, à l'aide de la notion de dérivée, de caractériser les points du graphe d'une fonction admettant une tangente. La plupart des fonctions continues intervenant dans les calculs usuels sont dérivables sauf en certains points isolés. Il est naturel de savoir si cette propriété est vraie pour toutes les fonctions continues. En 1872, Karl Weierstrass (1815–1897) a donné une réponse négative à cette question en définissant une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point ($f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(3^n x)/2^n$).

3.1 Définition de la dérivée en un point.

3.1.1 Dérivée en un point

Définition 3.1 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a, b[$, et soit $x_0 \in]a, b[$. On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \to 0$, ou de manière équivalente, si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \to x_0$. Cette limite est notée $f'(x_0)$ (ou aussi $\frac{df}{dx}(x_0)$) et est appelée 'dérivée' (ou parfois aussi 'nombre dérivé') de f en x_0. Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé 'taux d'accroissement de f en x_0'.

Interprétation géométrique de la dérivée. Avec les notations de la définition, si M_0 est le point $(x_0, f(x_0))$ du graphe de f, et M le point $(x, f(x))$, le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

désigne la 'pente' de la droite (M_0M) dans un repère orthonormé. Lorsque f est dérivable en x_0, ce rapport admet une limite lorsque $x \to x_0$, et cette limite est la 'pente' de la tangente au graphe de f au point M_0.

Exemple. Soit f définie par $f(x) = x^n$. De l'identité

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-2}x + x_0^{n-1} \quad \text{avec } x \neq x_0,$$

on déduit que f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et que $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

La proposition suivante nous donne un critère de dérivabilité qui sera utile pour la suite.

Proposition 3.1 *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Il y a équivalence entre les trois énoncés suivants :*

(i) f est dérivable en x_0.

(ii) Il existe un réel ℓ et une fonction ε définie sur $]a, b[$ tels que

$$f(x) = f(x_0) + \ell \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans ce cas $\ell = f'(x_0)$.

(iii) Il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

et $\ell = f'(x_0)$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. Il suffit de poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$ si $x \neq x_0$ et $\varepsilon(x_0) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. évident.

$(iii) \Rightarrow (i)$. évident. ∎

Proposition 3.2 *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Pour $x \neq x_0$, nous avons

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

En passant à la limite dans cette identité, nous avons

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \times 0 = 0.$$

∎

Définition 3.2 *On dit que f est dérivable sur $]a,b[$ lorsque f est dérivable en tout point de $]a,b[$. Dans ce cas la fonction $x \mapsto f'(x)$, définie sur $]a,b[$, est appelée fonction dérivée de f et est notée f'.*

3.1.2 Dérivées à gauche, à droite

Il existe des fonctions (par exemple $x \mapsto |x|$) non dérivables en un point mais telles que leur taux d'accroissement en ce point admette une limite finie à gauche et/ou à droite. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 3.3 *(i) Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Cette limite est notée $f'_d(a)$. Nous dirons que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à droite en a.*
(ii) Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable à gauche en b si $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ existe. Cette limite est notée $f'_g(b)$.
(iii) Nous dirons que f est dérivable sur $]a,b]$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à gauche en b. Nous dirons que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à droite en a. Nous dirons que f est dérivable sur $[a,b]$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$, à droite en a, et à gauche en b.

Exemple. Si $f(x) = |x|$, alors $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Proposition 3.3 *Soit $f :]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in]a,b[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche en x_0, f est dérivable à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

3.1.3 Graphe et tangente

• Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in]a,b[$. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Rappelons que l'équation de la sécante passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ est

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

• Lorsque les dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales, on introduit la notion de demi-tangente. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite (ou à gauche) au point $(x_0, f(x_0))$. Les équations de ces droites sont respectivement :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0) \quad \text{et} \quad y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0).$$

• Tangente parallèle à $\vec{j}$. Si f est continue en x_0, mais n'est pas dérivable en x_0, et si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ ou si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, alors, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphe de f en x_0 admet une tangente parallèle à $\vec{j}$.

3.2 Règles de calcul

Proposition 3.4 *Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en x_0. Alors :*
(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

(ii) La fonction $f + g$ est dérivable en x_0 et

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(iii) La fonction fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iv) Si de plus, $g(x_0) \neq 0$, la fonction f/g est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. (iv) Posons $q = \frac{f}{g}$. Comme g est dérivable en x_0, elle est continue en ce point. Par conséquent il existe un intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$ sur lequel g ne s'annule pas. Pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, avec $x \neq x_0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{q(x) - q(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)/g(x) - f(x_0)/g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x_0) \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons l'identité souhaitée en passant à la limite quand $x \to x_0$ dans cette égalité :

$$\begin{aligned}
q'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{q(x) - q(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x_0) \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

∎

3.3 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivation
$\lambda \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}^{-*}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

3.4 Dérivée d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soient f une fonction de I dans J et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$. La fonction composée de f par g, notée $g \circ f$, est définie sur I par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Démonstration. Sachant que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_f = 0,\\
g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + (y - y_0)\varepsilon_g(y - y_0) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_g = 0.
\end{aligned}$$

En substituant $f(x)$ à y dans le développement de g nous obtenons

$$\begin{aligned}
g(f(x)) = g(f(x_0)) &+ g'(f(x_0))\big(f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0)\big)\\
&+ \big(f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0)\big)\varepsilon_g\big(f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x - x_0)\big),
\end{aligned}$$

soit encore

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\, f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0),$$

avec

$$\begin{aligned}&\varepsilon(x-x_0)\\&=g'(f(x_0))\varepsilon_f(x-x_0)+\big(f'(x_0)+\varepsilon_f(x-x_0)\big)\varepsilon_g\big(f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon_f(x-x_0)\big).\end{aligned}$$

En utilisant $\lim_0 \varepsilon_f = 0$ et $\lim_0 \varepsilon_g = 0$, nous vérifions que $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Autre preuve. Posons $y_0 = f(x_0)$, et soit G la fonction définie sur J par

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{si} \quad y \neq y_0, \\ g'(y_0) & \text{si} \quad y = y_0. \end{cases}$$

Comme la fonction g est dérivable en y_0, la fonction G est continue en y_0. La fonction f est continue en x_0, donc la fonction $G \circ f$ est continue en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} (G\circ f)(x) = g'(f(x_0)).$$

Soit $x \in I$, $x \neq x_0$. De la définition de G, il découle que

$$(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0) = g(f(x)) - g(y_0) = G(f(x))(f(x)-f(x_0)).$$

Par conséquent nous avons

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = G(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

En passant à la limite nous avons

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} G(f(x)) \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

∎

Exemple 1. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = (f(x))^n$. Si f est dérivable en x_0, alors h est dérivable en x_0 et

$$h'(x_0) = n(f(x))^{n-1}f'(x_0).$$

En effet, $h = g \circ f$ avec $g(y) = y^n$.

Exemple 2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}^{+*}$. Si f est dérivable en x_0, alors la fonction h définie sur I par $h(x) = \ln(f(x))$ est dérivable en x_0 et

$$(\ln\circ f)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Exemple 3. Soit $h(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$. On pose $f(x) = \frac{-x^2}{2}$ et $g(x) = \exp(x)$. On vérifie que

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = -x\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right).$$

4. Théorèmes des accroissements finis, formules de Taylor

4.1 Extrema d'une fonction

Définition 4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un minimun local de f dans I s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \quad f(x_0) \leq f(x).$$

On dit que x_0 est un maximum local de f dans I s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \quad f(x_0) \geq f(x).$$

On dit que x_0 est un minimun global de f dans I si

$$\forall x \in I, \quad f(x_0) \leq f(x).$$

On dit que x_0 est un maximum global de f dans I si

$$\forall x \in I, \quad f(x_0) \geq f(x).$$

Un extremum de f dans I est soit un maximum global soit un minimum global, et un extremum local de f dans I est soit un maximum local soit un minimum local.

Remarques.

1. Le théorème de Weierstrass nous donne l'existence des extrema d'une fonction f continue, sur un intervalle fermé borné.
2. f peut avoir plusieurs extrema locaux.
3. f n'est pas nécessairement dérivable, voire même continue, au point où elle admet un extremum. Par exemple, $x \mapsto |x|$ admet un minimum global en $x_0 = 0$ et n'est pas dérivable en ce point.

Théorème 4.1 *Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in]a, b[$ est un extremum local de f et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Nous montrons ce résultat dans le cas où x_0 est un maximum local de f (le cas d'un minimum local se traite de manière identique). Soit $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$, et tel que c soit un maximum de f dans $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Nous avons $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in]x_0, x_0 + \alpha].$$

En passant à la limite nous avons

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

De même

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [x_0 - \alpha, x_0[,$$

et

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Nous en déduisons que $f'(x_0) = 0$, et le théorème est démontré. ∎

Pour déterminer les extrema locaux et globaux de f dans I, on peut les rechercher parmi les points où f' s'annule, mais aussi aux extrémités de I et aux points où f n'est pas dérivable.

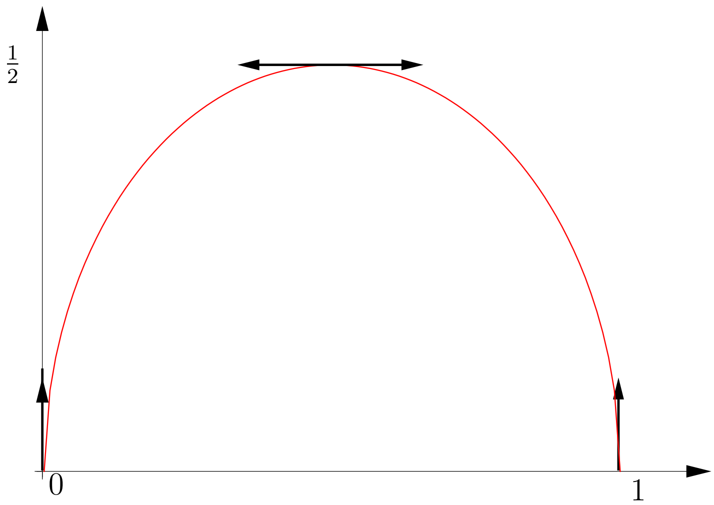


FIG. 4.1 – Extrema de $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ sur $[0, 1]$. Cette fonction admet un maximum global en $x = .5$ sur $[0, 1]$, et admet deux minima globaux dans $[0, 1]$ en $x = 0$ et $x = 1$.

4.2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

4.2.1 Théorème de Rolle

(Michel Rolle, 1652–1719)

Théorème 4.2 *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Démonstration. Nous savons que $f([a,b])$, l'image de $[a,b]$ par f, est un intervalle $[m,M]$. De plus, il existe $x_m \in [a,b]$ et $x_M \in [a,b]$ tels que $f(x_m)=m$ et $f(x_M)=M$. Nous allons distinguer le cas où $m=M$ du cas où $m<M$.

Si $m=M$, f est constante sur $[a,b]$ et $f'(x)=0$ pour tout $x \in]a,b[$.

Si $m<M$, nous avons soit $m<f(a)=f(b)\le M$ soit $m \le f(a)=f(b)<M$. Lorsque $m=f(x_m)<f(a)=f(b)\le M$, x_m est un minimum de f dans $[a,b]$ et $x_m \in]a,b[$. Donc $f'(x_m)=0$.

Lorsque $m \le f(a)=f(b)<M=f(x_M)$, x_M est un maximum de f dans $[a,b]$ et $x_M \in]a,b[$. Donc $f'(x_M)=0$. ∎

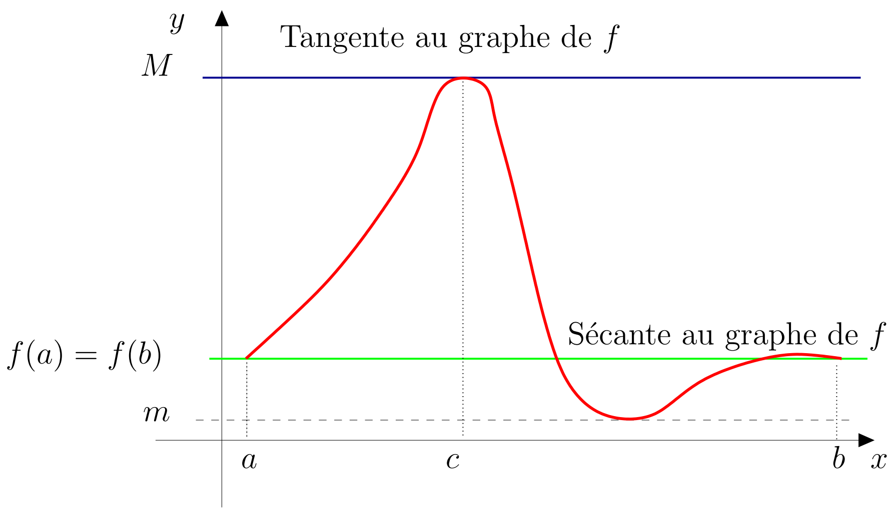


Fig. 4.2 – Illustration du théorème de Rolle

4.2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.3 *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe (au moins) un point $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Démonstration. La démonstration repose sur le théorème de Rolle. À partir de la fonction f, nous définissons une fonction g telle que $g(a)=g(b)$. Posons

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Il est évident que $g(a) = g(b)$, g est continue sur $[a, b]$, et g est dérivable dans $]a, b[$. De plus, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour tout $x \in]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le théorème est donc démontré. ∎

4.2.3 Fonctions réciproques des fonctions strictement monotones

Proposition 4.1 *Soit f une fonction continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I.*

1. *$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est croissante sur I.*
2. *$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est décroissante sur I.*
3. *$f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est constante sur I.*
4. *Si $f' > 0$ à l'intérieur de I, alors f est strictement croissante sur I.*
5. *Si $f' < 0$ à l'intérieur de I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. (i) Supposons que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Si x_1 et x_2 sont deux points de I tels que $x_1 < x_2$, en appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, nous avons

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

avec $c \in]x_1, x_2[$ (l'inégalité découle du fait que $f'(c) \geq 0$).

Réciproquement, si f est dérivable sur I et croissante, alors pour tout $x_0 \in I$ et tout $x \in I$, avec $x \neq x_0$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

(Il suffit d'utiliser la croissance de f et de distinguer les cas $x < x_0$ et $x > x_0$.) Donc par passage à la limite quand $x \to x_0$, nous récupérons $f'(x_0) \geq 0$.

(ii) La deuxième équivalence se démontre de manière analogue.

(iii) Si $f' > 0$ à l'intérieur de I, alors

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$$

pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. Donc f est strictement croissante sur I. Le dernier énoncé se démontre de manière analogue. ∎

Nous pouvons étendre les énoncés 4 et 5 de la proposition précédente au cas où f s'annule en un nombre fini de points.

Proposition 4.2 *Soit f une application dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, (respectivement $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$) et si f' s'annule une seule fois en $c \in]a, b[$ alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).*

Le résultat peut être étendu au cas d'une fonction qui s'annule un nombre fini de fois sur l'intervalle $]a, b[$.
Démonstration. On traite le premier cas. Supposons que f ne soit pas strictement croissante. Alors il existe $x, y \in]a, b[, x < y$ tel que $f(x) = f(y)$. La fonction f étant croissante, on a $f(t) = f(y)$ pour tout $t \in [x, y]$. Or f est dérivable dans $]x, y[$. Donc de la proposition précédente, nous déduisons que $f' = 0$ dans $]x, y[$. Mais cela contredit le fait que f' ne s'annule qu'une fois. ∎

Théorème 4.4 *Soit $I =]a, b[$ et f une fonction réelle définie dans I et dérivable dans I. Si $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$, alors*
(i) f admet une limite à droite en a dans $\overline{\mathbb{R}}$ (notée α) et une limite à gauche en b dans $\overline{\mathbb{R}}$ (notée β),
(ii) f est une bijection de I sur $J =]\alpha, \beta[$ (respectivement sur $J =]\beta, \alpha[$),
(iii) la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est dérivable sur J et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \textit{avec} \quad y = f(x).$$

En particulier, f^{-1} est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) et nous avons

$$\lim_{y \to \alpha} f^{-1}(y) = a \quad \Big(\textit{respectivement } \lim_{y \to \alpha} f^{-1}(y) = b\Big)$$

et

$$\lim_{y \to \beta} f^{-1}(y) = b \quad \Big(\textit{respectivement } \lim_{y \to \alpha} f^{-1}(y) = a\Big).$$

Démonstration. Traitons le cas où $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, l'autre cas se traite de manière analogue. Nous savons que f est strictement croissante sur I, donc la limite de f à droite en a existe et elle est éventuellement égale à $-\infty$. Notons-la α. De même la limite de f à gauche en b existe, notons-là β. Si $a < x_1 < x_2 < b$, nous avons $f(x_1) < f(x_2)$, donc f est injective. Montrons que f est surjective de I sur J. Soit $y \in J$. Étant donné que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha < y < \lim_{x \to b^-} f(x) = \beta,$$

il existe a_1 et b_1 tels que $a < a_1 < b_1 < b$ et $\alpha < f(a_1) < y < f(b_1) < \beta$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a_1, b_1[$ tel que $f(c) = y$. Donc f est une bijection de I sur J. Il existe donc une fonction réciproque g de J dans I. Il est facile de montrer que g est continue dans J (nous laissons cette question à titre d'exercice). Nous avons

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))},$$

pour tout $y \in J$, $y_0 \in J$, $y \neq y_0$. En passant à la limite, nous obtenons

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

La fonction $g = f^{-1}$ est donc dérivable sur J et l'expression de la dérivée est établie. ∎

4.2.4 Règle de l'Hospital

(Guillaume de l'Hospital 1661–1704, élève de Johann Bernoulli)

Proposition 4.3 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I telles que $f(a) = g(a) = 0$ avec $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a et si $g'(a) \neq 0$, alors la limite de f/g existe en a et*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Démonstration. Étant donné que $g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, il existe un intervalle $[a - \alpha, a + \alpha] \subset I$, avec $\alpha > 0$, sur lequel g ne s'annule qu'au point a (cela découle du développement $g(x) = (g'(a) + \varepsilon_g(x - a))(x - a)$ avec $\lim_0 \varepsilon_g = 0$). Nous avons

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

pour tout $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $x \neq a$. En passant à la limite nous obtenons

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

∎

4.3 Dérivées successives

Définition 4.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dérivable sur I. Si f' est dérivable en $x_0 \in I$, sa dérivée est notée $f''(x_0)$ et est appelée dérivée seconde de f en x_0. Si f' est dérivable sur I, nous dirons que f est deux fois dérivable sur I. Nous utilisons aussi la notation $f' = f^{(1)}$ et $f'' = f^{(2)}$. Plus généralement, si $f^{(n-1)}$ est dérivable (en un point x_0 ou sur I) nous définissons la dérivée n-ième de f par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.*

Par convention, il est utile, dans certaines formules, de poser $f^{(0)} = f$.

Exemples. Les fonctions exp, ch, sh, sin, cos, les fonctions polynômes admettent des dérivées de tout ordre. Nous dirons qu'elles sont indéfiniment dérivables.

Proposition 4.4 *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables en x_0. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable en x_0 et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.*

Proposition 4.5 (*Formule de Leibniz*) *Soient f et g deux fonctions m fois dérivables en x_0. Alors $f\,g$ est m fois dérivable en x_0 et*

$$\Big(f\,g\Big)^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x_0) g^{(m-k)}(x_0).$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n \leq m$, et soit $(\mathcal{P}_n)$ la propriété suivante :

$(\mathcal{P}_n)$
$$\Big(f\,g\Big)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

La propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vérifiée car $\Big(f\,g\Big)^{(1)} = f'g + fg'$ et $\sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(1-k)} = f^{(1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(1)}$.

Supposons que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifiée pour $n < m$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Big(f\,g\Big)^{(n+1)} &= \Big(\Big(f\,g\Big)^{(n)}\Big)' \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)' \text{ avec } (\mathcal{P}_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Big(f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k+1)} g^{(n+1-[k+1])} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(0)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Big] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)}.
\end{aligned}$$

La propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ découle de la formule de Pascal :

$$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}.$$

∎

4.4 Formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young

En analyse, la formule de Taylor-Lagrange, du nom du mathématicien Brook Taylor ($1685 - 1731$), qui l'établit en 1712, donne une approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Théorème 4.5 (*Formule de Taylor-Lagrange*)
Soient I un intervalle ouvert, f une fonction n fois dérivable dans I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) \\ &\qquad + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h). \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $x_0 + h = x$, et considérons la fonction F définie dans I par

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{(x-t)}{1!} f^{(1)}(t) - \cdots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t).$$

Par un calcul facile nous obtenons

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

Définissons G sur I par

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0} \right)^n F(x_0).$$

Nous avons $G(x_0) = G(x)$. Par application du théorème de Rolle, il existe c entre x et x_0 tel que

$$0 = G'(c) = F'(c) + n \left(\frac{(x-c)^{n-1}}{(x-x_0)^n} \right) F(x_0).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$F(x_0) = -\frac{1}{n} \frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}} F'(c) = \frac{1}{n} \frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}} \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c),$$

qui donne la formule attendue. ∎

Corollaire 4.1 *Si P est une fonction polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$, définie par $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_d x^d$ $(a_d \neq 0)$, alors $P^{(d+1)} = 0$, et*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{x^k}{k!} P^{(k)}(0).$$

En particulier avons $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

4.4.1 Exemples et remarques.

1 – Si $x_0 = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

avec ξ dans l'intervalle $]0, x[$ ou $]x, 0[$ selon que x est positif ou négatif. En particulier pour $f(x) = \exp(x)$, nous avons

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\exp(\xi) \quad \text{avec } \xi \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

2 – Si $f(x) = \sin(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + \frac{x}{1!}\sin^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\sin^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}\sin^{(5)}(\xi) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{124}\cos(\xi) \quad \text{avec } \xi \text{ entre } 0 \text{ et } x.\end{aligned}$$

3 – Si $f(x) = \cos(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(0) + \frac{x}{1!}\cos^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}\cos^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\cos^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\cos^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}\cos^{(5)}(\xi) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{124}\sin(\xi) \quad \text{avec } \xi \text{ entre } 0 \text{ et } x.\end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement suivant

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{124} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{124}.$$

4.4.2 La formule de Taylor-Young

Corollaire 4.2 (*Formule de Taylor-Young*) *Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, et soit f une fonction n fois dérivable dans I telle que $f^{(n)}$ soit continue en x_0 (cette hypothèse est vérifiée si $f^{(n+1)}(x_0)$ existe). Alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, telle que*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+h^n\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Démonstration. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n, nous avons

$$\begin{aligned}f(x_0+h) &= f(x_0) + \frac{(x_0+h-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x_0+h-x_0)^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \cdots \\ &+ \frac{(x_0+h-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_h h),\end{aligned}$$

avec $\theta_h \in]0, 1[$ (nous utilisons la notation θ_h pour bien indiquer que θ_h dépend de h). Posons $\varepsilon(h) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0+\theta_h h) - f^{(n)}(x_0)\right)$. Nous avons $\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_h h) = x_0$ et $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ car $f^{(n)}$ est continue en x_0. Le corollaire est donc démontré. ∎

5. Développements limités

5.1 Définition d'un développement limité

Définition 5.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ contenant 0. Nous dirons qu'un polynôme P de degré inférieur ou égal à n est un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 (en abrégé « d.l. d'ordre n en 0 ») de la fonction f si*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

De manière équivalente, un polynôme P de degré inférieur ou égal à n est un d.l. d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de f s'il existe une fonction ε définie sur I telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Remarque 5.1 *(Notation "o") Soit u une fonction définie dans un intervalle contenant 0 (disons $] - \epsilon, \epsilon[$). On dit que $u = o(x^n)$ (prononcer˜ : u est un petit "o" de x^n) lorsque $\lim_{x \to 0} u(x)/x^n = 0$. Avec cette définition, un polynôme P de degré $\leq n$ est un d.l. d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f en 0 lorsque $f = P + o(x^n)$. Attention : il ne faut pas confondre les "o" et les "O" qui ont une tout autre signification !*

Le polynôme P est parfois appelé la partie régulière du développement limité et le terme $\varepsilon(x)x^n$ est le terme complémentaire du d.l.. C'est le terme complémentaire qui donne l'ordre du développement limité.

Exemple. Soit f la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons vérifier que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

Dans le premier développement $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ est un développement d'ordre 2, alors que dans le second P est un développement d'ordre 3. Remarquons qu'il n'y a aucune contradiction car $\varepsilon_1(x) = x\varepsilon_2(x)$. Le terme complémentaire d'un d.l. n'est donc pas nécessairement unique. Dans la pratique, il est intéressant de rechercher l'ordre le plus élevé possible.

Proposition 5.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$. Alors f a au plus un d.l. d'ordre n en 0.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degré au plus n tel que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P(x)}{x^n}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-Q(x)}{x^n}=0.$$

De manière équivalente, nous avons

$$f(x)=P(x)+x^n\varepsilon_1(x)=Q(x)+x^n\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1=\lim_0 \varepsilon_2=0.$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-Q(x)}{x^n}=0.$$

Si $P-Q$ n'est pas nul, $P-Q$ est un polynôme de degré $r\le n$, et $P(x)-Q(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_rx^r$. Soit $i=\min\{0\le j\le r \mid c_j\neq 0\}$. Nous avons

$$\frac{P(x)-Q(x)}{x^n}=(c_i+c_{i+1}x+\ldots+c_rx^{r-i})\frac{1}{x^{n-i}}.$$

Si $i=n$, alors $i=n=r$ et $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-Q(x)}{x^n}=c_r\neq 0$, et si $i<n$, alors $\lim_{x\to 0}\left|\frac{P(x)-Q(x)}{x^n}\right|=+\infty$. Nous avons donc une contradiction et la preuve est complète.
∎

Définition 5.2 *Si P est un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et si $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, avec $P(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$, la troncature de P au degré k est le polynôme $T_k(P)$ défini par $T_k(P)(x)=\sum_{i=0}^k a_ix^i$.*

Proposition 5.2 *Si P est le d.l. d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ en zéro d'une fonction f, alors, pour $0\le k<n$, le polynôme $T_k(P)$ (la troncature de P au degré k) est le développement limité d'ordre k en zéro de f.*

Définition 5.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$, et soit $x_0\in I$. Un polynôme P est un développement limité d'ordre n en x_0 (en abrégé un d.l. d'ordre n en x_0) de f s'il existe une fonction ε telle que*

$$f(x)=P(x-x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$$

Remarque 5.2 *Pour calculer un d.l. d'ordre n en x_0 d'une fonction f il suffit de calculer le d.l. d'ordre n en 0 de la fonction $h\mapsto f(h+x_0)$. La notation "o" devient ici $f=P(x-x_0)+o((x-x_0)^n)$.*

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un d.l. d'ordre 0 en 0 et un d.l. d'ordre 1 en 0.

Proposition 5.3 *(i) Pour qu'une fonction f admette un d.l. d'ordre 0 en 0 il faut et il suffit que f soit continue en 0. On a alors*

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

(ii) Pour qu'une fonction f admette un d.l. d'ordre 1 en 0 il faut et il suffit que f soit dérivable en 0. On a alors

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Démonstration. (i) f est continue en zéro si et seulement si $\lim_{x\to 0} f(x) - f(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x^0} = 0$, ce qui est équivalent au fait que $f(0)$ est un d.l. d'ordre 0 en 0 de f.

(ii) Si f est dérivable alors $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$. Donc, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x} = 0$, et $P(x) = f(0) + xf'(0)$ est un d.l. d'ordre 1 en 0 de f.

Si $P(x) = a_0 + a_1 x$ est un d.l. de f d'ordre 1 en 0, alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que $f(x) = a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x)$. Donc f dérivable en zéro et $f'(0) = a_1$. ∎

Remarque 5.3 *Une fonction peut admettre un d.l. d'ordre $n \geq 2$ en 0 sans que f soit n fois dérivable. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & si\ x \neq 0, \\ 0 \quad si\ x = 0, \end{cases}$$

admet un d.l. d'ordre 2 en 0 car $x \sin(\frac{1}{x^2})$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. La fonction f est donc continue et dérivable en zéro, mais f' n'est pas continue en zéro donc n'est pas dérivable en zéro :

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x^3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par contre si une fonction f est n fois dérivable dans un intervalle ouvert contenant 0 et si $f^{(n)}$ est continue en 0, du théorème de Taylor-Young, nous déduisons que $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ est un d.l. d'ordre n en 0.

5.2 Développements limités usuels

Rappelons que la formule de Taylor-Young permet de déterminer le développement limité d'une fonction :

Si f est une fonction n fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant x_0 et si $f^{(n)}$ est continue en x_0 alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie sur un voisinage de 0 et telle que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Nous allons maintenant donner les développements limités des fonctions usuelles en 0.

5.2.1 Fonction exponentielle

La fonction exp est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, et, pour tout entier n, $\exp^{(n)} = \exp$. Nous avons donc

$$\boxed{\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.}$$

5.2.2 Sinus et cosinus

Les fonctions 'sinus' et 'cosinus' sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ pour tout entier n. Nous avons donc

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0,\\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0. \end{aligned}}$$

Remarque. La fonction 'cosinus' est paire. Nous remarquons que les d.l. de cette fonction ne contient que des monômes d'exposant pair. De même, la fonction 'sinus' est impaire et ses d.l. ne contiennent que des monômes d'exposant impair.

Proposition 5.4 *(i) Si f est une fonction paire définie dans un intervalle ouvert I contenant 0, dérivable jusqu'à l'ordre n dans I, alors $f^{(2k+1)}(0) = 0$ si $2k+1 \leq n$, et*

$$f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{2k}}{2!}f^{(2k)}(0) + x^{2k+1}\varepsilon(x)$$
$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0 \quad \text{et } 2k+1 \leq n.$$

(ii) Si f est une fonction impaire définie dans un intervalle ouvert I contenant 0, dérivable jusqu'à l'ordre n dans I, alors $f^{(2k)}(0) = 0$ si $2k \leq n$, et

$$f(x) = \frac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}f^{(2k-1)}(0) + x^{2k}\varepsilon(x)$$
$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0 \text{ et } 2k \leq n.$$

Démonstration. Si f est paire, il suffit d'écrire que les dérivées de f et g, avec $g(x) = f(-x)$, sont égales en zéro, pour obtenir les relations souhaitées. Si f est impaire, nous utiliserons l'égalité des dérivées de f et g, avec $g(x) = -f(-x)$. ∎

5.2.3 Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Les fonctions ch et sh sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$, ch est paire, sh est impaire, $\mathrm{ch}^{(2k)} = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{sh}^{(2k+1)} = \mathrm{ch}$. Nous avons

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(x) & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2n!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim\limits_{0} \varepsilon = 0, \\ \mathrm{sh}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim\limits_{0} \varepsilon = 0. \end{array}}$$

5.2.4 La fonction $(1+x)^\alpha$

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, est indéfiniment dérivable dans $]-1, +\infty[$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Nous en déduisons

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1+x)^\alpha & = 1 + \dfrac{\alpha x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x), \\ \text{avec} & \lim\limits_{0} \varepsilon = 0. \end{array}}$$

Pour $\alpha = -1$, nous obtenons

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim\limits_{0} \varepsilon = 0, \\ \dfrac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } x \in]-\infty, 1[,\ \lim\limits_{0} \varepsilon = 0. \end{array}}$$

Pour $\alpha = 1/2$, nous avons

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \times 4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}x^n + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{0} \varepsilon = 0.}$$

Remarque. Nous avons

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

pour tout $x \neq 1$. Cette expression nous donne directement les d.l. en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Il suffit de poser $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$.

5.2.5 La fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est indéfiniment dérivable dans $]-1, +\infty[$, et la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est indéfiniment dérivable dans $]-\infty, 1[$. Nous avons les d.l. en 0 suivants

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0, \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

5.2.6 Exemples de d.l. au voisinage de $a \neq 0$

(i) À l'aide de

$$\sin(a+x) = \sin(a)\cos(x) + \cos(a)\sin(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sin(a+x) = \sin(a) &\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \\ &+ \cos(a)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + x^{2n+1}\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

(ii) Avec

$$(a+x)^\alpha = a^\alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right)^\alpha \quad \text{lorsque } a \neq 0,$$

nous avons

$$(a+x)^\alpha = \left(1 + \frac{\alpha}{1!}\frac{x}{a} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\frac{x^2}{a^2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\frac{x^n}{a^n}\right) + x^n\varepsilon(x),$$
$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

5.2.7 Développement limité au voisinage de l'infini

Si f est une fonction définie sur $]a, +\infty[$, il est parfois possible d'écrire

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{+\infty} \varepsilon = 0,$$

et P est un polynôme de degré n. Un tel développement est appelé développement limité de f au voisinage de $+\infty$. Un exemple est donné en section 5.4. Mais, suivant les fonctions considérées, il existe d'autres développements possibles, par exemple en fonction de $1/x^\alpha$, $\alpha > 0$, à la place de $1/x$. C'est la raison pour laquelle nous n'aborderons pas cette notion de façon générale.

5.3 Opérations sur les développements limités

Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions admettant chacune un d.l. d'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n\varepsilon_f(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_g(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_f = 0, \ \lim_0 \varepsilon_g = 0, \\ P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \ \text{et} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n. \end{aligned}$$

5.3.1 Développement limité d'une combinaison linéaire de f et g

Proposition 5.5 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha P + \beta Q$ est le d.l. d'ordre n en 0 de $\alpha f + \beta g$.*

5.3.2 Développement limité du produit de f et g

Proposition 5.6 *Le polynôme $T_n(P\times Q)$ (la troncature du polynôme $P\times Q$ au degré n) est est le d.l. d'ordre n en 0 de $f \times g$.*

Exemples.
1 – Déterminons le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $\cos(x)/(1-x)$. Nous avons

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon_1 = \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

Nous obtenons

$$\frac{\cos(x)}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

2 – Déterminons le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $\cos(x)\sin(x)$. En utilisant les d.l. des fonctions sinus et cosinus, nous obtenons

$$\cos(x)\,\sin(x) = x - \frac{2x^3}{3} + x^4\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

5.3.3 Développement limité de la composée de f et g

La composition des développements limités est délicate.

Proposition 5.7 *Nous supposons que f est une fonction d'un intervalle ouvert I contenant 0, et que f est à valeurs dans un intervalle ouvert J contenant 0. Nous supposons que la fonction g est définie sur l'intervalle J. (Comme précédemment nous supposons que P est le d.l. d'ordre n en 0 de f et que Q est le d.l. d'ordre n en 0 de g.) Si $f(0) = 0$ alors le polynôme $T_n(Q \circ P)$ (la troncature du polynôme $Q \circ P$ au degré n) est le d.l. d'ordre n en 0 de $f \circ g$.*

Exemples.
1 – Déterminons le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $\exp(\sin(x))$. Nous avons $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \exp(x)$, et $f(0) = 0$. Avec les notations de la proposition, $P(x) = x$, $Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $Q \circ P(x) = Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = T_2(Q \circ P)$.

2 – Déterminons le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $\cos(\sin(x))$. Ici $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $f(0) = 0$, $P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $Q(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$,

$$Q \circ P(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4}{4!},$$

et $T_4(Q \circ P)(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$.

5.3.4 Développement limité du quotient de f par g

Le d.l. de f/g, s'il existe, est défini via le quotient de la division d'un polynôme par un autre suivant les puissances croissantes. Cette notion est introduite à la section suivante.

Proposition 5.8 *Si $g(0) \neq 0$, le quotient, de la division suivant les puissances croissantes d'ordre n, de P par Q est le d.l. d'ordre n en 0 de f/g.*

5.3.5 Division d'un polynôme par un autre suivant les puissances croissantes

Proposition 5.9 *Soient A et B deux polynômes, et soit n un entier naturel. Si $B(0) \neq 0$ alors il existe un couple unique (Q_n, R_n) de deux polynômes tel que*
(i) Q_n est de degré inférieur ou égal à n,
(ii) $A(x) = B(x)\, Q_n(x) + x^{n+1} R_n(x)$.
Le polynôme Q_n est appelé quotient de la division, suivant les puissances croissantes d'ordre n, de A par B.

L'algorithme de calcul du quotient de la division, suivant les puissances croissantes d'ordre n, de A par B est illustré ci-dessous sur un exemple. Posons $A(x) = 2-x+x^3$, $B(x) = 1 + x + x^2$ et $n = 3$. Nous avons

$$A(x) = B(x)(2 - 3x + x^2 + 3x^3) + x^3(-4x - 3x^2).$$

Le moyen de calculer $Q_3(x) = 2 - 3x + x^2 + 3x^3$ est décrit dans le tableau suivant.

$$\begin{array}{cccccc|c}
\hline
2 & -x & & +x^3 & & & 1+x+x^2 \\
\hline
-2(1 & +x & +x^2) & & & & 2-3x+x^2+3x^3 \\
 & -3x & -2x^2 & +x^3 & & & \\
 & 3x(1 & +x & +x^2) & & & \\
 & & x^2 & +4x^3 & & & \\
 & & -x^2(1 & +x & +x^2) & & \\
 & & & 3x^3 & -x^4 & & \\
 & & & -3x^3(1 & +x & +x^2) & \\
 & & & & -4x^4 & -3x^5 &
\end{array}$$

5.4 Exemples d'utilisation des développements limités

Les développements limités sont utilisés dans le calcul de limites, dans la construction de la courbe représentative d'une fonction, notamment pour préciser la position relative de la courbe et d'une asymptote.

Calcul de limite. Calculons (si elle existe) la limite en zéro de $\dfrac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$. La limite se présente sous forme indéterminée. Nous avons

$$\sin(x-\sin(x)) = \frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x),\ \lim_0 \varepsilon_1 = 0, \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + x^3}-1 = \frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon_2(x),\ \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

Nous en déduisons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1 + x^3} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)}{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{1}{3}.$$

Position d'une courbe par rapport à son asymptote. Pour cela, on peut faire un développement limité au voisinage de $+\infty$. On introduit une variable auxiliaire $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers 0.

Considérons par exemple la fonction $f(x) = x\exp(\frac{2x+1}{x^2})$. Nous avons $\lim_\infty f = +\infty$. Posons $u = \frac{1}{x}$. Alors $\frac{2x+1}{x^2} = 2u + u^2$, et

$$\exp(2u+u^2) = 1+(2u+u^2)+\frac{1}{2}(4u^2)+u^2\varepsilon(u) = 1+2u+3u^2+u^2\varepsilon(u) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

De sorte que $f(x) = x(1 + 2\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})) = x + 2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$. La droite d'équation $x \mapsto x + 2$ est donc asymptote à la courbe représentative de f. De plus, $f(x) - (x+2) = 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$. Comme ε tend vers 0 en 0 on sait que pour des réels x assez grand, $\varepsilon(\frac{1}{x}) \geq -1$. Par conséquent, au voisinage de $+\infty$, $f(x) - (x+2) \geq 0$ et la courbe représentative de f est au dessus de son asymptote.

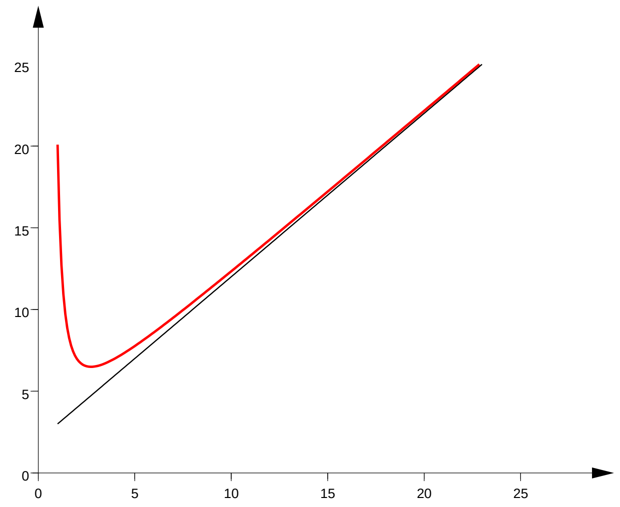


Fig. 5.1 – Courbe représentative de f et son asymptote en $+\infty$.

6. Fonctions convexes

6.1 Fonctions convexes

Définition 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est convexe sur I lorsque pour tout x, $y \in I$, $\lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation géométrique. Soient x et y deux réels de l'intervalle I. Le segment reliant les points $X = (x, f(x))$ et $Y = (y, f(y))$ est appelé 'corde' $[X, Y]$. La fonction f est convexe sur I lorsque pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ avec $x < y$, la corde reliant les points $X = (x, f(x))$ et $Y = (y, f(y))$ est au dessus du graphe

$$\Big\{(\xi, f(\xi)) \mid \xi \in [x, y]\Big\}.$$

Exemples. Les fonctions $|x|$, x^2, e^x sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Définition 6.2 *Une fonction est dite concave lorsque $-f$ est convexe.*

De la définition il découle qu'une fonction f est concave sur I lorsque pour tout x, $y \in I$, $\lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Remarquons que f est concave si et seulement si toute corde joignant deux points de la courbe représentative de f est au dessous de celle-ci.

Exemple. La fonction 'logarithme népérien' ($\ln(\cdot)$) est concave sur $]0, \infty[$. Ce résultat découle du théorème 6.1. L'inégalité de concavité pour le logarithme est donc

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda \in [0,1]$ ce qui s'écrit aussi

$$\lambda x + (1-\lambda)y \geq x^\lambda y^{1-\lambda}.$$

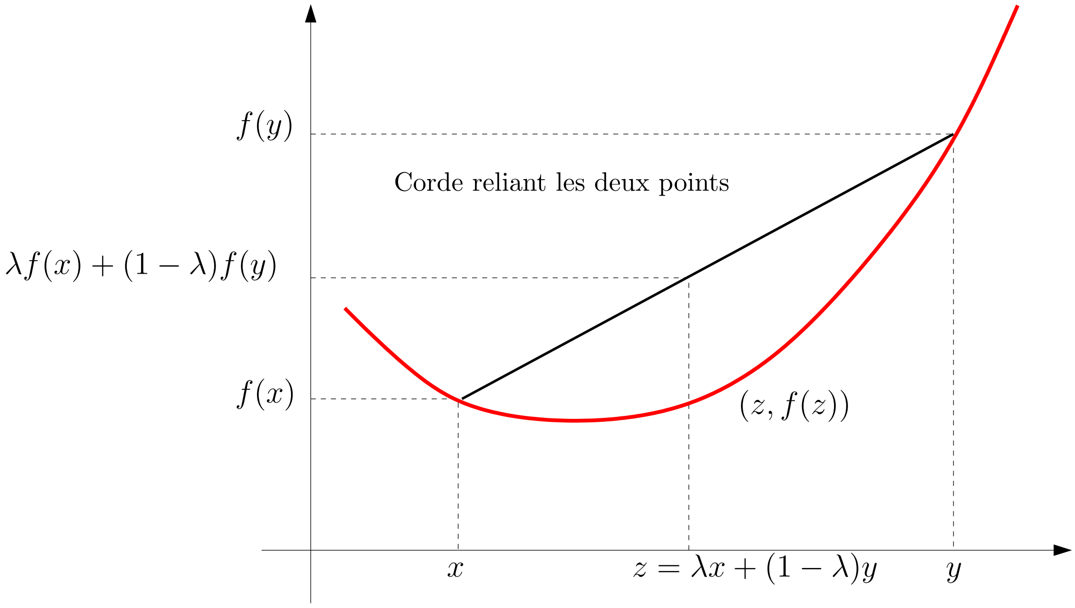


FIG. 6.1 – Interprétation de la convexité

6.2 Caractérisations des fonctions convexes

Proposition 6.1 *Si f est et dérivable sur un intervalle I, alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*
(i) f est convexe sur I,
(ii) Pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, on a

$$f(y)-f(x) \geq f'(x)(y-x).$$

Démonstration. Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$. Par hypothèse nous avons

$$f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \text{pour tout } \lambda \in [0,1],$$

d'où

$$\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda} \leq f(y)-f(x) \quad \text{pour tout } \lambda \in]0,1].$$

En passant à la limite quand $\lambda \to 0^+$, nous obtenons $f'(x)(y-x) \leq f(y)-f(x)$.
Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$. En appliquant deux fois le point (ii), nous obtenons

$$f(x) \geq f(x+\lambda(y-x))-\lambda f'(x+\lambda(y-x))(y-x),$$
$$f(y) \geq f(x+\lambda(y-x))+(1-\lambda)f'(x+\lambda(y-x))(y-x).$$

En multipliant la première inégalité par $(1-\lambda)$ et la seconde par λ, après addition membre à membre, il vient

$$(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \geq f(x+\lambda(y-x)) = f(\lambda y+(1-\lambda)x) \quad \text{pour tout } \lambda \in [0,1].$$

∎

Corollaire 6.1 *Si f est définie et dérivable sur un intervalle I, alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*
(i) f est convexe sur I,
(ii) f' est croissante sur I.

Démonstration. Supposons que f soit convexe sur I. En appliquant deux fois le point (ii) de la proposition précédente nous obtenons

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \quad \text{et} \quad f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y).$$

Par addition membre à membre, nous avons $0 \geq (f'(x) - f'(y))(y-x)$ pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, ce qui est équivalent au fait que f' est croissante.

Supposons maintenant que (ii) soit vérifié. Pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, avec le théorème des accroissements finis, nous avons

$$f(y) - f(x) = f'(x + \theta(y-x))(y-x) \quad \text{avec } \theta \in]0,1[.$$

Supposons que $x < y$ (le cas $y < x$ se traite de manière identique). Comme f' est croissante, nous avons $f'(x+\theta(y-x)) \geq f'(x)$ et $f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x)$. Le point (i) est établi (il suffit d'appliquer la proposition précédente). ∎

Théorème 6.1 (*Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables*) *Si f est définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*
(i) f est convexe sur I,
(ii) $f'' \geq 0$ sur I.

Démonstration. Ce résultat découle du corollaire précédent et du fait que si f est deux fois dérivable sur I, alors 'f' est croissante sur I' est équivalent à $f'' \geq 0$ sur I.
∎

Une application de la convexité. La fonction logarithme étant concave, nous avons

$$\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\right) \geq \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv) \quad \text{pour tout } u \in]0,\infty[,\ v \in]0,\infty[,$$

et où $p \in]1,+\infty[$ et $q \in]1,+\infty[$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La fonction logarithme étant strictement croissante nous en déduisons

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{pour tout } u \in [0,\infty[,\ v \in [0,\infty[.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Young.

Nous allons utiliser l'inégalité de Young pour démontrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k\, v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^q\right)^{1/q},$$

avec $p \in]1, +\infty[$, $q \in]1, +\infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ici $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour démontrer l'inégalité de Hölder, on pose

$$|u'_k| = \frac{u_k}{\left(\sum_{k=1}^n |u_k|^p\right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad |v'_k| = \frac{v_k}{\left(\sum_{k=1}^n |v_k|^q\right)^{1/q}}.$$

Partant de l'inégalité de Young, nous avons

$$|u'_k\, v'_k| \leq \frac{|u'_k|^p}{p} + \frac{|v'_k|^q}{q} \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq n.$$

En sommant les différentes inégalités de $k = 1$ à $k = n$, nous obtenons

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n |u_k|^p\right)^{1/p}} \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n |v_k|^q\right)^{1/q}} \sum_{k=1}^n |u_k\, v_k| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|u'_k|^p}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{|v'_k|^q}{q} = 1.$$

L'inégalité de Hölder s'en déduit immédiatement.

Pour $q = p = 2$, l'inégalité de Hölder est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité de Hölder se généralise à des sommes infinies (encore appelées séries), et aux intégrales. Si f et g sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, nous avons

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{1/q}.$$

7. Intégration

L'origine de la théorie actuelle de l'intégration remonte à l'antiquité avec le souci de la mesure des aires, des longueurs et des volumes ; « géomètre » signifie en grec ancien « arpenteur » c'est à dire « celui qui mesure la terre ». Trois idées fondent le concept de mesure ; la première est la définition de la mesure pour des ensembles simples : $b-a$ pour la longueur du segment $[a, b]$, $L_1 L_2$ pour l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent L_1 et L_2, $L_1 L_2 L_3$ pour le volume d'un parallélépipède rectangle dont les côtés ont pour longueurs L_1, L_2 et L_3. La seconde idée est celle d'addition : la mesure de la réunion de deux ensembles disjoints est égale à la somme des mesures de ces ensembles. La troisième idée est celle de continuité de la mesure : ainsi la longueur du cercle est la limite des longueurs des polygones réguliers inscrits dans ce cercle et cetera. C'est cette voie que nous allons suivre pour construire l'intégrale d'une fonction continue : on commence par définir l'intégrale d'une fonction constante, puis celle d'une fonction en escalier et enfin celle d'une limite d'une suite de fonctions en escalier.

La forme moderne de cette construction est due à Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866, et à Jean Gaston Darboux, 1842 - 1917. La théorie de la mesure trouvera sa forme achevée grâce aux travaux de Henri Léon Lebesgue, 1875 - 1941.

7.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 7.1 *Soit* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *une subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ *et soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier telle que* $f(x) = c_k$ *pour tout* $x \in]t_{k-1}, t_k[$, $1 \leq k \leq n$. *On définit l'intégrale de* f *sur* $[a, b]$ *par*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k(t_k - t_{k-1}).$$

On définit aussi

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Remarque 7.1 Cette définition ne dépend pas de la valeur de f aux noeuds de la subdivision. ∎

Théorème 7.1 *1. L'intégrale ne dépend pas de la description de f : soient $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ et c_k, $1 \leq k \leq n$, d'une part et $s_0 < s_1 < \ldots < s_m$ et d_l, $1 \leq l \leq m$, deux descriptions de f. Alors $\sum_{k=1}^{n} c_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{l=1}^{m} d_l(s_l - s_{l-1})$.*

2. *L'intégrale est linéaire en f : quels que soient les fonctions en escalier $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et les nombres réels α et β on a :*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

3. *L'intégrale est positive : si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*
4. *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*
5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
6. *Relation de Chasles. Pour tout $a \leq b \leq c$ et la fonction en escalier $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

7.2 Intégrale des fonctions continues

Théorème 7.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1. *Il existe une suite de fonctions en escalier $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g_n(x)| = 0.$$

On dit alors que la suite (g_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

2. *Pour une telle suite (g_n), la suite numérique $\left(\int_a^b g_n(x)dx\right)$ est convergente,*
3. *Pour deux telles suites (g_n) et (h_n) on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)dx.$$

On note $\int_a^b f(x)dx$ cette limite commune et on l'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Démonstration.

1. La construction d'une suite (g_n) de fonctions en escalier qui approchent f est une conséquence du théorème 2.4. On prend g_n en escalier telle que $|f(x) - g_n(x)| \leq 1/n$ pour tout $x \in [a,b]$ d'où $\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g_n(x)| \leq 1/n$ et donc la limite de ces quantités est nulle.
2. On va montrer que la suite $\left(\int_a^b g_n(x)dx\right)$ est de Cauchy (définition 1.12). On en déduira qu'elle est convergente (théorème 1.5). Par hypothèse

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N(\varepsilon))\ \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \ (\forall n \geq N(\varepsilon)) \ (\forall x \in [a, b]) \ |f(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Nous devons montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ (\forall p, q \geq N) \ \left| \int_a^b g_p(x)dx - \int_a^b g_q(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon > 0$, $N = N(\varepsilon/2(b-a))$, p et $q \geq N$. Il existe une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

et des nombres réels $c_{p,k}$ et $c_{q,k}$ tels que $g_p(x) = c_{p,k}$ et $g_q(x) = c_{q,k}$ pour tout $x \in]t_{k-1}, t_k[$ et $1 \leq k \leq n$. Remarquer que cette subdivision est la même pour les deux fonctions g_p et g_q ; on l'obtient en « mêlant » les subdivisions originelles de g_p et g_q. Notons que

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - f(x)| + |f(x) - g_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}$$

de sorte que

$$\left| \int_a^b g_p(x)dx - \int_a^b g_q(x)dx \right| \leq \int_a^b |g_p(x) - g_q(x)| \, dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Prenons maintenant deux suites (g_n) et (h_n) telles que

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists N_g(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \ (\forall n \geq N_g(\varepsilon)) \ (\forall x \in [a, b]) \ |f(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon$$

et

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists N_h(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \ (\forall n \geq N_h(\varepsilon)) \ (\forall x \in [a, b]) \ |f(x) - h_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Par ce qui précède, ces deux suites convergent vers I_g et I_h lorsque $n \to \infty$. Prenons $\varepsilon > 0$, $N = \max(N_g(\varepsilon/2(b-a)), N_h(\varepsilon/2(b-a))$ et $n \geq N$. Le même raisonnement que celui fait pour g_p et g_q montre que

$$\left| \int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b h_n(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite on obtient $|I_g - I_h| \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire ceci prouve que $I_g = I_h$. ∎

Remarque 7.2 Le lecteur attentif aura remarqué que nous n'avons pas vraiment utilisé la continuité de f mais seulement le fait qu'une fonction continue peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier. De telles fonctions sont appelées « fonctions réglées ». Ce sont aussi les fonctions qui possèdent en tout point une limite à droite et une limite à gauche. ∎

Théorème 7.3 *Les fonctions considérées ici sont continues sur* $[a, b]$.

1. *L'intégrale est linéaire en* f *: quels que soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et les nombres réels* α *et* β *on a :*
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$
2. *L'intégrale est positive : si* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
3. *Si* $a < b$, *si* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *et si* $\int_a^b f(x)dx = 0$ *alors* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in [a, b]$.
4. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
6. *Relation de Chasles. Pour tout* $a \leq b \leq c$ *et la fonction en escalier* $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ *on a :*
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Démonstration. Par passage à la limite dans le théorème 7.1 on obtient les points 1, 2, 4, 5, 6. Pour 3 on raisonne *ab absurdo*. Si $f(x_0) > 0$ prenons $\varepsilon = f(x_0)/2$ dans la définition de la continuité. Il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| \leq f(x_0)/2$ pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. Sur cet intervalle on a donc $f(x) \geq f(x_0)/2$. On en déduit que
$$\int_a^b f(x)dx \geq 2\eta \frac{f(x_0)}{2} > 0$$
ce qui contredit l'hypothèse. ∎

Proposition 7.1 *(Application au calcul des limites) Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. Alors*
$$\lim \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. La partie de droite est l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction en escalier $f_n(x) = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ sur l'intervalle $\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right]$. D'après le théorème 2.3 $\forall \varepsilon > \ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in [a, b]\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Ceci prouve, pour tout $n \geq (b-a)/\eta$, que $\left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right]$ et donc que $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. La suite (f_n) est donc une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 7.2 pour conclure. ∎

Exemple 7.1
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$
∎

7.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

On réunit maintenant les fonctions en escalier et les fonctions continues en un même lot :

Définition 7.2 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ telle que f soit continue sur chaque intervalle $]t_{k-1}, t_k[$, $1 \le k \le n$, et posséde en tout point t_k une limite à droite et une limite à gauche. On dit alors que f n'a qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)dx.$$

Les propriétés de cette intégrale sont celles énoncées au théorème 7.1. Il suffit d'y remplacer les mots « en escalier » par « continue par morceaux ». Le lecteur attentif aura remarqué que ces fonctions sont elles aussi des fonctions réglées.

7.4 Le théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 7.4 *(Théorème de la moyenne) Soient f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec $g(x) \ge 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

Démonstration. Puisque f est continue sur un intervalle compact elle est bornée sur cet intervalle et atteind ses bornes (théorème 2.1) :

$$f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \le f(x) \le \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_M).$$

En multipliant cette inégalité par $g(x)$ puis en intégrant on obtient

$$f(x_m) \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le f(x_M) \int_a^b g(x)dx.$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$ c'est que $g(x) = 0$ pour tout x (théorème 7.3). Mézalor on prend pour c n'importe quoi et

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx = 0.$$

Si $\int_a^b g(x)dx > 0$ il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) à f et $y = \int_a^b f(x)g(x)dx / \int_a^b g(x)dx$ pour conclure.

La seconde assertion résulte de la première avec $g = 1$. ∎

Théorème 7.5 *(Théorème fondamental du calcul intégral) Soient I un intervalle quelconque, $a \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in I$ posons*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Cette fonction est définie sur I, $F(a) = 0$, elle est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Démonstration. $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(c_h)$ par le théorème de la moyenne avec c_h compris entre x et $x+h$. Lorsque $h \to 0$ on a $c_h \to x$ et $f(c_h) \to f(x)$ d'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

∎

7.5 Primitives et intégrales

7.5.1 Primitives d'une fonction continue

Définition 7.3 *Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f dans I lorsque F est dérivable et que sa dérivée est f.*

Exemple 7.2 $\log|x|$ est une primitive de $1/x$ ($x \neq 0$). La fonction $signe(x)$ ne possède pas de primitive (raisonner par l'absurde). Toutefois, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x signe(t)dt = |x|.$$

∎

Théorème 7.6 *(Existence de primitives) Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1. *f admet des primitives,*
2. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 - F_2$ est constante,*
3. *Soit $a \in I$. Toute primitive de f s'écrit $F(x) = \alpha + \int_a^x f(t)dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$,*
4. *Si F est une primitive de f alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Remarque 7.3 Ce théorème est en défaut lorsque I n'est pas un intervalle. Par exemple, toute primitive de $f = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ s'écrit $F(x) = \alpha$ si $x < 0$ et $F(x) = \beta$ si $x > 0$ où α et β sont deux constantes arbitraires. ∎

7.5.2 Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Domaine de validité
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|$	$]-\infty, -1[,]-1, 1[$ ou $]1, \infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh}(x)$	$]1, \infty[$

Remarque 7.4 La continuité n'est pas une condition nécessaire à l'existence d'une primitive. La fonction définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ n'est pas

continue en 0 mais elle possède la primitive

$$x^2 \cos \frac{1}{x} - 2 \int_0^x t \cos \frac{1}{t} dt.$$

■

7.5.3 Primitives d'un développement limité

Proposition 7.2 *Si une fonction continue f admet un développement limité $p_n(x)$ en x_0 à l'ordre n alors la fonction $F(x) = \alpha + \int_{x_0}^x f(t)dt$ admet le développement limité $P_{n+1}(x) = \alpha + \int_{x_0}^x p_n(t)dt$ et ce dernier est d'ordre $n+1$.*

Démonstration. Écrivons $f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. On a

$$F(x) = \alpha + \int_{x_0}^x p_n(t)dt + \int_{x_0}^x (t - x_0)^n \varepsilon(t)dt.$$

Par le théorème de la moyenne (théorème 7.4)

$$\int_{x_0}^x (t - x_0)^n \varepsilon(t)dt = (x - x_0)(c - x_0)^n \varepsilon(c)$$

avec c compris entre x et x_0 de sorte que

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{1}{(x - x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^x (t - x_0)^n \varepsilon(t)dt \right| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{(c - x_0)^n}{(x - x_0)^n} \varepsilon(c) \right| \leq \lim_{x \to x_0} |\varepsilon(c)| = 0.$$

Ceci prouve que $\int_{x_0}^x (t - x_0)^n \varepsilon(t)dt = (x - x_0)^{n+1} E(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} E(x) = 0$. ■

7.6 Intégration par parties

Théorème 7.7 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Démonstration. $(fg)' = f'g + fg'$ et on intègre. ■

Exemple 7.3
1. $\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x$ en prenant $f'(t) = 1$ et $g(t) = \ln t$.
2. $$I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt = 2n \int_0^1 t^2 (1 - t^2)^{n-1} dt = -2nI_n + 2nI_{n-1}$$

   en prenant $f'(t) = 1$ et $g(t) = (1 - t^2)^n$. On en déduit que

   $$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \ldots = \frac{2n(2n-2)\ldots 4 \times 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5 \times 3} I_0 = \frac{2n(2n-2)\ldots 4 \times 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5 \times 3}.$$

■

Théorème 7.8 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, x et $x_0 \in I$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$ c'est le théorème 7.5. Pour passer de n à $n+1$ on intègre par parties $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ en posant $u' = (x-t)^n/n!$ et $v = f^{(n+1)}(t)$ qui donne $u = -(x-t)^{n+1}/(n+1)!$ et $v' = f^{(n+2)}(t)$ d'où

$$= - \left. \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt =$$

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.$$

L'hypothèse de récurrence nous donne, pour cette dernière expression

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

d'où le résultat. ∎

7.7 Changement de variable

7.7.1 Résultats généraux

Théorème 7.9 *Soient I et J deux intervalles, $\alpha, \beta \in J$, $\phi : J \to I$ de classe C^1 et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(s))\phi'(s)ds = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt.$$

Démonstration. $\int_{\alpha}^{x} f(\phi(s))\phi'(s)ds$ et $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t)dt$ ont toutes deux pour dérivée en x la fonction $f(\phi(x))\phi'(x)$ et elles prennent la valeur 0 en $x = \alpha$. Elles sont donc égales. ∎

Exemple 7.4 1. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\int_0^x \tan s ds = - \int_0^x \frac{1}{\cos s}(-\sin s)ds = - \int_1^{\cos x} \frac{dt}{t} = -\ln(\cos x).$$

Dans cet exemple $\phi(s) = \cos s$ et $f(t) = 1/t$.

2. Soit $p \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b \frac{s}{(1+s^2)^p} ds = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2s}{(1+s^2)^p} ds = \frac{1}{2} \int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{1}{t^p} dt = \begin{cases} \left[\frac{1}{2(1-p)t^{p-1}}\right]_{1+a^2}^{1+b^2} & \text{si } p \neq 1, \\ \left[\frac{1}{2}\ln t\right]_{1+a^2}^{1+b^2} & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

On a posé ici $\phi(s) = 1 + s^2$ et $f(t) = 1/t^p$.

3. Soient $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 0$. Considérons $\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$. Ici $f(t) = t^p(1-t)^q$ et l'on a envie de poser $t = \phi(s) = \sin^2 s$. Il faudra donc remplacer dt par $2 \sin s \cos s ds$, $t^p(1-t)^q$ par $\sin^{2p} s \cos^{2q} s$ et les bornes par 0 et $\pi/2$ d'où

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1}(s) \cos^{2q+1}(s) ds.$$

∎

7.7.2 Trinômes du second degré

La mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré consiste à ramener $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) à l'une des formes suivantes via un changement de variable affine :

$$\begin{cases} K(y^2-1) & \text{si} \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ Ky^2 & \text{si} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0 \\ K(y^2+1) & \text{si} \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

Ces formes canoniques sont obtenues via le calcul suivant :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right).$$

Si $\Delta = 0$ on pose $y = x + \frac{b}{2a}$ et l'on obtient la deuxième forme, si $\Delta < 0$ on a :

$$ax^2 + bx + c = \frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right)$$

et on pose $y = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ pour obtenir la première forme et si $\Delta > 0$ alors

$$ax^2 + bx + c = \frac{-\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right)$$

et on pose $y = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ pour obtenir la troisième forme.

Exemple 7.5 1.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{(s+2)(3-s)}}.$$

Posons $t = (2s-1)/5$; le trinôme devient $(s+2)(3-s) = 25(1-t^2)$ et l'intégrale est égale à

$$I = \frac{1}{2} \int_{-3/5}^{1/5} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \left(\arcsin(1/5) - \arcsin(-3/5)\right).$$

2.
$$I = \int_0^1 \frac{ds}{s^2+s+1}.$$
Posons $t = (2s+1)/\sqrt{3}$; le trinôme devient $s^2+s+1 = (t^2+1)3/4$ et l'intégrale est égale à
$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{3/\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(3/\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3}) \right).$$

■

7.8 Intégration des fractions rationnelles

Commençons par rappeler les résultats essentiels qui concernent la factoration des polynômes et la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

7.8.1 Factorisation complexe d'un polynôme

Définition 7.4 *Un polynôme à coefficients complexes en la variable z est une expression du type*
$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$
où les $a_k \in \mathbb{C}$. Leur ensemble est noté $\mathbb{C}[z]$. Lorsque les $a_k \in \mathbb{R}$ on dit que le polynôme est à coefficients réels ; leur ensemble est noté $\mathbb{R}[x]$ (il est d'usage de noter z la variable complexe et x la variable réelle). À tout polynôme P on associe une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$ par
$$z \in \mathbb{C} \to a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$
Cette fonction est aussi notée P.

Définition 7.5 *Si n est le plus grand entier tel que $a_n \neq 0$ on dit que $P(z)$ est de degré n et l'on écrit $\deg P = n$. Sous cette définition le degré du polynôme nul $P(z) = 0$ n'est pas défini et le degré d'un polynôme constant non nul est 0.*

Définition 7.6 *On dit que $r \in \mathbb{C}$ est une racine de P lorsque $P(r) = 0$. On dit aussi que r est un zéro de P.*

Exemple 7.6
1. Le polynôme nul a une infinité de zéros (n'importe quel nombre complexe), un polynôme de degré 0 (non nul) n'en possède pas, un polynôme de degré 1 en a un et un seul, un polynôme de degré 2 en a 2 ou 1.
2. Les racines de $z^n - 1$ sont les nombres complexes $r_k = e^{2ki\pi/n}$, $k = 0 \ldots n-1$.
3. Les racines de $z^n + 1$ sont les nombres complexes $r_k = e^{(2k+1)i\pi/n}$, $k = 0 \ldots n-1$.

■

Définition 7.7 *(Division euclidienne) Étant donné deux polynômes A et B, $B \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes Q et R qui satisfasse aux conditions $A = BQ + R$ et ($R = 0$ ou $\deg R < \deg B$). L'opération qui associe Q et R à A et B s'appelle la division euclidienne de A par B, Q est son quotient et R son reste. Lorsque $R = 0$ on dit que B divise A.*

Proposition 7.3 *Un polynôme P admet $r \in \mathbb{C}$ pour racine si et seulement si $z - r$ divise P. Lorsque $(z-r)^m$ divise P et que $(z-r)^{m+1}$ ne divise pas P on dit que la racine r est de multiplicité m. P admet r pour racine de multiplicité m si et seulement si $P^{(k)}(r) = 0$ pour tout $k = 0 \dots m-1$ et $P^{(m)}(r) \neq 0$ (ici $P^{(k)}(z)$ désigne le polynôme dérivé d'ordre k).*

Théorème 7.10 *(Théorème fondamental de l'algèbre, d'Alembert-Gauss) Tout polynôme P à coefficients complexes de degré $\deg P \geq 1$ possède une racine $r \in \mathbb{C}$.*

Corollaire 7.1 *Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$. Notons $r_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq p$, ses racines distinctes et m_k la multiplicité de r_k. Alors $m_1 + \ldots + m_p = n$ et*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = a_n \prod_{k=1}^{p} (z - r_k)^{m_k}.$$

Exemple 7.7

1. Un polynôme de degré 1 s'écrit $P_1(z) = a(z-r)$.
2. Un polynôme de degré 2 s'écrit $P_2(z) = a(z-r_1)(z-r_2)$ avec $r_1 \neq r_2$ ou $P_2(z) = a(z-r)^2$.
3. $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{2ki\pi/n}\right)$.
4. $z^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{(2k+1)i\pi/n}\right)$.

■

7.8.2 Factorisation réelle d'un polynôme

Lorsque $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ est un polynôme à coefficients réels et si r est une racine de P, alors

$$a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n = 0$$

de sorte que, en prenant le conjugué de cette expression,

$$\overline{a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n} = a_0 + a_1 \overline{r} + \ldots + a_n \overline{r}^n = 0.$$

Ceci prouve que si $r = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$ alors $\overline{r} = \alpha - i\beta$ est aussi racine de P, distincte de r. Toutes deux contribuent ainsi à un facteur du second degré sans racines réelles dans la factorisation de P. On obtient

Corollaire 7.2 *Tout polynôme P à coefficients réels de degré $n \geq 1$ s'écrit*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_n \prod_{k=1}^{p} (x - r_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{q} (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{n_\ell}$$

avec $r_k, b_\ell, c_\ell \in \mathbb{R}$, $b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$ et $m_1 + \ldots + m_p + 2n_1 + \ldots + 2n_q = n$.

Exemple 7.8

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) =$$

$$\left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

■

7.8.3 Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle à coefficients complexes est une expression du type

$$Q(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}$$

où les $a_k, b_\ell \in \mathbb{C}$ et $B \neq 0$. Leur ensemble est noté $\mathbb{C}(z)$. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels est noté $\mathbb{R}(x)$.

Une fraction rationnelle est irréductible lorsque l'ensemble des zéros de A et l'ensemble des zéros de B sont disjoints. Dans ce cas, les zéros de B sont appelés pôles de la fraction rationnelle. Les multiplicités des pôles sont les multiplicités en tant que racines de B.

Par exemple

$$Q(z) = \frac{z + 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

a pour unique pôle $z = 1$ de multiplicité 2.

Lorsque l'on effectue la division euclidienne de $A(z)$ par $B(z)$ on obtient $A(z) = E(z)B(z) + R(z)$. Ainsi

$$Q(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = E(z) + \frac{R(z)}{B(z)}$$

avec $R = 0$ ou bien $\deg R < \deg B$. Le polynôme E s'appelle la partie entière de la fraction.

Exemple 7.9 Considérons

$$Q(z) = \frac{z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + 1}{z^4 + z^2}.$$

Sa partie entière s'obtient par division euclidienne de A par B. On obtient

$$Q(z) = 1 + z + \frac{1}{z^4 + z^2} = 1 + z + \frac{1}{z^2(1 + z^2)} = 1 + z + \frac{1}{(z-i)(z+i)z^2}.$$

Cette seconde fraction est irréductible et ses pôles sont i, $-i$ et 0 de multiplicités respectives 1, 1 et 2. ■

7.8.4 Décomposition en éléments simples de première espèce

Théorème 7.11 *Notons $Q(z) = A(z)/B(z)$ une fraction rationnelle irréductible, $r_1, \dots, r_n$ ses pôles, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_n$ et $E(z) \in \mathbb{C}[z]$ sa partie entière. Il existe des coefficients $a_{ki} \in \mathbb{C}$ pour lesquels*

$$Q(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = E(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{ki}}{(z - r_k)^i}.$$

Cette décomposition est appelée « décomposition en éléments simples de première espèce » de la fraction rationnelle. Elle est unique.

Exemple 7.10 Considérons

$$Q(z) = 1 + z + \frac{1}{(z-i)(z+i)z^2}.$$

Elle se décompose en

$$Q(z) = 1 + z + \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i} + \frac{c}{z} + \frac{d}{z^2}.$$

Pour calculer a on multiplie les deux membres de cette identité par $z - i$ et on fait $z = i$ ce qui donne $a = i/2$. On procède de même pour $z + i$ d'où $b = -i/2$ et pour z^2 ce qui donne $d = 1$. On obtient $c = 0$ par identification d'où

$$Q(z) = 1 + z + \frac{i}{2(z-i)} - \frac{i}{2(z+i)} + \frac{1}{z^2}.$$

■

7.8.5 Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

L'exemple précédent montre qu'une fraction rationnelle à coefficients réels peut posséder une décomposition en éléments simples de première espèce dont les coefficients sont complexes. Notons que, en réduisant les deux termes complexes au même dénominateur, on a

$$Q(z) = 1 + z + \frac{i}{2(z-i)} - \frac{i}{2(z+i)} + \frac{1}{z^2} = 1 + z + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^2}$$

qui est une décomposition à coefficient réels. Ce résultat est tout à fait général. On a :

Théorème 7.12 *Soit $Q(x) = A(x)/B(x)$ une fraction rationnelle irréductible réelle et soit $E(x)$ sa partie entière. Notons*

$$B(x) = b \prod_{k=1}^{p} (x - r_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{q} (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{n_\ell}$$

la factorisation réelle du polynôme $B(x)$: b, r_k, b_l et $c_l \in \mathbb{R}$ avec $b_l^2 - 4c_l < 0$. Il existe des coefficients α_{ki}, β_{lj}, $\gamma_{lj} \in \mathbb{R}$ pour lesquels

$$Q(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = E(z) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{\alpha_{ki}}{(z - r_k)^i} + \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_l} \frac{\beta_{lj} x + \gamma_{lj}}{(x^2 + b_\ell x + c_\ell)^j}.$$

Cette décomposition s'appelle la décomposition en éléments simples de deuxième espèce. Elle est unique

Exemple 7.11 Ce théorème donne

$$Q(x) = \frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1} + \frac{ex + f}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

■

7.8.6 Intégration des fractions rationnelles

Via une décomposition en éléments simples (de seconde espèce) on se ramène à l'intégration des éléments suivants

1. $E(x)$, la partie entière de la fraction, c'est un polynôme,
2. Les éléments simples de première espèce $1/(x - r)^n$,
3. Les éléments simples de deuxième espèce $(\alpha x + \beta)/(x^2 + bx + c)^n$ avec $b^2 - 4c < 0$.

Pour intégrer cette dernière fraction on l'écrit

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)^n} = \frac{\alpha}{2} \frac{(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^n} + \frac{2\beta - \alpha b}{2(x^2 + bx + c)^n}.$$

La première fraction est du type u'/u^n et s'intègre en $u^{n-1}/(n-1)$ si $n > 1$ ou bien en $\log |u|$ si $n = 1$.

Par un changement de variable adéquat la seconde fraction se met sous la forme $I_n = 1/(X^2 + 1)^n$ (voir le paragraphe 7.7.2). Lorsque $n = 1$ elle s'intègre en $\arctan X$. Lorsque $n > 1$ une intégration par parties permet de relier I_n et I_{n-1} (poser $u' = 1$ et $v = (X^2 + 1)^{1-n}$ dans I_{n-1}).

7.9 Quelques changements de variable classiques

Notons F une fraction rationnelle de deux variables comme par exemple $F(x, y) = xy/(x^2 + y^3)$.

7.9.1 Fonctions de la forme $F(\cos x, \sin x)$

En posant $t = \tan(x/2)$ on obtient

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

de sorte que

$$\int F(\cos x, \sin x) dx = \int F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

et l'on s'est ramené à une fraction rationnelle. Des changements de variables mieux adaptés sont possibles dans des cas plus particuliers.

7.9.2 Fonctions de la forme $F(\cosh x, \sinh x)$

On utilise le changement de variable $t = e^x$ qui conduit à

$$\int F(\cosh x, \sinh x) dx = \int F\left(\frac{1+t^2}{2t}, \frac{1-t^2}{2t}\right) \frac{dt}{t}.$$

7.9.3 Fonctions de la forme $F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)$

Lorsque $ad - bc \neq 0$ on pose $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$ ce qui conduit à

$$\int F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right) dx = \int F\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{t^{n-1}dt}{(a-ct^n)^2}$$

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle.

7.9.4 Fonctions de la forme $F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

La mise sous forme canonique du polynôme du second degré (paragraphe 7.7.2) conduit aux trois formes suivantes

$$\int G\left(X, \sqrt{X^2-1}\right) dX, \ \int G\left(X, \sqrt{1-X^2}\right) dX, \ \int G\left(X, \sqrt{X^2+1}\right) dX$$

où G est aussi une fraction rationnelle. On utilise alors les changements de variable $X = \pm\cosh t$ ou $X = 1/\sin t$ dans le premier cas, $X = \cos t$ ou $X = \sin t$ dans le second et enfin $X = \sinh t$ ou $X = \tan t$ dans le troisième.

8. Equations différentielles linéaires du premier ordre

8.1 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Définition 8.1 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a, b et c des fonctions continues sur I. Une équation de la forme*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \qquad x \in I, \tag{8.1}$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre. La fonction y est l'inconnue de cette équation. Lorsque que $c(x) = 0$ pour tout $x \in I$, l'équation est dite homogène.

On appelle solution de l'équation (8.1) *toute fonction y dérivable dans I qui vérifie l'égalité $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ pour tout $x \in I$.*

L'équation est dite d'ordre 1 ou du premier ordre car seule la dérivée du premier ordre de y apparaît. L'équation est dite linéaire car, pour $x \in I$ fixé, l'application $(y(x), y'(x)) \mapsto a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ est linéaire (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

Exemples et contre–exemples. Les équations $y' + y = 0$ et $y' + y = \sin(x)$ sont des équations différentielles linéaires de premier ordre.
Les équations différentielles $|y'| + y = 0$ et $y' + y^2 = 0$ ne sont pas des équations linéaires. Les équations différentielles $y'' + 2y' + y = 0$ et $y'' + xy' = 0$ sont linéaires, mais ne sont pas de premier ordre elle dépendent de la dérivée seconde de y.

Si la fonction a ne s'annule pas sur I, nous pouvons réécrire l'équation précédente sous la forme

$$y'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}y(x) + \frac{c(x)}{a(x)} \qquad x \in I.$$

Proposition 8.1 *Soit α une fonction continue dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre*

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) \qquad x \in I. \tag{8.2}$$

Soit x_0 un point fixé de I. La fonction

$$y_{x_0}(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt\right)$$

est solution de (8.2)*. L'ensemble* $\mathcal{E}$ *des solutions de l'équation* (8.2) *est un espace vectoriel réel de dimension* 1 *qui admet* y_{x_0} *pour base. Nous avons donc*

$$\mathcal{E} = \Big\{ y \mid y = C y_{x_0},\ C \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}$ et que si y_1 et y_2 appartiennent à $\mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda y_1 + y_2 \in \mathcal{E}$ (en d'autres termes $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire).

Il est facile de vérifier que $\mathcal{E}$ (muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel) est un espace vectoriel réel. Montrons que tout élément y de $\mathcal{E}$ s'écrit sous la forme $y = C y_{x_0}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathcal{E}$. Étant donné que y_{x_0} ne s'annule pas sur I, la fonction $z = \frac{y}{y_{x_0}}$ est dérivable sur I et

$$z' = \frac{y'\, y_{x_0} - y'_{x_0}\, y}{(y_{x_0})^2} = \frac{\alpha y\, y_{x_0} - \alpha y_{x_0}\, y}{(y_{x_0})^2} = 0.$$

Donc z est constante sur I et la proposition est démontrée. ∎

Exemple. Résolvons l'équation différentielle $(x^2+1)y'(x) + xy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Cette équation s'écrit encore sous la forme

$$y'(x) = -\frac{x}{x^2+1} y(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{8.3}$$

car $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Toute solution de l'équation (8.3) est donc de la forme

$$y(x) = C \exp(-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Corollaire 8.1 *Soit* α *une fonction continue sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$*. Si* y *est solution de l'équation* (8.2) *et si* y *s'annule en un point* x_1 *de* I*, alors* y *est identiquement nulle sur* I*.*

Démonstration. Si y est solution de l'équation (8.2), d'après la proposition 8.1, $y(x) = C\exp\left(\int_{x_0}^x \alpha(t)\, dt\right)$, avec $C \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto C\exp\left(\int_{x_0}^x \alpha(t)\, dt\right)$ ne s'annule pas sur I. Comme $y(x_1) = 0$, $C = 0$ et $y \equiv 0$. ∎

8.2 Problème de Cauchy pour les équations différentielles homogènes

On appelle *problème de Cauchy* ou *problème de condition initiale* pour l'équation (8.2) le système

$$\begin{aligned} y'(x) &= \alpha(x)y(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

où $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Proposition 8.2 *Soit α une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Le problème de Cauchy* (8.4) *admet pour unique solution la fonction*

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\, dt\right).$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que y est une solution du problème de Cauchy (8.4). Supposons que ce problème admette deux solutions y_1 et y_2. Alors la fonction $z = y_1 - y_2$ vérifie

$$\begin{aligned} z'(x) &= \alpha(x)z(x) \\ z(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 8.1, $z \equiv 0$, ce qui prouve l'unicité. ∎

8.3 Équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre 1

Proposition 8.3 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a, b et c des fonctions continues sur I. Notons $\mathcal{E}(c)$ l'ensemble des solutions de l'équation*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \qquad x \in I, \tag{8.5}$$

et notons $\mathcal{E}(0)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (c'est à dire l'équation correspondant à $c = 0$).
(i) Si $y_1 \in \mathcal{E}(c)$, alors $\mathcal{E}(c) = \big\{y \text{ est dérivable dans } I \mid y = y_1 + z \quad \text{avec} \quad z \in \mathcal{E}(0)\big\}$.
(ii) Si de plus a ne s'annule pas dans I, alors la fonction

$$y_1(x) = y_{x_0}(x) \int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)y_{x_0}(t)} dt, \quad \text{avec} \quad y_{x_0}(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{-b(t)}{a(t)}\, dt\right), \tag{8.6}$$

est une solution particulière de l'équation (8.5).

Démonstration. (i) Soit y_1 un élément donné de $\mathcal{E}(c)$. Si y est une autre solution de l'équation (8.5), alors il est facile de vérifier que $y_1 - y \in \mathcal{E}(0)$. On a donc

$$\mathcal{E}(c) \subset \big\{y \text{ est dérivable dans } I \mid y = y_1 + z \quad \text{avec} \quad z \in \mathcal{E}(0)\big\}.$$

Montrons l'inclusion inverse. Si $y = y_1 + z$ avec $z \in \mathcal{E}(0)$, on vérifie facilement que y est solution de l'équation (8.5).
(ii) La fonction y_1 définie en (8.6) est dérivable sur I et

$$y_1'(x) = y_{x_0}'(x) \int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)y_{x_0}(t)} dt + \frac{c(x)}{a(x)} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Nous avons donc

$$a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = (a(x)y_{x_0}'(x) + b(x)y_{x_0}(x)) \int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)y_{x_0}(t)} dt + c(x) = c(x).$$

La proposition est donc démontrée. ∎

Remarque. Si une équation différentielle non homogène admet une solution évidente, il est préférable d'utiliser cette solution particulière pour décrire $\mathcal{E}(c)$ à l'aide du point (i), plutôt que de calculer la solution particulière donnée en (8.6). Par exemple l'équation $y' + xy = x$ admet $y(x) = 1$ comme solution évidente. L'ensemble des solutions de cette équation est donc

$$\left\{1 + C\, e^{-\frac{x^2}{2}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une solution particulière de l'équation (8.5) peut aussi être obtenue par la méthode connue sous le nom de *méthode de la variation de la constante* décrite dans la section suivante.

Corollaire 8.2 *Soient a, b, c des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si a ne s'annule pas dans I, alors le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} &a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned} \tag{8.7}$$

admet pour unique solution la fonction

$$y_1(x) = y_{x_0}(x) \int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)y_{x_0}(t)} dt, \quad \text{avec} \quad y_{x_0}(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{-b(t)}{a(t)}\, dt\right).$$

Démonstration. Nous avons $y_1(x_0) = y_{x_0}(x_0) = y_0$. Remarquons que $a(x)y_{x_0}'(x) + b(x)y_{x_0}(x) = 0$ dans I. Donc

$$\begin{aligned} &a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) \\ &= (a(x)y_{x_0}'(x) + b(x)y_{x_0}(x)) \int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)y_{x_0}(t)} dt + a(x)\, y_{x_0}(x)\, \frac{c(x)}{a(x)y_{x_0}(x)} = c(x). \end{aligned}$$

∎

Corollaire 8.3 *Soient a, b, c_1, et c_2 des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{E}(c_1)$ l'ensemble des solutions de l'équation*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x) \qquad x \in I, \tag{8.8}$$

et $\mathcal{E}(c_2)$ l'ensemble des solutions de l'équation

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_2(x) \qquad x \in I. \tag{8.9}$$

Alors

$$\mathcal{E}(c) = \{y \text{ est dérivable dans } I \mid y = y_1 + y_2 \text{ avec } y_1 \in \mathcal{E}(c_1) \text{ et } \quad y_2 \in \mathcal{E}(c_2)\}.$$

Cette identité est souvent écrite sous la forme $\mathcal{E}(c) = \mathcal{E}(c_1) + \mathcal{E}(c_2)$.

Démonstration. La preuve s'obtient facilement à l'aide de l'assertion (i) de la proposition 8.3.

■

8.4 Méthode de la variation de la constante

Le but de cette section est de trouver une solution particulière de l'équation (8.5) à partir de la connaissance d'une solution particulière non nulle de l'équation homogène associée :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad x \in I. \tag{8.10}$$

Nous supposons de plus que a ne s'annule pas sur I. Soit z une solution de (8.10) ne s'annulant pas sur I. Si y est une solution de (8.5), alors la fonction $K(x) = \frac{y(x)}{z(x)}$ est dérivable. Nous avons donc

$$y'(x) = K'(x)z(x) + K(x)z'(x).$$

Comme $az' + bz = 0$, et

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = a(x)\left(K'(x)z(x) + K(x)z'(x)\right) + b(x)K(x)z(x) = c(x),$$

nous avons

$$a(x)K'(x)z(x) = c(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in I.$$

Étant donné que $a\,z$ ne s'annule pas sur I, nous avons

$$K(x) = k_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)z(t)}\,dt,$$

où x_0 est un point particulier de I. Les solutions de l'équation (8.5) sont donc de la forme

$$y(x) = k_0\,z(x) + z(x)\int_{x_0}^{x} \frac{c(t)}{a(t)z(t)}\,dt.$$

Exemple 1. Résoudre $y' - \frac{x}{x^2-1}y = 1$ sur $]1, +\infty[$.

Nous commençons par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{x}{x^2-1}y = 0$ sur $]1, +\infty[$. La fonction $\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ est une primitive de $\frac{x}{x^2-1}$ sur $]1,+\infty[$. Les solutions de l'équation homgènes sont donc de la forme

$$y(x) = C \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x^2-1)\right) = C\sqrt{x^2-1},$$

avec $C \in R$.

Nous recherchons ensuite une solution particulière de l'équation non homogène de la forme $y(x) = C(x)\sqrt{x^2-1}$. En écrivant que y vérifie l'équation non homogène, nous obtenons

$$C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Nous avons donc $C(x) = \arg\cosh(x)$ et $y(x) = \arg\cosh(x)\sqrt{x^2-1}$. Les solutions de l'équation non homogène sont donc de la forme

$$y(x) = C\sqrt{x^2-1} + \arg\cosh(x)\sqrt{x^2-1}.$$

Exemple 2. Résoudre $y' - \frac{x}{x^2-1}y = 1$ sur $]-1,1[$.

Par un calcul analogue à celui de l'exemple précédent, nous montrons que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = C\sqrt{1-x^2}$.
Recherchant une solution de l'équation non homogène de la forme $y(x) = C(x)\sqrt{1-x^2}$, nous obtenons $C'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $C(x) = \arcsin(x)$. Les solutions de l'équation non homogène sont donc de la forme

$$y(x) = C\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\sqrt{1-x^2} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

8.5 Raccord de deux solutions.

8.5.1 Un exemple élémentaire

Nous souhaitons résoudre l'équation différentielle $xy'(x) - 2y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Les théorèmes précédents ne s'appliquent pas car la fonction $a(x) = x$ s'annule en zéro. Pour résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$, nous allons déterminer les solutions sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,\infty[$ et essayer de raccorder en $x = 0$ les solutions ainsi trouvées pour obtenir une solution définie sur $\mathbb{R}$. Les solutions sur $]-\infty,0[$ sont de la forme

$$y_1(x) = C_1 x^2 \quad \text{avec} \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

et les solutions sur $]0,\infty[$ sont de la forme

$$y_2(x) = C_2 x^2 \quad \text{avec} \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Quels que soient C_1 et C_2, y_1 admet une limite à gauche en zéro, y_2 admet une limite à droite en zéro et ces limites sont égales à 0. La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si} \quad x \in]-\infty,0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ y_2(x) & \text{si} \quad x \in]0,\infty[\end{cases}$$

est continue dans $\mathbb{R}$. De plus, elle est dérivable en $x=0$, car

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{y(h)-y(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{C_1h^2}{h-0}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{y(h)-y(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{C_2h^2}{h-0}=0.$$

La fonction y' définie par

$$y'(x)=\begin{cases} y_1'(x)=2C_1\,x & \text{si} \quad x\in]-\infty,0[\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ y_2'(x)=2C_2\,x & \text{si} \quad x\in]0,\infty[,\end{cases}$$

est également continue dans $\mathbb{R}$. De plus y vérifie l'équation différentielle $xy'(x)-2y(x)=0$ dans $\mathbb{R}$, car l'équation est vérifiée dans $]-\infty,0[$, $]0,\infty[$, et en $x=0$ (car $0y'(0)-2y(0)=0$).

Cet exemple montre que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 peut être un espace vectoriel de dimension >1 (ici de dimension 2).

8.5.2 Un deuxième exemple

Nous souhaitons résoudre l'équation différentielle linéaire

$$x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=x^2$$

dans $]0,+\infty[$, en raccordant une solution définie sur $]0,1[$ avec une solution définie sur $]1,+\infty[$.

Dans $I_1=]0,1[$, les solutions de l'équation homogène $x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=0$ sont de la forme

$$y_1(x)=C_1\frac{x^2}{1-x^2} \quad \text{avec} \quad C_1\in\mathbb{R}.$$

La méthode de la variation de la constante permet de montrer que, dans I_1, les solutions de $x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=x^2$ sont de la forme

$$y_1(x)=\frac{\ln(x)x^2}{x^2-1}+\frac{C_1x^2}{1-x^2} \quad \text{avec} \quad C_1\in\mathbb{R}.$$

Dans $I_2=]1,\infty[$, les solutions de l'équation homogène $x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=0$ sont de la forme

$$y_2(x)=C_2\frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{avec} \quad C_2\in\mathbb{R},$$

et les solutions de $x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=x^2$ sont de la forme

$$y_2(x)=\frac{\ln(x)x^2}{x^2-1}+\frac{C_2x^2}{x^2-1} \quad \text{avec} \quad C_2\in\mathbb{R}.$$

Recherchons maintenant les conditions que doivent vérifier C_1 et C_2 pour que ces deux solutions puisse être raccorder de manière continue. On vérifie facilement que si $C_1=0$ alors

$$\lim_{x\to 1^-}y_1(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x)x^2}{x^2-1}=\frac{1}{2},$$

et que si $C_1 \neq 0$ alors

$$\lim_{x \to 1^-} y_1(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{\ln(x)x^2}{x^2-1} + \frac{C_1 x^2}{1-x^2} \right) = +\infty \times \mathrm{signe}(C_1).$$

Il faut donc choisir $C_1 = 0$ pour que y_1 admette une limite à gauche en 1. De même, y_2 admet une limite à droite en 1 si et seulement si $C_2 = 0$. Et dans ce cas la limite est $\frac{1}{2}$. La fonction y définie dans $]0, \infty[$ par

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)x^2}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1, \end{cases}$$

est dérivable dans $]0, \infty[$ et elle vérifie l'équation différentielle dans $]0, \infty[$.

8.6 Applications des équations différentielles.

Les équations différentielles permettent de modéliser des phénomènes physiques, chimiques, économiques. Donnons quelques exemples élémentaires.

Exemple 1. *Refroidissement d'un corps.* Un corps C est placé dans une pièce dont la température de l'air est constante et égale à T_0. La température initiale du corps θ_0 est supérieure à T_0. On suppose que le volume d'air est suffisant pour que la température de la pièce reste constante. La température $\theta(t)$ du corps C sera une fonction décroissante du temps. En première approximation, on peut supposer que la variation de θ (c'est à dire $\theta'(t)$) est proportionnelle à l'écart de température $\theta(t) - T_0$. Sachant que $T_0 = 20^o$, $\theta_0 = 100^o$, et que $\theta(20) = 60^o$ (le temps est ici exprimé en minutes), calculer le temps pour lequel la température de C sera égale à 30^o.

Exemple 2. *Circuit électrique.* Dans un circuit électrique constitué d'une résistance R et d'une inductance L, l'intensité i du courant électrique et la différence de potentiel E aux bornes du circuit sont reliées par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E(t)}{L}.$$

Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit dans le cas où $E(t) = E_0$ est constant et $i(0) = I_0$.

Exemple 3. *Un question de géométrie.* Trouver la courbe du plan passant par le point $(0, -2)$ et telle que le coefficient directeur de la tangente en chaque point de la courbe soit égal à trois fois l'ordonnée en ce point.

9. Courbes planes paramétrées

9.1 Arcs de courbes paramétrés

Afin d'étudier des courbes planes telles que le cercle, la parabole, l'ellipse ou bien le lemniscate de Bernouilli, plusieurs approches sont possibles. L'approche géométrique, la plus ancienne de toutes, consiste à décrire une courbe par un procédé de construction : le cercle est le lieu des points du plan situés à une même distance (le rayon r) d'un point donné (le centre (a, b)). Une seconde approche (Descartes) consiste à décrire la courbe en question par une équation : le cercle est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. La troisième approche, celle que nous allons étudier ici, consiste à décrire une courbe par une paramétrisation : le cercle devient l'ensemble des points $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ définis par $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + r\sin t$, $0 \le t < 2\pi$.

Définition 9.1 *On appelle arc de courbe paramétré une application $f : I \to \mathbb{R}^2$ définie sur un intervalee I de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$ on note $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$: f_1 et f_2 sont les applications coordonnées associées à f. L'arc géométrique associé à f est l'ensemble*

$$f(I) = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in I \right\}.$$

Il faut bien faire la différence entre arc de courbe paramétré et arc géométrique. D'un point de vue cinématique, l'arc géométrique est le lieu du mouvement alors que l'arc paramétré est une loi horaire ayant pour support ce lieu géométrique.

Exemple 9.1

1. *La droite vectorielle $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est paramétrée par $x = -bt$, $y = at$, $t \in \mathbb{R}$,*
2. *La droite affine $ax+by+c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est paramétrée par $x = x_0-bt$, $y = y_0 + at$, $t \in \mathbb{R}$, où (x_0, y_0) est un point de la droite ($ax_0 + by_0 + c = 0$),*
3. *La demi-droite $y = x$, $x \ge 0$, est paramétrée par $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$,*
4. *Le cercle $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ est paramétré par $x(t) = a + r\cos t$, $y(t) = b + r\sin t$, $0 \le t < 2\pi$, mais aussi par $x(t) = a + r(1 - t^2)/(1 + t^2)$, $y(t) = b + 2rt/(1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; dans ce second cas l'arc géométrique correspondant est le cercle privé du point $(a - r, b)$. Ce point est obtenu comme limite lorsque $t \to \pm\infty$,*

5. *L'ellipse*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
est paramétrée par $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $0 \leq t < 2\pi$,
6. *L'arc d'hyperbole* $y^2 - x^2 = 1$ *situé dans le demi plan* $y > 0$ *est paramétré par* $x(t) = \sinh t$, $y(t) = \cosh t$, $t \in \mathbb{R}$,
7. *La parabole* $y - x^2 = 0$ *est donnée par* $y(t) = t^2$, $x(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$,
8. *Plus généralement, l'arc géométrique décrit par* $y = g(x)$, $x \in I$, *est paramétré par* $y(t) = g(t)$, $x(t) = t$, $t \in I$.

9.2 Dérivées, développements limités

Définition 9.2 *(Limite, continuité, dérivabilité) Soit* $f = (f_1, f_2)$ *un arc de courbe paramétré défini sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$.
Nous dirons que (ℓ_1, ℓ_2) *est la limite de* f *quand* t *tend vers* $t_0 \in I$ *lorsque* ℓ_1 *est la limite de* f_1 *en* t_0 *et* ℓ_2 *la limite de* f_2 *en* t_0.
Nous dirons que f *est continu en* $t_0 \in I$ *lorsque* f_1 *et* f_2 *sont continues en* t_0.
Nous dirons que f *est dérivable en* $t_0 \in I$ *lorsque* f_1 *et* f_2 *sont dérivables en* t_0. *La dérivée de* f *en* t_0 *est* $f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0)) \in \mathbb{R}^2$.
De la même manière, la dérivée n*-ième de* $f = (f_1, f_2)$ *en* t_0, *si elle existe, est le vecteur* $f^{(n)}(t_0) = (f_1^{(n)}(t_0), f_2^{(n)}(t_0))$.

Avec ces définitions on a :

Théorème 9.1 *(Formule de Taylor-Young) Soient* I *un intervalle ouvert,* $t_0 \in I$ *et* f *un arc de courbe paramétré* n *fois dérivable dans* I *tel que* $f^{(n)}$ *soit continu en* t_0. *Alors il existe une fonction vectorielle* $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^2$ *telle que*
$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(t_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + h^n \varepsilon(h)$$
avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = (0,0)$. *On dit alors que* $\sum_{k=0}^{n} h^k f^{(k)}(t_0)/k!$ *est un développement limité de* f *en* t_0 *à l'ordre* n.

Exemple 9.2 $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, *possède le d.l. en* 0 *à l'ordre 2 :*
$$f(t) = (1,0) + t(0,1) - \frac{t^2}{2}(1,0) + t^2(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$$
avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = (0,0)$.

9.3 Tangente à un arc de courbe paramétré

9.3.1 Droites du plan

Une droite affine est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient une équation du type

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'équation de cette droite n'est pas unique, elles sont toutes du type $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ avec $\lambda \neq 0$.

Insistons sur le fait que l'équation $ax+by+c = 0$ ne définit pas une droite lorsque $a = b = 0$. C'est l'ensemble vide si $c \neq 0$ et le plan tout entier sinon.

L'équation d'une droite peut aussi s'écrire de façon paramétrique (exemple 9.1) : $x = \alpha t + x_0$, $y = \beta t + y_0$, $t \in \mathbb{R}$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Cette équation n'est pas, elle non plus, unique : on obtient le même ensemble de points paramétré par $x = \alpha' t + x'_0$, $y = \beta' t + y'_0$, $t \in \mathbb{R}$, avec $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$, si et seulement si $\alpha' = \lambda\alpha$, $\beta' = \lambda\beta$ et $\beta' x'_0 - \alpha' y'_0 = \lambda(\beta x_0 - \alpha y_0)$ pour un scalaire $\lambda \neq 0$.

La tangente à une courbe en un point M se définit comme la position limite de la droite passant par M et un point voisin M' pris lui aussi sur la courbe lorsque $M' \to M$. Il faut donc définir ce que l'on entend par limite d'une famille de droites. Compte tenu de la non unicité de l'équation définissant une droite on obtient la définition suivante :

Définition 9.3 *Notons $D(s)$ la droite d'équation $a(s)x + b(s)y + c(s) = 0$ et par D la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Nous dirons que $D(s) \to D$ lorsque $s \to s_0$ lorsqu'il existe, pour tout s, un scalaire $\lambda(s) \neq 0$ tel que $\lambda(s)a(s) \to a$, $\lambda(s)b(s) \to b$ et $\lambda(s)c(s) \to c$ quand $s \to s_0$.*

9.3.2 Tangente en un point d'un arc de courbe paramétré

Définition 9.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et soit $t_0 \in I$. Supposons que les points $f(t_0)$ et $f(t)$ soient distincts pour tout $t \neq t_0$ et proche de t_0. Il existe alors une unique droite passant par ces deux points, nous la notons D_{t,t_0}. Nous dirons que f admet une tangente en t_0 lorsque cette droite admet une position limite lorsque $t \to t_0$.*

La droite D_{t,t_0} admet l'équation

$$(x - f_1(t_0))(f_2(t) - f_2(t_0)) - (y - f_2(t_0))(f_1(t) - f_1(t_0)) = 0$$

qui est équivalente à

$$(x - f_1(t_0))\frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0} - (y - f_2(t_0))\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Supposons que f soit dérivable en t_0 et que $f'(t_0) \neq (0, 0)$. En passant à la limite dans l'équation précédente on obtient l'équation de la tangente :

$$(x - f_1(t_0))f'_2(t_0) - (y - f_2(t_0))f'_1(t_0) = 0.$$

Noter que l'hypothèse $f'(t_0) \neq (0,0)$ implique $f(t_0) \neq f(t)$ pour tout t au voisinage de t_0. On a donc prouvé le théorème suivant :

Théorème 9.2 *Soient I un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et f un arc de courbe paramétré dérivable en t_0 et tel que $f'(t_0) \neq (0,0)$. On dit alors que $f(t_0)$ est un point régulier de la courbe. Elle possède alors une tangente en $f(t_0)$ qui a pour équation*

$$(x - f_1(t_0))f_2'(t_0) - (y - f_2(t_0))f_1'(t_0) = 0.$$

Exemple 9.3
1. *La droite affine $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ est sa propre tangente.*
2. *Le cercle $x^2 + y^2 = 1$, paramétré par $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$, admet pour tangente au point $(1,0)$ ($t = 0$) la droite d'équation $x = 1$.*
3. *Le cercle $x^2 + y^2 = 1$, paramétré par $x(t) = (1-t^2)/(1+t^2)$, $y(t) = 2t/(1+t^2)$, admet pour tangente au point $(1,0)$ ($t = 0$) la droite d'équation $x = 1$.*
4. *L'arc géométrique décrit par $y = g(x)$, $g : I \to \mathbb{R}$, paramétré par $y(t) = g(t)$, $x(t) = t$, admet au point $(t, g(t))$ la tangente d'équation $y = g'(t)(x - t) + g(t)$.*

Remarque 9.1
1. *On peut montrer que le concept de tangente ne dépend pas de la paramétrisation mais seulement de l'arc géométrique (voir l'exemple 9.3).*
2. *L'arc de courbe paramétré $x(t) = t^3$, $y(t) = |t|^3$, $t \in \mathbb{R}$, correspond à l'arc géométrique $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Il ne possède pas de tangente en $(0,0)$ ($t = 0$). Par contre $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1 et ont pour dérivées en $t = 0$: $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. L'existence d'un « vecteur vitesse » n'implique donc pas celle d'une tangente lorsque ce « vecteur vitesse » est nul ! Nous allons donc nous intéresser de plus près à ces points.*

9.3.3 Tangente en un point stationnaire

Définition 9.5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée dérivable sur I. Un point $f(t)$, $t \in I$, est appelé point stationnaire de la courbe lorsque $f'(t) = (0,0)$.*

Soient $t \in I$ et $t + h \in I$ deux points tels que $f(t) \neq f(t+h)$ pour tout $h \neq 0$ voisin de 0. Nous allons rechercher la position limite, quand $h \to 0$, de la droite $D_{t+h,t}$ d'équation

$$(x - f_1(t))(f_2(t+h) - f_2(t)) - (y - f_2(t))(f_1(t+h) - f_1(t)) = 0,$$

lorsque $f'(t) = (0,0)$. Supposons que f soit k fois dérivable dans I, avec $k > 1$, qu'il existe $1 < r \leq k$ tel que $f^{(r)}(t) \neq (0,0)$ et notons p le plus petit entier pour lequel $f^{(p)}(t) \neq (0,0)$. La formule de Taylor-Young (théorème 9.1) donne

$$f(t+h) = f(t) + f^{(p)}(t)\frac{h^p}{p!} + h^p\varepsilon(h)$$

avec $\lim_0 \varepsilon = (0,0)$. En passant à la limite dans l'équation suivante de $D_{t+h,t}$

$$p!\,(x - f_1(t))\frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h^p} - p!\,(y - f_2(t))\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h^p} = 0,$$

nous obtenons l'équation de la tangente à la courbe au point $f(t)$:

$$(x - f_1(t))f_2^{(p)}(t) - (y - f_2(t))f_1^{(p)}(t) = 0.$$

Exemple 9.4 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (t^2, t^3)$. En $t = 0$ nous avons*

$$f(0) = (0,0), \quad f'(0) = (0,0) \quad et \quad f''(0) = (2,0).$$

La tangente à la courbe au point $(0,0)$ est donc la courbe d'équation $y = 0$.

9.4 Position de la courbe par rapport à sa tangente

Soit f un arc de classe $C^k(I)$: f est dérivable jusqu'à l'ordre k dans I et $f^{(k)}$ est continue sur I. Soit $t_0 \in I$, et supposons qu'il existe un plus petit entier $p \in [1,k]$ et tel que $f^{(p)}(t_0) \neq (0,0)$. Dans ce cas, pour $q \leq k$, nous avons

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(t_0) \ + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(t_0) + \frac{h^q}{q!}f^{(q)}(t_0) \quad + h^q\varepsilon(h)$$

$$\text{avec } \lim_0 \varepsilon = (0,0).$$

Supposons que, pour $k \in \{p+1, \cdots, q-1\}$, les vecteurs $f^{(k)}(t_0)$ soient colinéaires au vecteur directeur $f^{(p)}(t_0)$ de la tangente à la courbe en $f(t_0)$ et que le vecteur $f^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$. Dans ce cas, il existe des scalaires $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{q-1}$ tels que $f^{(k)}(t_0) = \lambda_k f^{(p)}(t_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&f(t_0 + h)\\
&= f(t_0) + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(t_0) \ + \sum_{k=p+1}^{q-1} \lambda_k \frac{h^k}{k!}f^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!}f^{(q)}(t_0) \quad + h^q\varepsilon(h)\\
&= f(t_0) + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(t_0) \left(1 + \lambda_{p+1}\frac{hp!}{(p+1)!} + \lambda_{p+2}\frac{h^2p!}{(p+2)!} + \cdots + \lambda_{q-1}\frac{h^{q-1-p}p!}{(q-1)!}\right)\\
&\qquad + \frac{h^q}{q!}f^{(q)}(t_0) \quad + h^q\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = (0,0).
\end{aligned}$$

Posons $M(t_0) = f(t_0)$ et introduisons le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$. Notons $(X(t_0+h), Y(t_0+h))$ les coordonnées de $f(t_0+h)$ dans ce nouveau repère. Nous avons

$$\begin{aligned}
X(t_0 + h) &= \frac{h^p}{p!}\left(1 + \lambda_{p+1}\frac{hp!}{(p+1)!} + \lambda_{p+2}\frac{h^2p!}{(p+2)!} + \cdots + \lambda_{q-1}\frac{h^{q-1-p}p!}{(q-1)!} + p!h^{q-p}\varepsilon_1(h)\right)\\
Y(t_0 + h) &= \frac{h^q}{q!}\left(1 + q!\varepsilon_2(h)\right),
\end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi, pour $|h|$ suffisamment petit, les coordonnées de $f(t_0+h)$ dans ce repère sont du signe respectivement du h^p et h^q puisque les autres termes deviennent négligeables lorsque h est proche de 0.
Pour placer le point $M(t_0+h)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$, quatre cas sont à distinguer en fonction de la parité de p et de q.

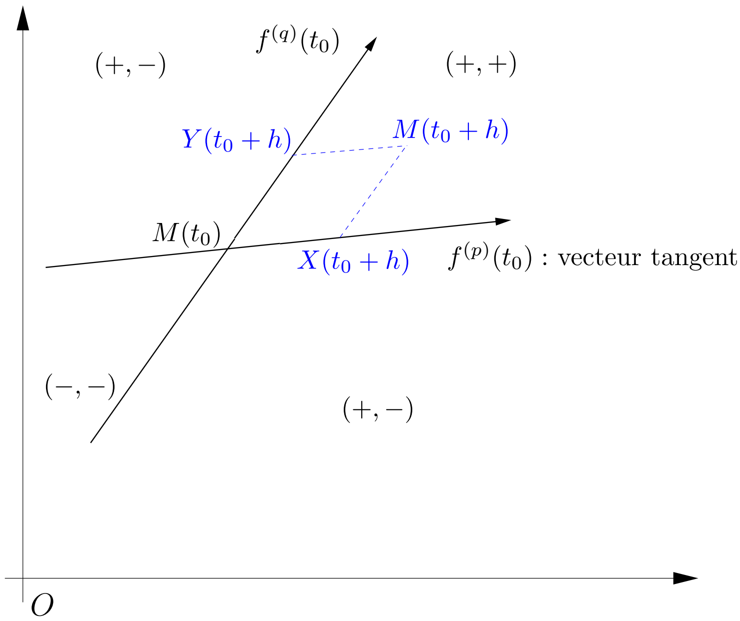
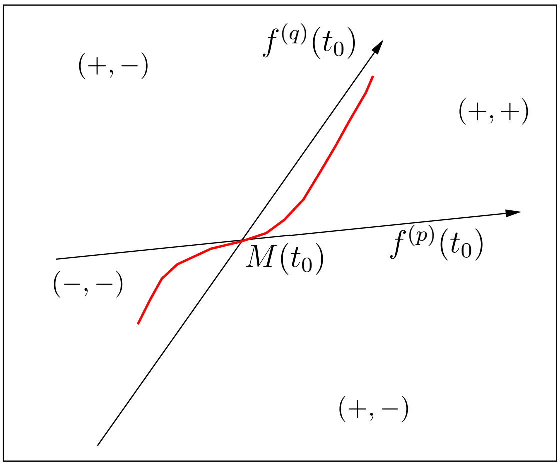


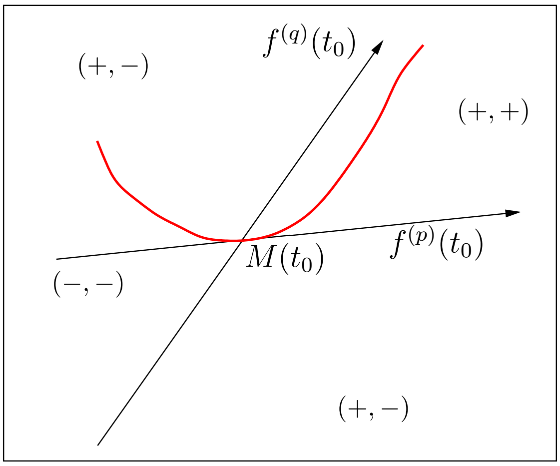
FIG. 9.1 – Le point $M(t_0+h)$ est à placer dans un des 4 quadrangles

Point d'inflexion.



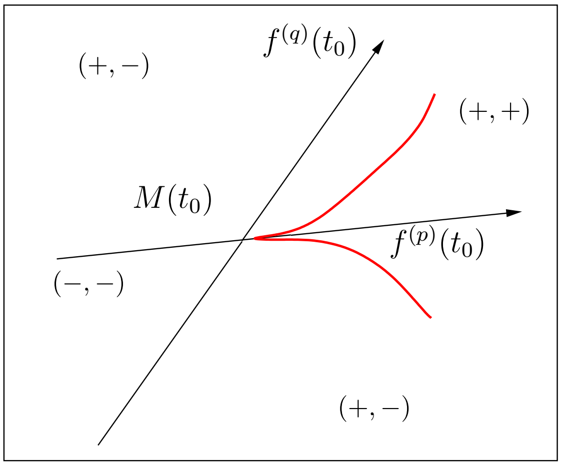
Si p et q sont impairs alors h^p et h^q sont de même signe que h.
Lorsque h est négatif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(-,-)''$.
Lorsque h est positif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(+,+)''$.
La tangente traverse donc le support de l'arc. On dit que le point $M(t_0)$ est un **point d'inflexion.**

Point ordinaire. **Si p est impair et q est pair** alors h^p est du signe de h et h^q



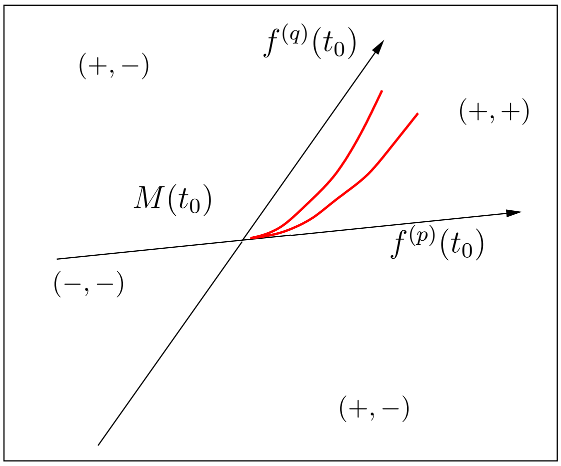
est toujours positif.
Lorsque h est négatif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(-,+)''$.
Lorsque h est positif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(+,+)''$.
Le support reste toujours au dessus de sa tangente. On dit que le point $M(t_0)$ est un **point ordinaire.**

Point de rebroussement de première espèce. **Si p est pair et q est impair** alors h^p est toujours positif et h^q est du signe de h.
Lorsque h est négatif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(+,-)''$.
Lorsque h est positif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(+,+)''$.



Le support traverse sa tangente. On dit que le point $M(t_0)$ est un **point de rebroussement de première espèce.**

Point de rebroussement de seconde espèce. **Si p est pair et q est pair**



alors h^p et h^q sont toujours positif.
Lorsque h est négatif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(+,+)''$.
Lorsque h est positif, le point $M(t_0+h)$ est dans le quadrangle $''(+,+)''$.
Le support ne traverse pas sa tangente. On dit que le point $M(t_0)$ est un **point de rebroussement de seconde espèce.**

9.5 Branches infinies

Définition 9.6 *Soit (I,f) un arc paramétré. L'arc (I,f) admet une branche infinie en $t_0 \in \overline{I}$ lorsque*

$$\lim_{t\to t_0}(f_1^2(t)+f_2^2(t)) = +\infty.$$

Si

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = \ell_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} f_2(t) = \pm\infty,$$

la droite d'équation $x = \ell_1$ est asymptote à la courbe paramétrée (I, f).
Si

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} f_2(t) = \ell_2 \in \mathbb{R},$$

la droite d'équation $y = \ell_2$ est asymptote à la courbe paramétrée (I, f).
Examinons maintenant le cas où

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} f_2(t) = \pm\infty.$$

Supposons que l'on ait

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to t_0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \beta \in \mathbb{R}.$$

Lorsque

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} (f_1(t) - \alpha f_2(t)) = \gamma \in \mathbb{R},$$

alors la droite d'équation $x = \alpha y + \gamma$ est asymptote à la courbe paramétrée (I, f).
Lorsque

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \beta \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} (f_2(t) - \beta f_1(t)) = \gamma \in \mathbb{R},$$

alors la droite d'équation $y = \beta x + \gamma$ est asymptote à la courbe paramétrée (I, f).
Remarque. Lorsque

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} f_2(t) = \pm\infty,$$

la courbe paramétrée (I, f) n'admet pas nécessairement une droite pour asymptote en $t = t_0$. Les conditions données ci-dessus sont des conditions suffisantes pour l'existence d'une droite asymptote. Par exemple, la courbe paramétrée $(\mathbb{R}^*, f)$ définie par $f(t) = (t^2 + \frac{2}{t}, t + \frac{1}{t^2})$ est asymptote à la courbe d'équation $y = x^2$ en $t = \infty$ et en $t = -\infty$.

9.6 Exemple d'étude d'un arc paramétré

Dans ce paragraphe, nous noterons (x, y) les fonctions composantes de f. Le plan général de l'étude est le suivant.

1 – On précise le domaine de définition de f s'il n'est pas explicitement donné.

2 – On cherche à réduire l'intervalle de définition de l'arc en utilisant des propriétés particulières des fonctions coordonnées que nous noterons ici x et y : recherche éventuelle de périodicité de f, recherche éventuelle de symétries.

3 - Calcul des dérivées x' et y', tableau des variations.

4 – Étude des points stationnaires.

5 – Étude des branches infinies.

6 – Recherche éventuelle des points doubles.

Traitons un cas particulier. Considérons l'arc paramétré (I, f), avec $f = (x, y)$, $I = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, les fonctions coordonnées x et y étant définies par

$$x(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1}.$$

La fonction f est indéfiniment dérivable dans I, et

$$x'(t) = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}, \qquad y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.$$

Le tableau des variations est

t	$-\infty$		-1^-	-1^+		0		1^-	1^+		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$			$+$	0	$-$			$-$	$-\frac{8}{9}$	$-$	
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	1
$y'(t)$		$+$			$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Points stationnaires. Le point $f(0) = (-1, 0)$ est un point stationnaire. On fait un développement limité de f pour déterminer le comportement de la courbe au voisinage du point $f(0)$. Nous avons

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3\varepsilon(t), \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Les vecteurs $f^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc $p = 2$ est pair et $q = 3$ est impair. Le point $f(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. L'équation de la tangente est

$$(x - (-1)) \times (-1) - (y - 0) \times (-2) = 0, \quad \text{soit encore } y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Branches infinies. Nous avons une branche infinie au voisinage de $t = 1$, $t = -1$, $t = \infty$, et $t = -\infty$.

1 – En $+\infty$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, et la droite verticale $x = 1$ est asymptote au support.

De même en $-\infty$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 1$, et la droite verticale $x = 1$ est asymptote au support.

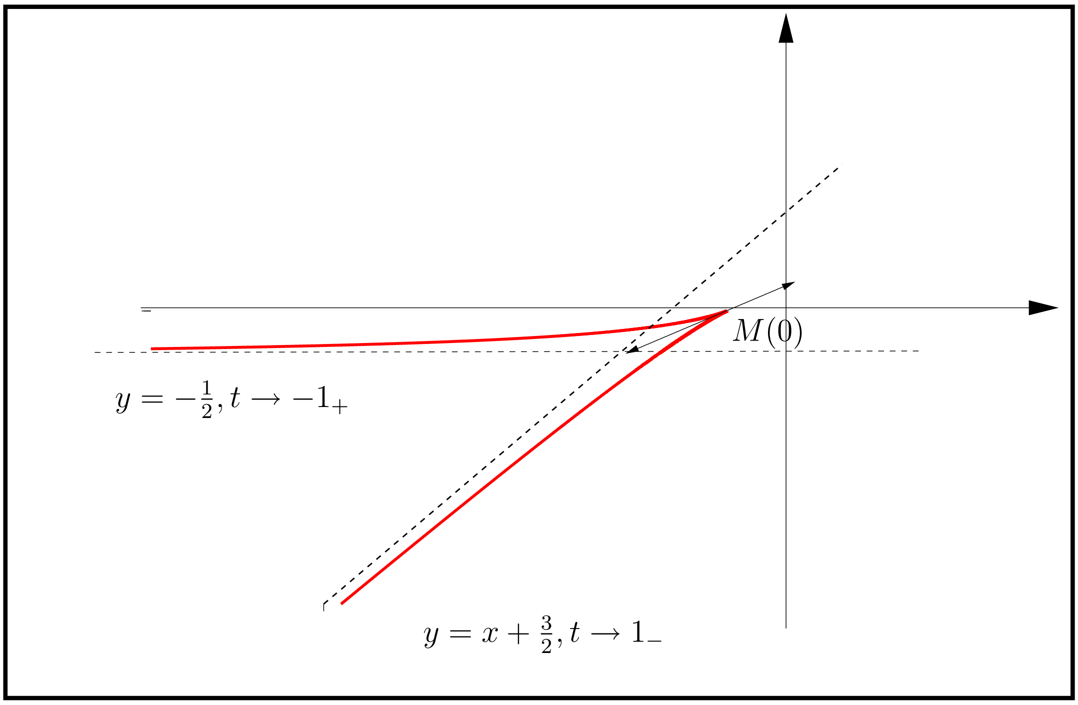


Fig. 9.2 – Tracé sur $]-1,1[$

2 – En -1, $\lim_{t\to -1} y(t) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{t\to -1^+} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to -1^-} x(t) = -\infty$. La droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote au support.

3 – En 1, $\lim_{t\to 1^+} y(t) = \lim_{t\to 1^+} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty$. On étudie la limite du quotient $\frac{y(t)}{x(t)}$:

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2(t+1)}{t^2+1} = 1.$$

On étudie la limite de $y - x$. Nous avons

$$y(t) - x(t) = \frac{t^2}{t-1} - \frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{t^2+t+1}{t+1}.$$

Ainsi, $\lim_{t\to 1} y(t) - x(t) = \frac{3}{2}$. La droite $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote au support au voisinage de 1. Pour connaître la position du support par rapport à son asymptote, on étudie le signe de

$$y(t) - x(t) - \frac{3}{2} = \frac{t^2+t+1}{t+1} - \frac{3}{2} = \frac{2t^2-t-1}{2(t+1)} = \frac{2(t-1)(t+\frac{1}{2})}{2(t+1)}.$$

Donc lorsque $t < 1$, le support est au dessous de son asymptote, et lorsque $t > 1$ il est au dessus.

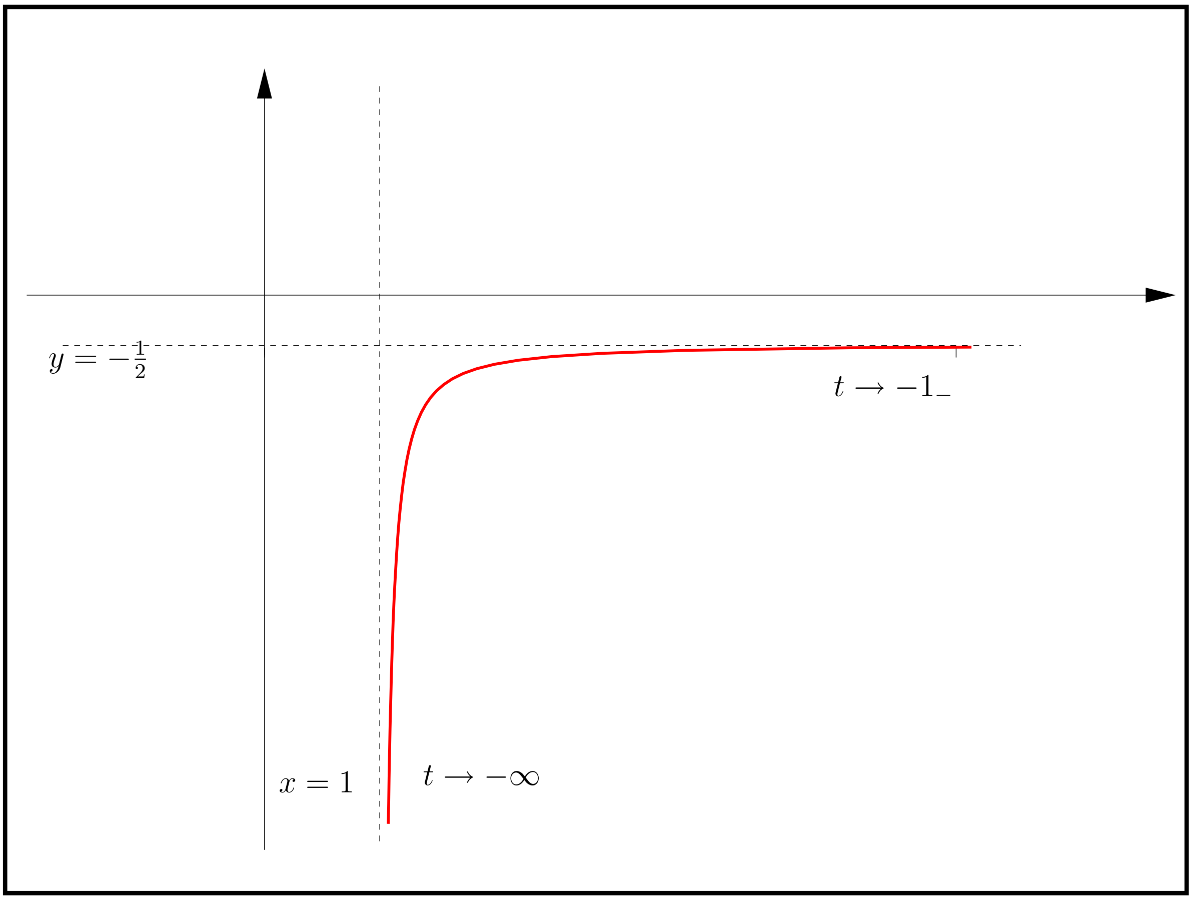


FIG. 9.3 – Tracé sur $]-\infty, -1[$

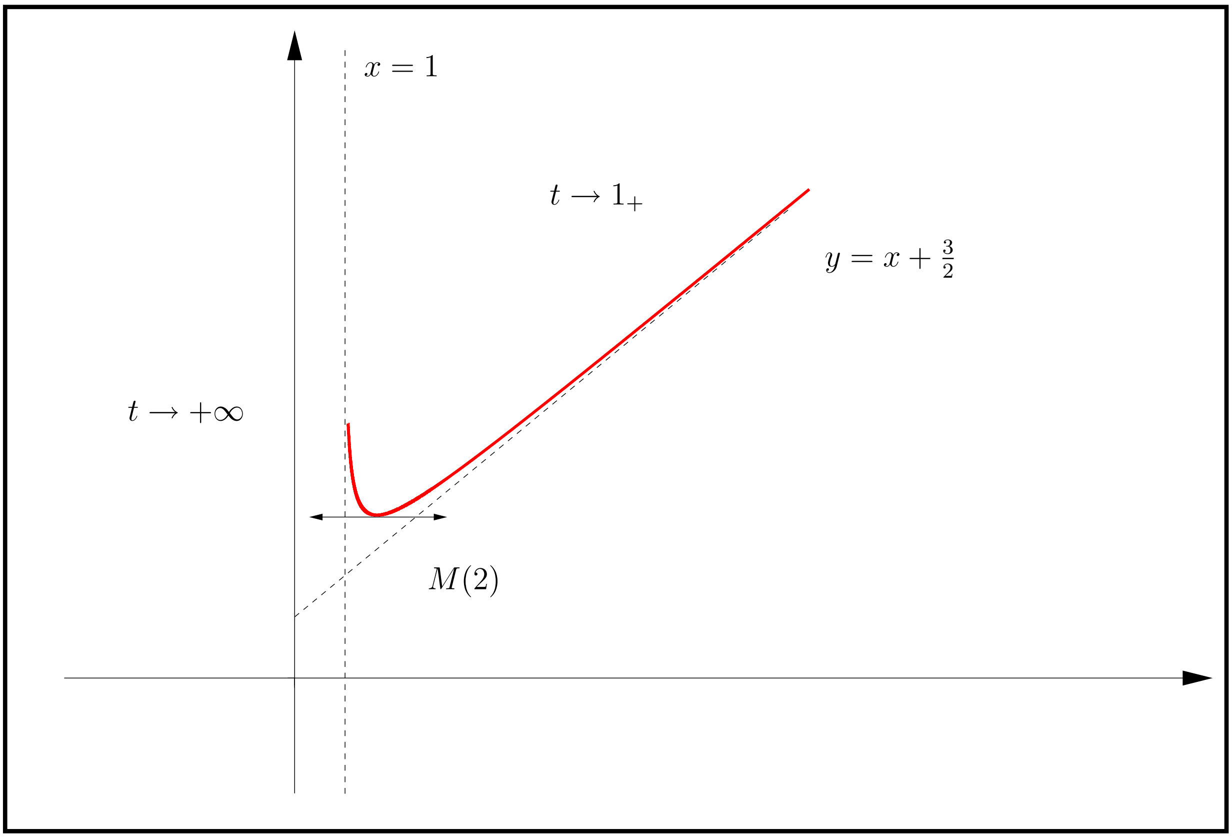


Fig. 9.4 – Tracé sur $]1, +\infty[$.

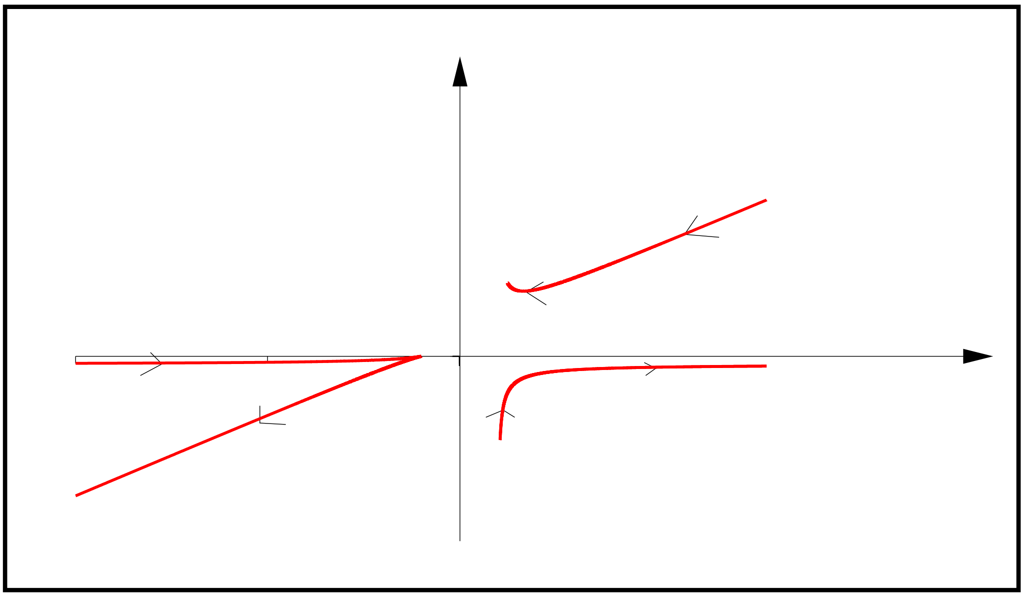


Fig. 9.5 – Tracé sur le domaine de définition.

Index