Modélisation mathématique en finance
4ème semestre de la Chaire UNESCO au LAMSIN

26-30 septembre 2005

Calcul stochastique et modèles de diffusion

Introduction, but du cours

Ce cours se propose d'introduire quelques bases du calcul stochastique en vue d'obtenir des outils applicables à la finance. En effet, on suppose que les marchés financiers offrent des actifs dont les prix dépendent du temps et du hasard ; on peut donc les modéliser par des processus stochastiques, prix connus en temps continu. On suppose également que l'espace des états possibles de la nature, Ω, est infini, que l'on obtient continuement l'information sur les marchés et que les échanges peuvent s'opérer à tout instant ("continuous trading"). On est ainsi dans une situation où le modèle ad hoc est indexé par le temps $t, t \in [0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$, et l'on est amené à introduire un certain nombre d'outils stochastiques (qui peuvent d'ailleurs modéliser des situations extrèmement diverses autres que les marchés financiers).

0.1 Le plan

i) Le processus de Wiener ou mouvement brownien est tel que ses petits accroissements modélisent bien le "bruit", l'aléa pur, l'erreur de mesure physique... Ce chapitre sert à démontrer l'existence d'un tel processus en le construisant explicitement et l'on démontre quelques unes de ses propriétés les plus utiles.
ii) Le calcul de Ito permet d'obtenir par intégration des processus stochastiques plus sophistiqués ; la formule de Ito permet de "différentier" une fonction d'un processus stochastique .
iii) Le troisième chapitre introduit un premier modèle d'EDS utile en finance : les équations différentielles stochastiques linéaires. C'est un premier exemple de diffusion.
iv) Puis on aborde les changements de probabilité et problèmes de martingales. En effet, on se place en théorie financière en général sous l'hypothèse (ou bien on cherche à vérifier cette hypothèse !) qu'il existe un espace de probabilité où les prix sont tous des martingales, donc d'espérance constante, on dit alors que les prix sont "neutres au risque". Donc, on introduit le théorème de Girsanov, les problèmes de martingales et le théorème de représentation des martingales, c'est à dire que sous des hypothèses convenables, toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable est la valeur en T d'une martingale.
v) On utilise enfin ces outils pour modéliser des marchés d'actifs financiers, avec le problème de l'évaluation d'un porte-feuille optimal, du moins pour un petit porteur.

1 Introduction du processus de Wiener

([19] pages 21-24 ; [29] pages 17-20.)

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau, observées par Robert BROWN en 1828. Il en résulte une dispersion des microparticules dans l'eau, on dit aussi une "diffusion" du pollen dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques :

- particules microscopiques en suspension,

- prix d'actions en bourse,

- erreurs de mesures physiques,

- comportement asymptotique de files d'attente,

- tout comportement dynamique avec part aléatoire (équations différentielles stochastiques).

Définition 1.1 *Un* **mouvement brownien** *ou* **processus de Wiener** *est un processus sur un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *adapté, continu, à valeurs vectorielles tel que :*

(i) $B_0 = 0$, $\mathbb{P}$*-presque sûrement sur* Ω,

(ii) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $(t-s)I_d$.

En conséquence, si l'on a une suite de réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, la suite $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_i$ est un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance diagonale, de diagonale $(t_i - t_{i-1})$. On dit que B est un **processus à accroissements indépendants**.

Le premier problème que nous allons résoudre est celui de l'existence d'un tel processus. Il y a plusieurs constructions classiques.

1.1 Existence fondée sur une construction trajectorielle, lemme de Kolmogorov

([19] 2.2 ; [29] pages 17-20.) Très grossièrement, pour avoir une idée mais sans entrer dans les détails des démonstrations longues, délicates et techniques, on procède de la façon suivante. Soit $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d), B(t,\omega) = \omega(t)$ les applications "coordonnées" que l'on appelle **trajectoires**. On munit Ω de la plus petite tribu $\mathcal{A}$ qui rend mesurable $\{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ et de la filtration "naturelle" engendrée par le processus B : $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$. Sur $(\Omega, \mathcal{A})$ on montre qu'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}^+, B_1, \cdots, B_n$ boréliens de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\{\omega/\omega(t_i) \in B_i \forall i = 1, \cdots, n\} = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1..dx_n,$$

où $p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$.
Il s'agit alors de montrer :

- ceci définit bien une probabilité sur la tribu $\mathcal{A}$,

- sous cette probabilité, le processus $t \mapsto \omega(t)$ est bien un mouvement brownien au sens de la définition initiale.
De fait, ceci définit une probabilité sur les boréliens d'un autre espace : $\Omega' = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ dont Ω n'est malheureusement pas un borélien. Alors, on choisit plutôt $\Omega = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ et on utilise le théorème de Kolmogorov (1933),

Théorème 1.2 *(cf [19] page 50 : Kolmogorov, 1933) Soit $(Q_t, t \in (\mathbb{R}^+)^n)$ une famille consistante de distribution de dimension finie, c'est à dire une famille de mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que*

- si $s = \sigma(t)$, s et t $n-$uples de $\mathbb{R}^+$) et σ permutation des n premiers entiers, si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, alors $Q_t(A_1, \cdots, A_n) = Q_s(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(n)})$,

- et si $u = (t_1, \cdots, t_{n-1})$, et $t = (t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n), \forall t_n, Q_t(A_1, \cdots, A_{n-1}, \mathbb{R}) = Q_u(A_1, \cdots, A_{n-1})$. Alors, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ telle que

$$Q_t(A_1, \cdots, A_n) = \mathbb{P}\{\omega / \omega(t_i) \in A_i, i = 1, \cdots, n\}.$$

Puis on montre l'existence d'une modification continue du processus des applications coordonnées de Ω avec le théorème suivant :

Théorème 1.3 *(Kolmogorov-Centsov, 1956,cf [19] page 53, [29] page 171) Si X processus aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifie :*

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : E|X_t - X_s|^q \leq C|t - s|^{1+\beta},\ 0 \leq s, t \leq T,$$

alors X admet une modification continue $\tilde{X}$ qui est localement $\gamma-$Hölder continue :

$$\exists \gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[, \exists h \text{ variable aléatoire } > 0, \exists \delta > 0 \ :$$
$$\mathbb{P}\{\sup_{0<t-s<h; s,t \in [0,T]} |\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \leq \delta |t - s|^\gamma\} = 1.$$

1.2 Deuxième construction du mouvement brownien, cas $d = 1$

On prend ici à nouveau $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ sur lequel on définit :

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sup_{0 \leq t \leq n} (|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1)$$

c'est à dire la distance de PROHOROV.

Remarque 1.4 *Cette métrique induit une topologie qui est celle de la convergence uniforme sur tout compact en probabilité. $\Omega = \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est complet pour cette norme (cf. [29], page 49.)*

Sur Ω, on appelle **ensembles cylindriques de dimension finie** des sous-ensembles de la forme $A = \{\omega / (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in B\}$ où B est borélien de $\mathbb{R}^n$ et t un n-uple de réels positifs. On munit alors Ω de la tribu engendrée par ces ensembles et l'on montre :

Proposition 1.5 *(exercice 4.2 de [19] page 60) Soit $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par les ensembles cylindriques relatifs à des $n-$uples (t_i) tels que pour tout i, $t_i \leq t$.*

- $\mathcal{G} = \vee_t \mathcal{G}_t$ coïncide avec les boréliens de l'espace (Ω, ρ).

- Si

$$\begin{array}{rcl} \varphi_t : \Omega & \to & \Omega \\ \omega & \mapsto & (s \mapsto \omega(s \wedge t)) \end{array}$$

alors $\mathcal{G}_t = \varphi_t^{-1}(\mathcal{G})$ c'est à dire les boréliens de $\Omega^t = \mathcal{C}([0,t], \mathbb{R})$.

La construction est fondée sur le théorème de la limite centrale.

Théorème 1.6 *Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance σ^2. Alors,*

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \text{ converge en loi vers } X \text{ de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

C'est cet outil qui permettra de construire explicitement le mouvement brownien ; le théorème suivant s'appelle le **théorème d'invariance de Donsker**.

Théorème 1.7 *Soit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance $\sigma^2 > 0$ et la famille de processus continus :*

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} [\sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j + (nt - [nt]) \xi_{[nt]+1}].$$

Soit $\mathbb{P}^n$ la mesure induite par X^n sur $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \mathcal{G})$. Alors $\mathbb{P}^n$ converge faiblement vers $\mathbb{P}^*$, mesure sous laquelle $B_t(\omega) = \omega(t)$ est un mouvement brownien standard sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

La preuve prend sept pages (cf. [19]) et s'appuye sur les outils topologiques suivants :

- convergence faible et en loi,
- familles tendues et relative compacité,

qui sont l'objet des deux sous-sections suivantes.

1.2.1 Familles tendues et relative compacité

Définition 1.8 *Soit (S, ρ) un espace métrique et Π une famille de probabilités sur $(S, \mathcal{B}(S))$. On dit que Π est* **relativement compacte** *si de toute suite de Π on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

On dit que Π est **tendue** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact } \subset S \text{ tel que } \mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon, \ \forall \mathbb{P} \in \Pi.$$

De façon analogue, une famille de variables aléatoires $\{X_\alpha : (\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha) \ ; \ \alpha \in A\}$ est dite **relativement compacte ou tendue** *si la famille de probabilités associées sur $(S, \mathcal{B}(S))$ est relativement compacte ou tendue.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 1.9 *(théorème de Prohorov, 1956, [19] 4.7) Soit* Π *une famille de probabilités sur* $(S, \mathcal{B}(S))$*. Alors* Π *est relativement compacte si et seulement si elle est tendue.*

L'intérêt de ce théorème est que la relative compacité permet d'extraire une suite faiblement convergente, mais que la propriété de tension est plus facile à vérifier.

Définition 1.10 *Sur* $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$*, on appelle* **module de continuité** *sur* $[0,T]$ *la quantité*

$$m^T(\omega, \delta) = \max_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq T} |\omega(s) - \omega(t)|.$$

Exercice : on peut montrer que ce module est continu sur l'espace métrique (Ω, ρ), ρ est la distance de Prohorov, croissant en δ, et que $\forall\omega, \lim_{\delta\to 0} m^T(\omega, \delta) = 0$.

Le théorème suivant est un critère de tension (donc de relative compacité) pour une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Théorème 1.11 *([19] page 63, 4.10) Une suite de probabilités* $(\mathbb{P}_n)$ *est tendue si et seulement si :*
(i)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n\{\omega \ : \ |\omega(0)| > \lambda\} = 0.$$

(ii)

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n\{\omega \ : \ m^T(\omega, \delta) > \varepsilon\} = 0, \forall T > 0, \forall\varepsilon > 0.$$

Preuve Elle s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 1.12 *([19], 4.9 page 62 : théorème d'Arzelà-Ascoli) Soit* $A \subset \Omega$*. Alors* $\bar{A}$ *est compact si et seulement si*

$$\sup_{\{\omega\in A\}} |\omega(0)| < \infty \ \textit{et} \ \forall T > 0, \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{\omega\in A\}} m^T(\omega, \delta) = 0.$$

Preuve : pages 62-63 de [19].

Puis, pour l'étude de la convergence des processus X^n définis dans le théorème de Donsker (1.7), on introduit des notions de convergence propres aux processus. La convergence en loi des processus "dans leur ensemble" est assez difficile à obtenir. On introduit une notion plus facile à vérifier.

Définition 1.13 *On dit que la suite de processus* X^n **converge en distribution de dimension finie** *vers le processus* X *si pour tout* d *et tout* d*-uple* $(t_1, \cdots, t_d)$*,* $(X^n_{t_1}, \cdots, X^n_{t_d})$ *converge en loi vers* $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_d})$

Pour prouver une telle convergence, il suffit d'utiliser les fonctions caractéristiques de tels d-uples.

Proposition 1.14 *Si la suite de processus X^n converge en distribution vers le processus X, alors elle converge en distribution de dimension finie vers X.*

Preuve : en effet, $\forall d$ et pour tout d-uple, l'application $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ telle que $\pi(\omega) = (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_d))$ est continue pour la distance ρ et $\pi \circ X^n = (X^n_{t_1}, \cdots, X^n_{t_d})$ converge en loi vers $\pi \circ X$ puisque la continuité préserve la convergence en loi. □

Attention ! la réciproque n'est pas toujours vraie !! On peut voir en exercice le contre-exemple suivant (2, Feuille 3) :

$$X^n_t = nt1_{[0,\frac{1}{2n}]}(t) + (1 - nt)1_{[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]}(t)$$

converge en distribution de dimension finie vers 0 mais pas en loi.

En revanche, elle est vraie dans le cas d'une suite tendue.

Théorème 1.15 *(4.15 [19]) Soit une suite de processus X^n constituant une famille tendue convergeant en distribution de dimension finie vers un processus X. Alors, $\mathbb{P}_n$ loi de X^n sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ converge faiblement vers une mesure $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus $B_t(\omega(t) = \omega(t)$ est limite en distribution de dimension finie de la suite X^n.*

Preuve : elle s'appuie sur le théorème de Prohorov et l'exercice 2 de la Feuille 2. La famille est tendue donc relativement compacte et il existe $\mathbb{P}$ limite faible d'une sous-suite de la famille. Soit Q une limite faible d'une autre sous-suite et supposons $Q \neq \mathbb{P}$. L'hypothèse donne que $\forall d, \forall t_1, \cdots, t_d, \forall B$ borélien de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\{\omega : (\omega(t_i)) \in B\} = Q\{\omega : (\omega(t_i)) \in B\}$$

puisqu'il y a convergence en distribution de dimension finie. Ceci veut dire que $\mathbb{P}$ et Q coïncident sur les événements cylindriques, donc sur $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent. Donc toute sous-suite convergente converge faiblement vers cette unique probabilité $\mathbb{P}$.

Supposons maintenant que $\mathbb{P}_n$ ne converge pas faiblement vers $\mathbb{P}$. Ceci signifie qu'il existe $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$ telle que la suite bornée réelle $\mathbb{P}_n(f)$ ne converge pas vers $\mathbb{P}(f)$. De toutes façons, il existe au moins une suite extraite $\mathbb{P}_{n_k}(f)$ convergente, et de limite différente de $\mathbb{P}(f)$. D'autre part, puisque la famille est tendue, de la famille $\mathbb{P}_{n_k}$ on peut extraire une suite faiblement convergente, qu'on appelle encore $\mathbb{P}_{n_k}$. Mais pour celle-ci, la limite, on l'a vu ci-dessus, est nécessairement $\mathbb{P}(f)$, d'où la contradiction et la preuve du résultat. □

1.2.2 Principe d'invariance de Donsker et mesure de Wiener

On montre dans cette section le théorème qui construit le mouvement brownien. On étudie la suite de processus définie dans le théorème principal à l'aide de variables aléatoires indépendantes $(\xi_j, j \geq 1)$. Il faut :

- montrer la convergence de la suite de processus $(X_n, n \geq 0)$,

- montrer les propriétés de la limite conformément à la définition initiale. Le plan de la preuve est donc :

1) cette suite converge en distribution de dimension finie vers un processus qui a les propriétés du mouvement brownien,

2) cette suite est tendue et l'on peut appliquer le théorème 1.15.

1)

Proposition 1.16 *(cf 4.17 [19]) Soit :*

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}).$$

Alors, $\forall d, \forall (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^+$, on a la convergence en loi :

$$(X_{t_1}^n, \cdots, X_{t_d}^n) \longrightarrow_{\mathcal{D}} (B_{t_1}, \cdots, B_{t_d})$$

où B vérifie les propriétés définissant le mouvement brownien.

Preuve : on fait une première simplification en utilisant l'exercice 3 de la feuille 3 avec :

$$S_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j \text{ et } S_{\underline{t}}^n = (S_{t_1}^n, \cdots, S_{t_d}^n).$$

Remarquons :

$$X_t^n = S_t^n + \frac{nt - [nt]}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on obtient :

$$\mathbb{P}\{\| X_{\underline{t}}^n - S_{\underline{t}}^n \| > \varepsilon\} \leq \frac{d}{n\sigma^2\varepsilon^2} \| \xi \|^2 \rightarrow 0$$

lorsque n tend vers l'infini. L'exercice montre alors qu'il suffit de montrer la convergence en loi de $S_{\underline{t}}^n$.

Remarquons que $(S_{\underline{t}}^n, t \geq 0)$ est un processus à accroissements indépendants ; si les (t_i) sont rangés en ordre croissant, les d variables aléatoires $(S_{t_1}^n, S_{t_2}^n - S_{t_1}^n, \cdots, S_{t_d}^n - S_{t_{d-1}}^n)$ sont indépendantes. L'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$: $x \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \cdots, \sum_i x_i)$ est continue et la convergence en loi est preservée par la continuité. Il suffit donc d'examiner la convergence en loi du d-uplet des accroissements ce que l'on fait à l'aide de la fonction caractéristique :

$$(1) \qquad \phi^n(u_1, \cdots, u_d) = E[e^{i\sum_j u_j(S_{t_j}^n - S_{t_{j-1}}^n)}] = \Pi_j E[e^{\frac{iu_j}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{[nt_{j-1}] < k \leq [nt_j]} \xi_k}].$$

Pour tout j, en notant $k_j = [nt_j]$, chaque facteur se récrit :

$$E[e^{iu_j\sqrt{\frac{k_j - k_{j-1}}{n}} \frac{\sum_k \xi_k}{\sigma\sqrt{k_j - k_{j-1}}}}].$$

Or, $\frac{k_j-k_{j-1}}{n} = \frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}$ converge vers $(t_j - t_{j-1})$ lorsque n tend vers l'infini et la variable aléatoire $\frac{\sum_{[nt_{j-1}]<k\leq[nt_j]}\xi_k}{\sigma\sqrt{k_j-k_{j-1}}}$ converge en distribution vers un gaussienne centrée réduite (loi des grands nombres) et donc sa fonction caractéristique converge vers $e^{-t^2/2}$ et le $j$ème facteur vers $e^{-\frac{1}{2}u_j^2(t_j-t_{j-1})}$. La loi limite admet donc la fonction caratéristique $\phi(u) = e^{-\frac{1}{2}\sum_j u_j^2(t_j-t_{j-1})}$ qui est exactement celle d'un d-uplet $(B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}), \cdots, (B_{t_d} - B_{t_{d-1}}))$ issu d'un mouvement brownien. On a donc à la fois la loi du processus limite et la propriété de processus à accroissements indépendants.

2) Il reste enfin à montrer que la famille est tendue, ce qui résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 1.17 *(cf [19], 4.18) Soit* $(\xi_j, j \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, centrées de variance* 1, *et* $S_j = \sum_{k=1}^j \xi_k$. *Alors :*

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\delta}\mathbb{P}\{max_{\{1\leq j\leq[n\delta]>+1\}}|\xi_j| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} = 0.$$

Lemme 1.18 *(cf [19], 4.19) Sous les mêmes hypothèses,*

$$\forall T > 0,\ \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}\{max_{\{1\leq j\leq[n\delta]>+1\}}max_{\{1\leq k\leq[nT]>+1\}}|S_{j+k} - S_j| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} = 0.$$

Preuve du théorème d'invariance de Donsker :
Avec la proposition 1.16 ci-dessus, et le théorème 1.15, il suffit de montrer que la famille est tendue. On utilise ici la caractérisation donnée dans le théorème 1.11. Puisqu'ici $X_0^n = 0\ \forall n$, il suffit de vérifier le deuxième critère :

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_n \mathbb{P}\{max_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq T}|X_s^n - X_t^n| > \varepsilon\} = 0.$$

. On peut remplacer $\sup_n$ par $\overline{\lim}_n = \inf_m \sup_{n\geq m}$ puisque pour m borné on peut rendre vides des événements en prenant δ assez petit : $(X^n, 0 \leq n \leq m)$ est continue sur $[0, T]$ donc uniformément continue.

$$\{max_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq T}|X_s^n - X_t^n| > \varepsilon\} =$$
$$\{max_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq T}|S_{j_s} - S_{j_t} + \frac{n_s - j_s}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{j_s+1} - \frac{n_t - j_t}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{j_t+1}| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\},$$

où $j_s = [ns]$, et si l'on note $j_s = k$ et $j_t = k + j$ en supposant $s \leq t$, cet ensemble est contenu dans :

$$\{max_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq T}|S_{j_s} - S_{j_t}| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}$$

et le lemme 1.18 permet de conclure. □

Définition 1.19 *La mesure* $\mathbb{P}$ *limite faible des probabilités* $\mathbb{P}^n$ *est* **la** *mesure de Wiener sur* Ω.

1.3 Propriétés des trajectoires du mouvement brownien

1.3.1 Processus gaussien

Définition 1.20 *Un processus X est dit* **gaussien** *si $\forall d, \forall (t_1, \cdots, t_d)$ réels positifs, le vecteur $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_d})$ suit une loi gaussienne. Si la loi de $(X_{t+t_i}; i = 1, \cdots, d)$ ne dépend pas de t, on dit que le processus est* **stationnaire**.

On appelle **covariance** *du vecteur X la matrice*

$$\rho(s,t) = E[(X_s - E(X_s))(X_t - E(X_t))^T], \; s, t \geq 0.$$

Proposition 1.21 *Le mouvement brownien B est un processus gaussien continu centré de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$.*

Réciproquement, tout processus continu gaussien continu centré de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$ est un mouvement brownien.

Le mouvement brownien converge "en moyenne" vers zéro :

$$\frac{B_t}{t} \to 0$$

presque sûrement lorsque t tend vers l'infini.

Preuve en exercices (4 et 5 Feuille 3). Le troisième point est en quelque sorte une "loi des grands nombres". □

On peut obtenir d'autres mouvements browniens par des transformations standard en changeant éventuellement aussi la filtration.

(i) changement d'échelle (scaling) : $(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}, \mathcal{F}_{ct})$.

(ii) inversion du temps : $(Y_t, \mathcal{F}_t^Y)$, avec $Y_t = tB_{\frac{1}{t}}$ si $t \neq 0$, $Y_0 = 0$ et $\mathcal{F}_t^Y = \sigma\{Y_s, s \leq t\}$.

(iii) retournement du temps : $(Z_t, \mathcal{F}_t^Z)$, avec $Z_t = B_T - B_t$ et $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\{Z_s, s \leq t\}$.

(iv) symétrie : $(-B_t, \mathcal{F}_t)$.

Il suffit de vérifier à chaque fois que l'on a un processus continu, adapté, qui vérifie la propriété caractéristique du mouvement brownien ou que c'est un processus gaussien de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$. Le seul un peu difficile est le (ii) (exercice 6 Feuille 3).

1.3.2 Ensemble des zéros

Il s'agit de $\mathcal{X} = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : B_t(\omega) = 0\}$. Si l'on fixe une trajectoire ω, on note $\mathcal{X}_\omega = \{t \in \mathbb{R}^+ : B_t(\omega) = 0\}$.

Théorème 1.22 *(cf [19] 9.6, p. 105) $\mathbb{P}$-presque sûrement en ω*

(i) la mesure de Lebesgue de $\mathcal{X}_\omega$ est nulle,

(ii) $\mathcal{X}_\omega$ est fermé non borné,

(iii) $t = 0$ est un point d'accumulation de $\mathcal{X}_\omega$,

(iv) $\mathcal{X}_\omega$ n'a pas de point isolé, donc est dense dans lui même.

Preuve en exercice.

1.3.3 Variations des trajectoires

(cf [19] pb 9.8 p. 106 et 125)

Théorème 1.23 *(cf [29] 28 p. 18)*
Soit π_n une suite de partitions de l'intervalle $[0,t]$ telle que $\pi_n \subset \pi_m$ si $n \leq m$ et le pas de π_n, noté $\|\pi_n,\|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On pose
$\pi_n(B) = \sum_{t_i \in \pi_n}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$. Alors $\pi_n(B)$ converge vers t dans $L^2(\Omega)$, et presque sûrement si $\sum_n \parallel \pi_n \parallel < \infty$, quand n tend vers l'infini.

Preuve : Soit $z_i = (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)$; $\sum_i z_i = \pi_n(B) - t$. C'est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ suit une loi gausienne de moyenne nulle et de variance $t_{i+1} - t_i$. On peut aussi calculer l'espérance de z_i^2 :

$$E[z_i^2] = E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)]^2 = E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 - 2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1} - t_i)^2].$$

Connaissant les moments de la loi gaussienne, on obtient :

$$E[z_i^2] = 2(t_{i+1} - t_i)^2.$$

L'indépendance entre les z_i montre que $E[(\sum_i z_i)^2] = \sum_i E[(z_i)^2]$ ce qui vaut
$2\sum_i(t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2\|\pi_n\|.t$, qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ceci entraine la convergence dans $L^2(\Omega)$ (donc en probabilité) de $\pi_n(B)$ vers t.

Si de plus $\sum_n \parallel \pi_n \parallel < \infty$, $\mathbb{P}\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} 2 \parallel \pi_n \parallel t$. Donc la série $\sum_n \mathbb{P}\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\}$ converge et le lemme de Borel-Cantelli montre que

$$\mathbb{P}[\overline{\lim}_n\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\}] = 0,$$

soit :

$$\mathbb{P}[\cap_n \cup_{m \geq n}\{|\pi_m(B) - t| > \varepsilon\}] = 0, \forall \varepsilon > 0, \text{ presque sûrement } \cup_n \cap_{m \geq n}\{|\pi_m(B) - t| \leq \varepsilon\} = \Omega,$$

ce qui traduit la convergence presque sûre de $\pi_n(B)$ vers t. □

Théorème 1.24 *(cf [19] 9.9, p.106)*

$$\mathbb{P}\{\omega : t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur un intervalle}\} = 0.$$

Preuve : on note $F = \{\omega :$ il existe un intervalle où $t \mapsto B_t(\omega)$ est monotone$\}$. Ceci se traduit par :

$$F = \cup_{s,t \in Q, 0 \leq s < t} \{\omega : u \mapsto B_u(\omega) \text{ est monotone sur } (s,t)\}.$$

On fixe s et t dans Q avec $0 \leq s < t$ et l'on étudie l'événement

$$A = \{\omega : u \mapsto B_u(\omega) \text{ est croissante sur}(s,t)\}.$$

Alors, $A = \cap_n A_n$ où $A_n = \cap_{i=0}^{n-1} \{\omega : B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \geq 0\}$ avec $t_i = s + (t-s)\frac{i}{n}$. Par l'indépendance des accroissements, $\mathbb{P}(A_n) = \Pi_i \mathbb{P}\{\Delta_i B \geq 0\} = \frac{1}{2^n}$. Pour tout n $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A_n)$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$ pour tout s et t ce qui montre $\mathbb{P}(F) = 0$. □

Théorème 1.25 *(cf [19] 9.18, p.110 : Paley-Wiener-Zygmund, 1933)*

$$\mathbb{P}\{\omega : \exists t_0 \ t \mapsto B_t(\omega) \textit{ différentiable en } t_0\} = 0.$$

Plus précisément, si l'on note $D^+ f(t) = \overline{\lim}_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$; $D_+ f(t) = \underline{\lim}_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$, *il existe un événement* F *de probabilité* 1 *contenu dans l'ensemble :*

$$\{\omega \ : \forall t, \ D^+ B_t(\omega) = +\infty \textit{ ou } D_+ B_t(\omega) = -\infty\}.$$

Preuve :

Soit ω tel qu'il existe t tels que $-\infty < D_+ B_t(\omega) \leq D^+ B_t(\omega) < +\infty$. Alors,

$$\exists j, k \text{ tels que pour tout } h \leq 1/k, |B_{t+h} - B_t| \leq jh.$$

On peut trouver pour n supérieur ou égal à $4k$ un entier $i, i = 1, \cdots, n$, tel que :

$$\frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n}, \text{ et pour } \nu = 1,2,3 : \frac{i+\nu}{n} - t \leq \frac{\nu+1}{n} \leq \frac{1}{k}.$$

On déduit de ces deux remarques et de l'inégalité triangulaire $|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}| \leq |B_{\frac{i+1}{n}} - B_t| + |B_t - B_{\frac{i}{n}}|$ la majoration

$$|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}| \leq \frac{3j}{n}.$$

Et l'on continue avec $\nu = 2$ puis 3 :

$$|B_{\frac{i+2}{n}} - B_{\frac{i+1}{n}}| \leq \frac{5j}{n}, \ |B_{\frac{i+3}{n}} - B_{\frac{i+2}{n}}| \leq \frac{7j}{n}.$$

On se trouve donc dans l'événement où il existe $t \in [0,1]$, tel que pour tout $n \geq 4k$, il existe i entre 1 et n tel que $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], \nu = 1,2,3 : |B_{\frac{i+\nu}{n}} - B_{\frac{i+\nu-1}{n}}| \leq \frac{(2\nu+1)j}{n}$. Les trois accroissements de B sont indépendants ; la probabilité de l'événement

$$\forall \nu = 1,2,3 : |B_{\frac{i+\nu}{n}} - B_{\frac{i+\nu-1}{n}}| \leq \frac{(2\nu+1)j}{n}$$

est majorée par $\frac{j^3.3.5.7}{n^{3/2}}$ et celle de l'événement

$$\forall n \geq 4k, \exists i = 1, \cdots, n, \nu = 1,2,3 : |B_{\frac{i+\nu}{n}} - B_{\frac{i+\nu-1}{n}}| \leq \frac{(2\nu+1)j}{n}$$

est majorée par $n\frac{j^3.3.5.7}{n^{3/2}}$ pour tout $n \geq 4k$ et donc tend vers zéro quand k tend vers l'infini. □

Définition 1.26 *Soit une fonction définie sur un intervalle* $[a, b]$. *On appelle* **variation de** f **sur l'intervalle** *:*

$$Var_{[a,b]}(f) = \sup_{\pi} \sum_{t_i \in \pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

où π *décrit l'ensemble des partitions de* $[a, b]$.

Théorème 1.27 *(cf [29] p.19-20 Soit* a *et* b *fixés dans* $\mathbb{R}^+$ *:*

$$\mathbb{P}\{\omega : Var_{[a,b]}(B) = +\infty\} = 1.$$

Preuve : Soit a et b fixés dans $\mathbb{R}^+$ et π une partition de $[a, b]$.

$$\sum_{t_i \in \pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| \geq \frac{\sum_{t_i \in \pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|^2}{sup_{t_i \in \pi}|B(t_{i+1}) - B(t_i)|}. \tag{2}$$

Le numérateur est la variation quadratique de B dont on sait qu'elle converge vers t. Ensuite, $s \mapsto B_s(\omega)$ est continue donc uniformément continue sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \parallel \pi \parallel < \eta \Rightarrow sup_{t_i \in \pi}|B(t_{i+1}) - B(t_i)| < \varepsilon.$$

La fraction (2) converge donc vers l'infini. □

1.3.4 Théorème de Lévy

C'est un théorème qui donne l'ordre de grandeur du module de continuité.

Théorème 1.28 *([19] th. 9.25 pp 114-115)*
Soit $g :]0, 1] \to \mathbb{R}^+, g(\delta) = \sqrt{-2\delta \log(\delta)}$. *Alors,*

$$\mathbb{P}\{\omega : \overline{\lim}_{\delta \searrow 0} \frac{1}{g(\delta)} \sup_{0<s<t<1, t-s \leq \delta} |(B_t - B_s)(\omega)| = 1\} = 1.$$

C'est à dire que le module de continuité de B est de l'ordre de $g(\delta)$.

Théorème 1.29 *(cf [29] 31 p.22-23) Soit* $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t) \vee \mathcal{N}$. *Alors la filtration* $\mathcal{F}$ *est continue à droite, c'est à dire* $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$ *coincide avec* $\mathcal{F}_t$.

Preuve en exercice. Elle utilise le fait que

$$\begin{aligned} \forall u_1, \forall u_2 \quad , \quad & \forall z > v > t, \\ & E[e^{i(u_1 B_z + u_2 B_v)}/\mathcal{F}_{t^+}] = \lim_{w \searrow t} E[e^{i(u_1 B_z + u_2 B_v)}/\mathcal{F}_w] = \\ & E[e^{i(u_1 B_z + u_2 B_v)}/\mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

c'est à dire que les lois conditionnelles en $\mathcal{F}_{t^+}$ et $\mathcal{F}_t$ sont les mêmes et donc $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$

1.3.5 Propriétés de Markov et de martingale

Le mouvement brownien est un processus de Markov, c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall f \text{ borélienne bornée, } E_x[f(B_{t+s})/\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_t)].$$

La preuve peut se faire facilement "à la main" : sous $\mathbb{P}_x$, $B_{t+s} = x + W_{t+s}$ et

$$f(B_{t+s}) = f(x + W_{t+s} - W_s + W_s)$$

et on conclut par l'indépendance de $x + W_s$ et $W_{t+s} - W_s$.
En corollaire on obteint que B est une martingale pour sa filtration propre.

2 Calcul de Ito

Le but essentiel de ce chapitre est de donner un sens à la notion d'intégrale de processus par rapport au mouvement brownien ou, plus généralement, par rapport à une martingale. En se guidant sur le "prétexte" de ce cours, le calcul stochastique appliqué aux finances, on peut motiver ainsi l'intégrale stochastique : étudions un instant un modèle où le prix d'une action serait donné par une martingale M_t à l'instant t. Si l'on possède $X(t)$ de ces actions au même instant et que l'on effectue des transactions aux instants t_k, la richesse se sera finalement accrue de

$$\sum_k X(t_{k-1})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}).$$

Mais si l'on veut effectuer des transactions en temps continu,à tout instant t, il faut pouvoir définir un outil mathématique permettant de passer à la limite dans l'expression ci-dessus avec le problème que, en particulier si $M = B$, la dérivée B' n'existe pas !! cette expression est une somme qui a vocation à converger vers une intégrale de Stieljes, mais comme la variation $V(B)$ est infinie, cela ne saurait converger dans un sens "déterministe" : l'intégrale stochastique "naïve" est impossible (cf. Protter page 40) comme le montre le résultat suivant.

Théorème 2.1 *Soit $\pi = (t_k)$ une partition de $[0,T]$. Si $\lim_{|\pi|\to 0} \sum_k x(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))$ existe, alors f est à variation finie. (cf. Protter, th. 52, page 40)*

La preuve utilise le théorème de Banach Steinhaus, c'est à dire : si X est un espace de Banach et Y un espace vectoriel normé, (T_α) une suite d'opérateurs bornés de X dans Y telle que $\forall x \in X, (T_\alpha(x))$ est bornée, alors la suite des normes $(\| T_\alpha \|)$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

Il faut donc trouver d'autres outils. L'idée de Itô a été de restreindre les intégrands aux processus qui ne peuvent pas "voir" les accroissements du futur, c'est à dire les processus adaptés, en sorte que, du moins pour le brownien, $x(t_{k-1})$ et $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ soient indépendants ; ainsi, par trajectoire on ne peut rien faire, mais l'on travaille en probabilité, en espérance.

Le plan est le suivant : on définit d'abord l'intégrale sur les processus "simples" d'ensemble noté $\mathcal{S}$ (que l'on va définir), puis on opère en prolongeant par continuité l'opérateur obtenu sur la fermeture de $\mathcal{S}$ pour une topologie bien choisie, en sorte d'avoir une quantité raisonnable d'intégrands.

2.1 L'intégrale stochastique

Soit M une martingale continue de carré intégrable sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_t$ est par exemple la filtration naturelle du brownien complétée par les événements négligeables. Pour tout processus mesurable X, tout entier n et tout temps t on définit :

$$I_n(X,t) = \sum_j X(\frac{j-1}{2^n} \wedge t)(M_{\frac{j}{2^n}\wedge t} - M_{\frac{j-1}{2^n}\wedge t}).$$

Ceci n'a pas toujours une limite. On va se restreindre à une classe de processus X mesurables adaptés presque sûrement de carré intégrable par rapport au processus croissant $\langle M \rangle$ défini ci-dessous.

Définition 2.2 *Le processus croissant $\langle M\rangle$ est défini au temps t par :*

$$\langle M\rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} proba \sum_{t_i\in\pi}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

où π sont les partitions de $[0,t]$.

La construction de $I(X,t)$ est due à Itô (1942) dans le cas de M mouvement brownien, et à Kunita et Watanabe (1967) pour les martingales de carré intégrable.

On a vu dans le chapitre précédent que si $M = B$ alors $\langle B\rangle_t = t$.

Remarque 2.3 *Les martingales continues de carré intégrable admettent un crochet.*

Proposition 2.4 *$\langle M\rangle_t$ est l'unique processus continu croissant adapté tel que $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ est une martingale.*

Cette proposition sert le plus souvent de définition au crochet et alors la définition 2.2 en est une conséquence.
Notation : on définit une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\otimes\mathcal{F}$ par

$$\mu_M(A) = E[\int_0^\infty 1_A(t,\omega)d\langle M\rangle_t(\omega)].$$

On dit que X et Y sont équivalents si $X = Y \mu_M$ *p.s.*
Notation : pour tout X adapté, on note $[X]_T^2 = E[\int_0^T X_t^2 d\langle M\rangle_t]$.

Remarquons que X et Y sont équivalents si et seulement si $[X]_T^2 = 0\ \forall T \geq 0$.

On introduit l'ensemble des processus suivants :

(3) $\mathcal{L}(M) = \{$ classes de processus X mesurables $\mathcal{F}$-adaptés tels que $\sup_T [X]_T < +\infty\}$

que l'on munit de la métrique :

$$d(X,Y) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} 1 \wedge [X-Y]_n \tag{4}$$

puis le sous-ensemble du précédent :

$$\mathcal{L}^* = \{X \in \mathcal{L} \text{ progressivement mesurable}\}$$

Lorsque la martingale M est telle que son processus croissant $\langle M\rangle$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, comme tout élément de $\mathcal{L}$ admet une modification dans $\mathcal{L}^*$ on pourra dans ce cas travailler dans $\mathcal{L}$ mais de manière générale on se restreindra à $\mathcal{L}^*$.
Exercice 1. Soit $\mathcal{L}_T$ l'ensemble des processus X mesurables adaptés sur $[0,T]$ tels que :

$$[X]_T^2 = E[\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s] < +\infty.$$

L'ensemble $\mathcal{L}_T^*$, ensemble des éléments de $\mathcal{L}$ progressivement mesurables, est fermé dans $\mathcal{L}_T$. En particulier, il est complet pour la norme $[.]_T$.

2.1.1 Intégrale de processus simples et prolongement

Définition 2.5 *On dit que X est* **simple** *ou* **étagé** *s'il existe une suite de réels (t_i) croissant vers l'infini et une famille (ξ_i) de variables aléatoires $\mathcal{F}_{t_i}-$mesurables bornées telles que :*

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbf{1}_{]t_i t_{i+1}]}(t).$$

On note $\mathcal{S}$ leur ensemble et on a les inclusions $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$. (à vérifier en exercice)

Définition 2.6 *Soit $X \in \mathcal{S}$. L'intégrale stochastique de X par rapport à M est*

$$I_t(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}).$$

Il s'agit maintenant d'étendre cette définition à une classe plus large d'intégrands.

Lemme 2.7 *Pour tout processus* **borné** *$X \in \mathcal{L}$ il existe une suite de processus $X_n \in \mathcal{S}$ telle que* $\sup_{T \geq 0} \lim_n E[\int_0^T (X_n - X)^2 dt] = 0$.

Preuve (a) Cas où X est continu : on pose $X_t^n = X_{\frac{j-1}{2^n}}$ sur l'intervalle $]\frac{j-1}{2^n}\frac{j}{2^n}]$. Par continuité, il est clair que $X_t^n \to X_t$ presque sûrement. De plus X est borné par hypothèse ; le théorème de convergence majorée permet de conclure.

(b) cas où $X \in \mathcal{L}^*$: on pose $X_t^m = m \int_{(t-1/m)^+}^t X_s ds$ qui lui est continu, et reste mesurable adapté borné dans $\mathcal{L}$. D'après l'étape (a) pour tout m il existe une suite $X^{m,n}$ de processus simples qui convergent vers X^m dans $L^2([0,T] \times \Omega, d\mathbb{P} \times dt)$ c'est à dire :

$$(5) \qquad \forall m \; \forall T \; \lim_{n \to \infty} E[\int_0^T (X_t^{m,n} - X_t^m)^2 dt] = 0.$$

Soit $A = \{(t, \omega) \in [0,T] \times \Omega \; : \; \lim_{m \to \infty} X_t^m(\omega) = X_t(\omega)\}^c$ et sa section A_ω pour tout ω. Puisque X est progressivement mesurable, $A_\omega \in \mathcal{B}([0,T])$. Un théorème d'analyse fine (**théorème fondamental de Lebesgue**, cf. par exemple STEIN : "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions") dit que puisque X est intégrable, on a :

$$X_t^m - X_t = m \int_{(t-1/m)^+}^t (X_s - X_t) ds \to 0$$

pour presque tout t et la mesure de Lebesgue de A_ω est nulle. Par ailleurs, X et X^m sont uniformément bornés ; le théorème de convergence majorée dans $[0,T]$ montre que $\forall \omega \int_0^T (X_s - X_x^m)^2 ds \to 0$.

On applique une seconde fois le théorème de convergence majorée mais dans Ω et l'on obtient $E[\int_0^T (X_s - X_x^m)^2 ds] \to 0$ ce qui, avec (5), conclut (b).

(c) Enfin le cas où X est **mesurable adapté borné** : on se ramène au (b) en se rappelant que tout processus mesurable adapté possède une modification progressivement mesurable, soit Y. Il existe alors une suite Y^n de processus simples convergeant vers Y dans $L^2([0,T]\times\Omega, d\mathbb{P}\times dt)$ soit :

$$E[\int_0^T (Y_s - Y_s^m)^2 ds] \to 0 \text{ et } \forall t \ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

On pose $\eta_t = \mathbf{1}_{\{X_t \neq Y_t\}}$. Par le théorème de Fubini on obtient :

$$E[\int_0^T \eta_t dt] = \int_0^T \mathbb{P}(X_t \neq Y_t) dt = 0$$

d'où l'on tire $\int_0^T \eta_t dt = 0$ presque sûrement.

$$\eta_t + \mathbf{1}_{\{X_t = Y_t\}} = 1 \Rightarrow E[\int_0^T \mathbf{1}_{\{X_t = Y_t\}} dt] = T \text{ et } \mathbf{1}_{\{X_t = Y_t\}} = 1 \ dt \times d\mathbb{P} \text{ presque sûrement}$$

Il vient enfin :

$$E[\int_0^T (Y_s - Y_s^m)^2 ds] = E[\int_0^T \mathbf{1}_{\{X_s = Y_s\}} (Y_s - Y_s^m)^2 ds] = E[\int_0^T (X_s - Y_s^m)^2 ds]$$

ce qui permet de conclure.
□

Proposition 2.8 *Si le processus croissant $\langle M\rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt $\mathbb{P}$-presque sûrement, alors $\mathcal{S}$ est dense dans l'espace métrique $(\mathcal{L}, d)$ où la métrique d a été définie en (4).*

Preuve

(i) Soit $X \in \mathcal{L}$ et borné : le lemme précédent montre l'existence d'une suite de processus simples X^n convergeant vers X dans $L^2(\Omega\times[0,T], d\mathbb{P}\otimes dt), \forall T$. Il existe donc une suite extraite convergeant presque sûrement. On conclut avec le théorème de convergence dominée et le fait que $d\langle M\rangle_t = f(t)dt$.

(ii) Soit $X \in \mathcal{L}$ et pas borné : on pose $X_t^n(\omega) = X_t(\omega)\mathbf{1}_{\{|X_t(\omega)|\leq n\}}$. La distance :

$$d(X^n, X) = E[\int_0^T X_s^2 \mathbf{1}_{\{|X_t(\omega)|\geq n\}} d\langle M\rangle_s] \to 0$$

car l'intégrand converge presque sûrement vers 0, est majoré par X^2 qui est intégrable : c'est le théorème de convergence dominée.

Or $X^n \in \mathcal{L}$ et sont bornés : leur ensemble est dense dans $\mathcal{L}$.

(iii) Les processus simples sont denses dans les processus bornés de $\mathcal{L}$, (i) et le (ii) permettent de conclure. □

Cette proposition assure donc la densité des processus simples dans $\mathcal{L}$ dans le cas où le processus croissant $\langle M\rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt. Sinon, on a seulement la densité des processus simples dans $\mathcal{L}^*$ grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.9 *$\mathcal{S}$ est dense dans l'espace métrique $(\mathcal{L}^*, d)$ où la métrique d a été définie en (4).*

Preuve : C'est la proposition 2.8 et le lemme 2.7. de [19], pages 135-137.

Remarque 2.10 *utile : la métrique introduite en (4) donne lieu à la topologie équivalente suivante : $d(X_n, X) \to 0$ quand n tend vers l'infini si et seulement si*

$$\forall T > 0, E[\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 d\langle M\rangle_t] \to 0.$$

2.1.2 Construction de l'intégrale et ses propriétés élémentaires

On rappelle que pour un processus simple X l'intégrale stochastique

$$I_t(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}).$$

On note aussi $I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s$ pour bien préciser que l'intégrateur est M. Cette intégrale stochastique élémentaire a les propriétés suivantes à montrer en exercice :
Exercice 2. Soit $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des processus simples sur lequel est défini l'intégrale stochastique par rapport à M :

$$I_t(X) = \sum_j \xi_j (M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t}).$$

Montrer que I_t vérifie les propriétés suivantes :

(i) I_t est une application linéaire.

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s]$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vii) $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

Remarquer que (v) montre que I_t est une isométrie.

On va montrer que l'on peut étendre le champ des intégrands au delà des processus simples grâce aux résultats de densité du paragraphe précédent et que l'opérateur obtenu vérifie encore toutes ces propriétés.

Proposition 2.11 *Soit $X \in \mathcal{L}^*$ et une suite de processus simples X^n convergeant vers X. Alors, la suite $I_t(X^n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. La limite ne dépend pas de la suite choisie (elle est notée $I_t(X)$ ou $\int_0^t X_s dM_s$ ou $(X.M)_t$), intégrale stochastique de X par rapport à la martingale M.*

Preuve : d'après la propriété (v) ci-dessus on calcule la norme L^2 de la suite $I_t(X^n)$:

$$\| I_t(X^n) - I_t(X^p) \|_2^2 = E[\int_0^t |X_s^n - X_s^p|^2 d\langle M\rangle_s] \to 0$$

pour tout $t > 0$ puisque $d(X^n, X^p) \to 0$. Il est clair par le même genre d'argument que changer de suite approchant X ne change pas cette limite :

$$\| I_t(X^n) - I_t(Y^n) \|_2 \to 0$$

en même temps que $d(X^n, Y^n) \leq d(X^n, X) + d(X, Y^n)$. □

On montre maintenant les propriétés :

Proposition 2.12 *Soit $X \in \mathcal{L}^*$ Alors :*

(i) I_t est une application linéaire.

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s]$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vi') $E[(I_t(X))^2/\mathcal{F}_s] = I_s^2(X) + E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vii) $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

Preuve : la plupart des propriétés s'obtiennent par passage à la limite dans L^2 des propriétés vérifiées par $I_t(X^n)$ pour tout n, comme par exemple (i) (ii) (iii) (iv) ; (pour (iv) noter que l'ensemble des martingales continues de carré intégrable est complet dans L^2).

(v) est une conséquence de (vi) avec $s = 0$.

(vi) Soit $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$ et l'on calcule :

$$E[\mathbf{1}_A(I_t(X) - I_s(X))^2] = \lim_n E[\mathbf{1}_A(I_t(X^n) - I_s(X^n))^2] =$$
$$\lim_n E[\mathbf{1}_A \int_s^t (X_u^n)^2 d\langle M\rangle_u] = E[\mathbf{1}_A \int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u]$$

puisque $d(X^n, 0) \to d(X, 0)$.
(vii) est une conséquence de (vi') et de la deuxième caractérisation du crochet (2.4). □

Proposition 2.13 *Pour tout temps d'arrêt S et T, $S \leq T$, et $t \geq 0$ on a :*

$$E[I_{t\wedge T}(X)/\mathcal{F}_S] = I_{t\wedge S}(X).$$

Si X et $Y \in \mathcal{L}^*$, presque sûrement :

$$E[(I_{t\wedge T}(X) - I_{t\wedge S}(X))(I_{t\wedge T}(Y) - I_{t\wedge S}(Y))/\mathcal{F}_S] = E[\int_{t\wedge S}^{t\wedge T} X_u Y_u d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_S].$$

Preuve : $I_t(X)$ est une martingale et on lui applique le théorème d'arrêt entre les temps d'arrêt bornés $S \wedge t$ et $T \wedge t$. Puis l'on remarque que $E[I_{t\wedge T}(X)/\mathcal{F}_S]$ est $\mathcal{F}_{S\wedge t}$ mesurable, donc égale à $E[I_{t\wedge T}(X)/\mathcal{F}_{S\wedge t}]$. C'est à dire exactement le premier point.

Elle est de plus de crochet $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$ donc $I_t(X)^2 - \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$ est une martingale ; on applique à nouveau le théorème d'arrêt entre les temps d'arrêt $S\wedge t$ et $T\wedge t$. C'est à dire

$$E[I_{T\wedge t}(X)^2 - I_{S\wedge t}(X)^2/\mathcal{F}_{S\wedge t}] = E[\int_{S\wedge t}^{T\wedge t} X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_{S\wedge t}].$$

On obtient alors le deuxième point par la même remarque que pour le premier sur la mesurabilité, puis par polarisation.
□

2.2 Variation quadratique

(cf [19], pages 141-145 ; [29], pages 58-60)

De même que l'on définit $\langle M\rangle_t$ comme limite en probabilité des sommes des écarts quadratiques de M, on définit la covariation quadratique de deux martingales continues de carré intégrable M et N : si π sont les partitions de $[0,t]$ on a

$$\langle M, N\rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} \text{proba} \sum_{t_i\in\pi} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}).$$

Il y a donc lieu, pour X et $Y \in \mathcal{L}^*(M)$, d'étudier le "crochet" $\langle I(X), I(Y)\rangle$. On rappelle d'abord quelques résultats utiles sur les crochets des martingales continues de carré intégrable.

Proposition 2.14 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable. Alors :*

(i) $|\langle M, N\rangle_t|^2 \leq \langle M\rangle_t \langle N\rangle_t$;

(ii) $M_t N_t - \langle M, N\rangle_t$ *est une martingale.*

Preuve : le (i) se montre simplement comme toute inégalité de Cauchy. Le (ii) se déduit de ce que, puisque $M + N$ est une martingale de carré intégrable, la différence $(M+N)^2 - \langle M+N\rangle_t$ est une martingale. □

Proposition 2.15 *Soit T un temps d'arrêt et M et N deux martingales continues de carré intégrable. Alors :* $\langle M^T, N\rangle = \langle M, N^T\rangle = \langle M, N\rangle^T$.

Preuve : voir Protter [29] th.25, page 61.

Soit π une partition de $[0,t]$.

$$\langle M^T, N\rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_i (M^T_{t_{i+1}} - M^T_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}).$$

La famille $t_i \wedge T$ est une partition de $[0, t \wedge T]$.

$$\langle M, N \rangle_{t\wedge T} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_i (M_{T\wedge t_{i+1}} - M_{T\wedge t_i})(N_{T\wedge t_{i+1}} - N_{T\wedge t_i}).$$

La différence entre ces deux sommes est nulle sur l'événement $\{T \geq t\}$ et sur le complémentaire se résume à

$$(M_T - M_{t_i})(N_{t\wedge t_{i+1}} - N_{T\wedge t_{i+1}})$$

l'indice i étant tel que $T \in [t_i, t_{t_{i+1}}]$. La continuité des processus en jeu montre que la limite est presque sûrement nulle, donc aussi en probabilité. □

Théorème 2.16 *(inégalité de Kunita-Watanabe) Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable, $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Alors presque sûrement :*

$$(6) \qquad (\int_0^t |X_s Y_s| d\langle M, N\rangle_s)^2 \leq \int_0^t |X_s|^2 d\langle M\rangle_s \int_0^t |Y_s|^2 d\langle N\rangle_s.$$

Preuve :

(i) on remarque d'abord l'inégalité presque sûre :

$$\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s \leq \frac{1}{2}(\int_s^t d\langle M\rangle_u + \int_s^t d\langle N\rangle_u)$$

conséquence de l'inégalité :

$$2\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \leq \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \sum_i (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2$$

où l'on passe à la limite en probabilité, donc presque sûrement pour une suite extraite.

Soit alors A le processus croissant $\langle M\rangle + \langle N\rangle$. Les processus croissants $\langle M\rangle, \langle N\rangle, \langle M, N\rangle$ sont tous absolument continus par rapport à A. On peut donc poser :

$$d\langle M, N\rangle_t = f(t)dA_t,\ d\langle M\rangle_t = g(t)dA_t,\ d\langle N\rangle_t = h(t)dA_t.$$

(ii) Pour tout a et b, on a :

$$\int_0^t (aX_s\sqrt{g(s)} + bY_s\sqrt{h(s)})^2 dA_s \geq 0.$$

Par la méthode classique de traitement des inégalités de Cauchy, il vient :

$$(7) \qquad (\int_0^t |X_s Y_s|\sqrt{g(s)h(s)}dA_s)^2 \leq \int_0^t |X_s|^2 d\langle M\rangle_s \int_0^t |Y_s|^2 d\langle N\rangle_s.$$

(iii) Pour tout a le processus $\langle aM + N\rangle$ est croissant, d'où :

$$\int_s^t (a^2 g(u) + 2af(u) + h(u))dA_u \geq 0, \forall s \leq t.$$

Comme A est croissant, ceci implique que l'intégrand est positif, soit $a^2 g(s) + 2af(s) + h(s) \geq 0\ \forall a \in \mathbb{R}$, c'est à dire $f(s) \leq \sqrt{g(s)h(s)}$. Ceci rapproché de (7) permet de conclure. □

Proposition 2.17 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable , $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Alors :*

$$\langle X.M, Y.N\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P} \ p.s. \tag{8}$$

et

$$E[\int_s^t X_u dM_u \int_s^t Y_u dN_u / \mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u / \mathcal{F}_s], \ \forall s \leq t, \ \mathbb{P} \ p.s. \tag{9}$$

Preuve : elle nécessite les lemmes préparatoires suivants :

Lemme 2.18 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable et pour tout n $X^n, X \in \mathcal{L}^*(M)$ tels que pour tout t :*

$$\lim_n \int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u = 0, \ \mathbb{P} \ p.s.$$

Alors :

$$\langle I^M(X^n), N\rangle_t \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \langle I^M(X), N\rangle_t, \ \mathbb{P} \ p.s.$$

Preuve du lemme : On cherche à établir le reste de Cauchy.

$$\begin{aligned} |\langle I^M(X^n), N\rangle_t - \langle I^M(X^p), N\rangle_t|^2 &= |\langle I^M(X^n - X^p), N\rangle_t|^2 \\ &\leq \langle I^M(X^n - X^p)\rangle_t \langle N\rangle_t = \int_0^t |X_u^n - X_u^p|^2 d\langle M\rangle_u \langle N\rangle_t \end{aligned}$$

l'inégalité provenant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les crochets (cf. la proposition 2.14 (i)). La convergence est alors immédiatement déduite de l'hypothèse. □

Lemme 2.19 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable et $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Alors pour presque tout t :*

$$\langle I^M(X), N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u \mathbb{P} \ p.s.$$

Preuve du lemme : soit une suite X^n de processus simples approchant X :

$$\lim_n E[\int_0^\infty |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u = 0.$$

A t fixé, on extrait une suite convergeant $\mathbb{P}$ $p.s.$: $\int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u \rightarrow 0$. Le lemme 2.18 montre alors :

$$\langle I^M(X^n), N\rangle_t \rightarrow \langle I^M(X), N\rangle_t \mathbb{P} \ p.s. \tag{10}$$

Or, pour les processus simples :

$$\langle I^M(X^n), N\rangle_t = \sum_i X_{t_i}^n \sum_{s_k \in [t_i t_{i+1}]} (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(N_{s_{k+1}} - N_{s_k})$$

qui tend vers $\int_0^t X_u^n d\langle M,N\rangle_u$ lorsque $\sup_k |s_{k+1}-s_k| \to 0$. Enfin,

$$(11) \qquad \begin{aligned} &|\int_0^t X_u^n d\langle M,N\rangle_u - \int_0^t X_u d\langle M,N\rangle_u|^2 = \\ &|\int_0^t (X_u^n - X_u) d\langle M,N\rangle_u|^2 \leq \int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u \langle N\rangle_t \end{aligned}$$

par l'inégalité K.W.(6) et l'on peut passer à la limite p.s. à droite par construction de X^n. Alors (11) tend vers zéro ; cette limite et la précédente (10) montrent le résultat. □

Preuve de la proposition

(i) En posant $N_1 = Y.N$, le lemme 2.19 donne :

$$\langle X.M, N_1\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N_1\rangle_u \text{ et } \langle M, Y.N\rangle_t = \int_0^t Y_u d\langle M,N\rangle_u$$

On conclut par composition des intégrations à variation finie.

(ii) La propriété est vraie pour les processus simples ; puis l'on passe à la limite en probabilité.

exo 1 feuille 5.

Proposition 2.20 *Soit M une martingale continue de carré intégrable et $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Alors $X.M$ est l'unique martingale continue de carré intégrable Φ nulle en $t=0$ telle que pour toute martingale continue de carré intégrable N on ait :*

$$\langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M,N\rangle_u \mathbb{P} \ p.s.$$

Preuve : $X.M$ vérifie effectivement cette relation : c'est le lemme 2.19. Soit alors Φ vérifiant les hypothèses de la proposition ; pour toute martingale continue de carré intégrable N :

$$\langle \Phi - X.M, N\rangle_t = 0, \ \mathbb{P} \ p.s.$$

En particulier si l'on choisit $N = \Phi - X.M$, il vient $\langle N\rangle_t = 0 \ \mathbb{P} \ p.s.$ soit

$$\Phi - X.M = 0, \ \mathbb{P} \ p.s.$$

□

Corollaire 2.21 *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable , $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$ et T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}$ p.s. :*

$$X_{t\wedge T} = Y_{t\wedge T} \text{ et } M_{t\wedge T} = N_{t\wedge T}.$$

Alors :

$$(X.M)_{t\wedge T} = (Y.N)_{t\wedge T}.$$

Preuve : soit H une martingale continue de carré intégrable ; par la proposition 2.15 :

$$\langle M - N, H\rangle^T = \langle M^T - N^T, H\rangle = 0,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

D'une part :

$$\forall H, \langle X.M - Y.N, H\rangle_{t\wedge T} = \int_0^{t\wedge T} X_u d\langle M, H\rangle_u - \int_0^{t\wedge T} X_u d\langle N, H\rangle_u$$

et d'autre part on tire de la proposition 2.15 et du lemme 2.19 :

$$\langle (X.M)^T, H\rangle = \langle X.M, H\rangle^T = \int_0^{t\wedge T} X_u d\langle M, N\rangle_u = \int_0^{t\wedge T} Y_u d\langle N, H\rangle_u$$

D'où l'on déduit de 2.20 que :

$$\langle X.M - Y.N, H\rangle^T = 0,\ \mathbb{P}\ p.s. \tag{12}$$

Ainsi $(X.M - Y.N)^T$ est-elle une martingale orthogonale à toute martingale continue de carré intégrable et en particulier à elle-même, elle est donc nulle. □

Proposition 2.22 *L'intégrale stochastique est associative dans le sens suivant : si $H \in \mathcal{L}^*(M)$ et $G \in \mathcal{L}^*(H.M)$, alors $GH \in \mathcal{L}^*(M)$ et l'on a :*

$$G.(H.M) = GH.M$$

Preuve en exercice (3, feuille 4). Voir Protter th. 19 page 55 ou K.S. corollaire 2.20, page 145. □

2.3 Intégration par rapport aux martingales locales

Ce corollaire va permettre d'étendre le champs des intégrateurs et des intégrands. Dans tout ce paragraphe, M est une martingale locale continue.

Définition 2.23 *Soit $\mathcal{P}^*(M)$ l'ensemble des processus progressivement mesurables tels que*

$$\forall t,\ \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

Définition 2.24 *Soit $X \in \mathcal{P}^*(M)$ et M une martingale locale de suite localisante S_n. Soit $R_n(\omega) = \inf\{t / \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n\}$ et $T_n = R_n \wedge S_n$ On définit alors l'intégrale stochastique de X par rapport à M :*

$$X.M = X^{T_n}.M^{T_n}\ sur\ \{t \leq T_n(\omega)\}.$$

Proposition 2.25 *C'est une bonne définition au sens où si*
$n \leq m$, $X^{T_n}.M^{T_n} = X^{T_m}.M^{T_m}$ sur $\{t \leq T_m(\omega)\}$ et le processus $X.M$ ainsi défini est une martingale locale.

Preuve : Le corollaire terminant la section précédente dit que si $t \leq T_m$:

$$(X^{T_m}.M^{T_m})_t^{T_n} = (X^{T_m \wedge T_n}.M^{T_m \wedge T_n})_t = (X^{T_m}.M^{T_m})_t.$$

De plus, à cause de ce corollaire, cette définition ne dépend pas de la suite choisie Enfin, par construction, pour tout n, $(X.M)^{T_n}$ est une martingale ce qui veut dire exactement que $X.M$ ainsi définie est une martingale locale. □

Cette intégrale stochastique ne garde pas toutes les "bonnes" propriétés. En particulier, on perd tout ce qui fait intervenir les espérances (en général, $X.M$ n'est pas intégrable) donc les espérances conditionnelles. En revanche :

Proposition 2.26 *Soit M une martingale locale continue et $X \in \mathcal{P}(M)$. Alors $X.M$ est l'unique martingale locale Φ telle que pour toute martingale N continue de carré intégrable :*

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u.$$

Preuve : C'est la version "locale" de la proposition 2.20. Sur l'événement $\{t \leq T_n\}$, $X.M = X^{T_n}.M^{T_n}$ et vérifie pour tout t, tout n et toute martingale N,

$$\langle X^{T_n}.M^{T_n}, N \rangle_t = \int_0^t X_{T_n \wedge s} d\langle M^{T_n}, N \rangle_s$$

c'est à dire $\int_0^{T_n \wedge t} X_u d\langle M, N \rangle_u$ qui converge presque sûrement vers $\int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u$ quand n tend vers l'infini.

Réciproquement, pour toute martingale N on a l'égalité presque sûre $\langle \Phi - X.M, N \rangle_t = 0$. En particulier pour $N = (\Phi - X.M)^{T_n}$. Donc, pour toute suite localisante, la martingale $(\Phi - X.M)^{T_n}$ est de crochet nul ; elle est donc nulle et presque sûrement $\Phi = X.M$.
On a utilisé implicitement que que $X^T.M = (X.M)^T$ ainsi que le résultat sur l'arrêt des crochets 2.15. □

2.4 Formule de Itô

(cf [19], pages 149-156 et [29], pages 70-83)

C'est un outil qui permet du calcul intégrodifférentiel, que l'on appelle communément "calcul de Itô". C'est du calcul sur les trajectoires des processus, donc la connaissance de ce qui se passe pour une réalisation ω de l'aléa.

On rappelle d'abord ce qu'est l'intégrale par rapport à des processus à variation finie.

Définition 2.27 *Soit A un processus continu. On dit qu'il est* **à variation finie** *si pour tout t étant données les partitions π de $[0, t]$ on a :*

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{t_i \in \pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| < \infty \ \mathbb{P} \ p.s.$$

De tels processus, à ω fixé, donnent lieu à des intégrales de Stieltjes.

Théorème 2.28 *(cf. Protter, th. 31 page 71) Soit A un processus continu à variation finie, et f de classe C^1. Alors, $f(A_.)$ est un processus continu à variation finie et :*

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s)dA_s.$$

Il s'agit simplement de la formule de Taylor à l'ordre 1.

Ces processus avec les martingales locales continues engendrent un ensemble assez vaste d'intégrateurs que l'on va maintenant considérer.

Définition 2.29 *On appelle* **semi-martingale continue** *un processus X sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ défini $\mathbb{P}$ p.s. par :*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \ \forall t \geq 0,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, M est une martingale locale continue et $A = A^+ - A^-$ avec A^+ et A^- processus continus croissants à variation finie adaptés.

Rappel : sous l'hypothèse AOA, les prix sont des semi-martingales, cf. [6].

2.4.1 Règle de Itô, ou formule de changement de variable

Théorème 2.30 *(dû à Itô, 1944 et à Kunita-Watanabé, 1967) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et X une semi-martingale continue. Alors, $\mathbb{P}$ p.s. et pour tout t positif :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X_s)d\langle M\rangle_s$$

où la première intégrale est une intégrale stochastique et les deux autres des intégrales de Stieltjes.

Notation différentielle : on dit parfois que la différentielle stochastique de $f(X_t)$ est :

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f"(X_s)d\langle X\rangle_s,$$

d'où la possibilité d'un calcul différentiel stochastique. On peut mémoriser cette formule en se disant qu'il s'agit d'une espèce de formule de Taylor à l'ordre 2.
Preuve: elle se fait en quatre étapes :

on "localise" pour se ramener au cas borné,

on effectue un développement de Taylor de la fonction f à l'ordre 2,

on étudie le terme qui donne lieu à l'intégrale stochastique, et enfin celui en variation quadratique.

(1) Soit le temps d'arrêt

$$\begin{aligned} T_n &= 0 \text{ si } |X_0| \geq n, \\ & \quad \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n \text{ ou } |A_t| \geq n \text{ ou } \langle M\rangle_t \geq n\} \\ & \quad \text{ et l'infini sinon.} \end{aligned}$$

Cette suite de temps d'arrêt est évidemment croissante vers l'infini presque sûrement. Comme la propriété à démontrer est trajectorielle, il suffit de la montrer pour le processus arrêté en T_n (puis faire tendre n vers l'infini). On peut donc supposer les processus $M, A, \langle M\rangle$ et la variable aléatoire X_0 bornés. Le processus X est aussi lui-même borné et l'on peut considérer f à support compact : $f, f', f"$ et $f^{(3)}$ sont bornées.

(2) Pour atteindre cette formule, et en particulier le terme intégrale stochastique, on découpe l'intervalle $[0, t]$ en une partition $\pi = (t_i, i = 1, ..., n)$ et l'on étudie les accroissements de $f(X_t)$ sur cette partition :

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})) = \\ \sum_{i=0}^{n-1} f'(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) &+ \sum_{i=0}^{n-1} f'(X_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2, \end{aligned} \tag{13}$$

où $\eta_i \in [X_{t_i}, X_{t_{i+1}}]$.
Il est clair que le deuxième terme converge vers l'intégrale de Stieltjes de $f'(X_s)$ par rapport à A. Il n'y a là rien de stochastique.

(3) Pour le premier, considérons le processus simple associé à la partition π :

$$Y_s^\pi = f'(X_{t_i}) \text{ si } s \in]t_i, t_{i+1}].$$

Alors ce premier terme est égal par définition à $\int_0^t Y_s^\pi dM_s$. Or,

$$\int_0^t |Y_s^\pi - f'(X_s)|^2 d\langle M\rangle_s = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(X_{t_i}) - f'(X_s)|^2 d\langle M\rangle_s.$$

L'application $s \mapsto f'(X_s)$ étant continue, l'intégrand ci-dessus converge presque sûrement vers zéro. Le fait que f' est bornée et le théorème de convergence dominée permet de montrer que Y_s^π converge vers $f'(X_s)$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times d\langle M\rangle)$: par définition, le premier terme converge dans L^2 vers l'intégrale stochastique

$$\int_0^t f'(X_s) dM_s.$$

(4) **Terme en variation quadratique** : on le décompose en trois termes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \tag{14}$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2$$

Ce dernier terme est majoré par $\|f"\| \sup_i |\Delta_i A| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A|$ dont le premier facteur et le troisième sont bornés par hypothèse ; et $\sup_i |\Delta_i A|$ tend vers zéro presque sûrement puisque A est continu.

On majore le second terme par $\|f"\| \sup_i |\Delta_i M| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A|$ et qui converge de la même façon presque sûrement vers zéro puisque M est continue.

Le premier terme de (14) diffère "peu" de

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2.$$

En effet :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(f"(\eta_i) - f"(X_{t_i}))(\Delta_i M)^2 \leq \sup_i |f"(\eta_i) - f"(X_{t_i})| \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i M)^2$$

dont le premier facteur tend presque sûrement vers zéro par continuité de $f"$ et le second tend vers $\langle M\rangle_t$, par définition, en probabilité donc une suite extraite converge presque sûrement. Le produit tend alors vers zéro dans L^2 par le théorème de convegence dominée. On a donc à étudier

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

que l'on compare à $\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})$ dont la limite dans L^2 est $\int_0^t f"(X_s)d\langle M\rangle_s$ puisque

- par continuité le processus simple égal à $f"(X_{t_i})$ sur $]t_i, t_{i+1}]$ converge presque sûrement vers $f"(X_s)$;

- et le théorème de convergence dominée permet de conclure.

Soit donc la différence :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})]$$

dont on étudie la limite dans L^2 ; dans l'espérance du carré soit les termes rectangles :

$$i < k \ : \ E[f"(X_{t_i})f"(X_{t_k})(\Delta_i M^2 - \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})(\Delta_k M^2 - \langle M\rangle_{t_k}^{t_{k+1}})]$$

Par espérance conditionnelle en $\mathcal{F}_{t_i}$ on déduit que ces termes sont nuls puisque $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale. Restent les termes carrés :

$$\begin{aligned}\sum_i E[(f"(X_{t_i}))^2(\Delta_i M^2 - \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2] &\leq 2\|f"\|_\infty^2 \sum_i [E(\Delta_i M^4) + E((\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2)] \\ &\leq 2\|f"\|_\infty^2 E[(\sup_i \Delta_i M^2 \sum_i \Delta_i M^2) + \sup_i(\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})\langle M\rangle_t]\end{aligned}$$

Dans la majoration, $\sup_i \Delta_i M^2$ et $\sup_i(\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})$ sont bornés et convergent presque sûrement vers zéro par continuité ; $\sum_i \Delta_i M^2$ converge vers $\langle M\rangle_t$ en probabilité par définition ; on a donc globalement par le théorème de convergence dominée la convergence vers zéro dans L^1 au moins pour une suite extraite.

En conclusion, la suite des sommes (13) converge en probabilité vers le résultat annoncé dans le théorème ; on conclut avec la convergence presque sûre d'une suite extraite.

2.4.2 Prolongement et applications

On peut généraliser assez largement ce résultat à des fonctions de semi-martingales vectorielles qui dépendent également du temps.

Proposition 2.31 *Soit M un vecteur de dimension d de martingales locales continues, A un vecteur de dimension d de processus continus adaptés à variation finie et X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable ; soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. On pose $X_t = X_0 + M_t + A_t$. Alors, $\mathbb{P}$ presque sûrement :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_t f(s, X_s) ds + \int_0^t \partial_i f(s, X_s) dM_s^i + \int_0^t \partial_i f(s, X_s) dA_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{ij} \partial_{ij}^2 f(s, X_s) d\langle M^i, M^j\rangle_s \end{aligned}$$

Preuve : à rédiger en problème.

Lorsque f et ses dérivées sont bornées et que M est une martingale de carré intégrable, le terme intégrale stochastique ci-dessus est une "vraie" martingale, nulle à l'origine et il vient :

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \partial_t f(s, X_s) ds - \int_0^t \partial_i f(s, X_s) dA_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{ij}^2 f(s, X_s) d\langle M^i, M^j\rangle_s \in \mathcal{M}$$

Par exemple, si $A = 0$ et $X = M$ est le brownien, on obtient :

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \mathcal{L} f(s, X_s) ds \in \mathcal{M}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{L} = \partial_t + \frac{1}{2}\sum_i \partial_{ii}^2$.

De Itô on peut déduire la solution de ce que l'on appelle "l'équation de la chaleur", c'est à dire l'équation aux dérivées partielles :

$$f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d),\ \partial_t f = \sum_i \frac{1}{2} \partial_{ii}^2 f \text{ et } f(0, x) = \varphi(x)$$

où $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et dont l'unique solution est donnée par

$$f(t, x) = E[\varphi(x + B_t)]$$

Il est facile de voir que cette fonction est effectivement solution en utilisant la formule de Itô ; l'unicité demande un peu plus de travail.

Pour le corollaire suivant, on donne la notation-définition suivante :

Définition 2.32 *si X est la semi-martingale réelle continue $X_0 + M + A$, on note $\langle X \rangle$ ce qui en fait est $\langle M \rangle$. De même pour deux semi-martingales continues X et Y, on note $\langle X, Y \rangle$ le crochet de leurs parties martingales.*

Corollaire 2.33 *Soient deux semi-martingales continues réelles X et Y ; alors :*

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y \rangle_t.$$

Il s'agit de ce que l'on appelle la **formule d'intégration par parties**.

Preuve : en exercice ; c'est une simple application de la formule de Itô.

3 Exemples d'équations différentielles stochastiques

Il y a d'autres applications de la formule de Itô : une grande utilité du mouvement Brownien que l'on peut mettre ici en évidence est qu'il sert à modéliser un bruit additif, une erreur de mesure dans une équation différentielle. Supposant par exemple une dynamique donnée par :

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),\ t \in [0,T],\ x(0) = x.$$

Mais on n'a pas exactement ceci, à la vitesse s'ajoute un petit bruit, et l'on modélise ainsi la dynamique :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t,\ t \in [0,T],\ X_0 = x,$$

que l'on appelle une **équation différentielle stochastique**. On n'en traitera pas la théorie dans ce cours, mais on en donne un autre exemple ci-dessous.

3.1 Exponentielle stochastique

Si l'on considère la fonction de classe C^∞, $f : x \mapsto e^x$, et une semi-martingale continue nulle en 0, X, on peut appliquer la formule de Itô au processus $Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$. Il vient :

$$Z_t = 1 + \int_0^t [\exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)(dX_s - \frac{1}{2}d\langle X\rangle_s) + \frac{1}{2}\exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)d\langle X\rangle_s].$$

Soit après simplification :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)dX_s,$$

ou bien en notation différentielle :

$$dZ_s = Z_s dX_s.$$

C'est un autre exemple d'équation différentielle (stochastique). On a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s \tag{15}$$

et elle s'explicite en :

$$Z_t(X) = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t).$$

La formule de Itô montre que ce processus est effectivement solution de l'équation demandée.

Exercice : montrer l'unicité en supposant qu'il exsiste deux solutions Z et Z' et en appliquant la formule de Ito au quotient $Y_t = \frac{Z_t}{Z'_t}$.

Définition 3.2 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. On appelle* **exponentielle stochastique** *de X, notée $\mathcal{E}(X)$, l'unique solution de l'équation différentielle (15).*

Exemple : Soit $X = aB$ ou a est un réel et B le mouvement brownien ; alors $\mathcal{E}_t(aB) = \exp(aB_t - \frac{1}{2}a^2t)$ parfois appelé le "mouvement brownien géométrique".

On donne quelques résultats sur ces exponentielles stochastiques.

Théorème 3.3 *(cf [29], th. 37) Soit X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$. Alors*

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y \rangle).$$

Preuve : on pose $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$ et l'on applique la formule d'intégration par parties (2.33):

$$U_tV_t - 1 = \int_0^t U_s dV_s + V_s dU_s + d\langle U, V \rangle_s$$

En posant $W = UV$ et en utilisant la définition différentielle de l'exponentielle stochastique on obtient le résultat. □

Corollaire 3.4 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors l'inverse $\mathcal{E}_t^{-1}(X) = \mathcal{E}_t(-X + \langle X \rangle)$*

Preuve en exercice.

On peut considérer des équations différentielles stochastiques linéaires un peu plus générales.

Théorème 3.5 *(cf [29], th. 52, page 266.) Soit Z et H deux semi-martingales continues réelles, $Z_0 = 0$. Alors l'équation différentielle stochastique :*

$$X_t = H_t + \int_0^t X_s dZ_s$$

admet pour unique solution

$$\mathcal{E}_H(Z)_t = \mathcal{E}_t(Z)(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(Z)(dH_s - d\langle H, Z \rangle)_s).$$

Preuve : on utilise la méthode de variation des constantes. On suppose que la solution est de la forme :

$$X_t = \mathcal{E}_t(Z)C_t$$

que l'on dérive par la formule de Itô :

$$dX_t = C_t d\mathcal{E}_t(Z) + \mathcal{E}_t(Z)dC_t + d\langle \mathcal{E}(Z), C \rangle_t$$

soit en remplaçant $d\mathcal{E}_t(Z)$ par sa valeur et en utilisant la forme particulière de X :

$$dX_t = X_t dZ_t + \mathcal{E}_t(Z)[dC_t + d\langle Z, C \rangle_t].$$

Si X est solution de l'équation demandée, il vient par identification des deux formes de l'élément différentiel dX_t :

$$dH_t = \mathcal{E}_t(Z)[dC_t + d\langle Z, C\rangle_t].$$

Or, puisque $\mathcal{E}_t(Z)$ est une exponentielle et que $(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)$ est fini, $\mathcal{E}_t^{-1}(Z)$ existe et

$$dC_t = \mathcal{E}_t^{-1}(Z)dH_t - d\langle Z, C\rangle_t$$

d'où il vient :

$$d\langle Z, C\rangle_t = \mathcal{E}_t^{-1}(Z)d\langle H, Z\rangle_t$$

soit finalement :

$$dC_t = \mathcal{E}_t^{-1}(Z)[dH_t - d\langle H, Z\rangle_t].$$

(On a utilisé que la covariation de C et Z est la même que celle de $\mathcal{E}_t(Z)^{-1}.H$ et Z). □

3.2 Ornstein-Uhlenbeck

Un autre exemple important utilisé en finance (par exemple pour modéliser la dynamique des taux) est celui de l'équation d'**Ornstein-Uhlenbeck** (cf [19], page 358) :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t,\ t \in [0, T],\ X_0 = x$$

avec a et b des processus $\mathcal{F}-$adaptés, a presque sûrement intégrable en temps et $b \in L^2(\Omega \times [0, T], d\mathbb{P} \otimes dt)$. Lorsque ce sont des constantes α et β, on obtient la solution :

$$X_t = e^{-\alpha t}(x + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s).$$

On peut également montrer :

$$\begin{aligned}
m(t) &= E(X_t) = m(0)e^{-\alpha t} \\
V(t) &= Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} + (V(0) - \frac{\sigma^2}{2\alpha})e^{-2\alpha t} \\
\rho(s, t) &= cov(X_s, X_t) = [V(0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha(t \wedge s)} - 1)]e^{-\alpha(t+s)}
\end{aligned}$$

3.3 Aperçu sur des EDS plus générales

De façon générale, on a des conditions suffisantes d'existence voire d'unicité de solution de l'équation avec condition initiale $X_t = x$:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u)du + \sigma(u, X_u)dW_u \tag{16}$$

avec par exemple pour hypothèses que les coefficients sont :
(i) continus, de croissance au plus linéaire en espace,
(ii) tels qu'il existe une solution à l'équation, unique en loi, c'est à dire **solution faible** : il existe une probabilité $\mathbb{P}_x$ sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle

. X est $\mathcal{F}-$adaptée continue, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

. si $S_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$, X^{S_n} vérifie les conditions d'existence des solutions fortes (c'est à dire solutions trajectorielles).

La limite croissante des temps S_n s'appelle le temps d'explosion. On a $\mathbb{P}_x$-presque sûrement pour tout n

$$X_{t\wedge S_n} = x + \int_t^{t\wedge S_n} b(u, X_u)du + \int_t^{t\wedge S_n} \sigma(u, X_u)dW_u.$$

Pour plus de précision, je cite le théorème d'existence 6 page 194 de [29].

Théorème 3.6 *Let Z a semimartingale with $Z_0 = 0$ and let $f :\ \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ be such that*

(i) for fixed x, $(t, \omega) \mapsto f(t, x, \omega)$ is adapted càdlàg,

(ii) for each (t, ω), $|f(t, x, \omega)-f(t, y, \omega)| \leq K(\omega)|x-y|$ for some finite random variable K. Let X_0 be finite and $\mathcal{F}_0$-measurable. Then the equation

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, ., X_{s-})dZ_s$$

admits a solution. This solution is unique and it is a semimartingale.

Ou encore le théorème 2.5 page 287 de [19].

Théorème 3.7 *Let the EDS*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

such that the coefficient b and σ are locally Lipschitz continuous in the space variable; i.e. for every integer $n \geq 1$ there exists a constant K_n such that for every $t \geq 0$, $\|x\| \leq n$, and $\|y\| \leq n$

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K_n\|x - y\|.$$

Then strong uniqueness holds.

3.4 Lien avec les EDP. Problème de Dirichlet

(cf [19] 5.7 pages 363 et sq.)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.8 *Un opérateur différentiel $\mathcal{A} = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\partial^2_{ij}$ d'ordre 2 est dit elliptique en x si*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d_*,\ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j > 0.$$

Si $\mathcal{A}$ est elliptique en tout point de D, on dit qu'il est elliptique dans D.

S'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta\|\xi\|^2,$$

on dit qu'il est uniformément elliptique.

Le **problème de Dirichlet** est celui de trouver une fonction u de classe C^2 sur D ouvert borné, de valeur f sur ∂D, et vérifiant dans D :

$$\mathcal{A}u - ku = -g$$

avec $\mathcal{A}$ elliptique, $k \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^+)$, $g \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$.

Proposition 3.9 *(Proposition 7.2, page 364 [19])*
Soit u solution du problème de Dirichlet $(\mathcal{A}, D)$ et X solution de (16) avec l'opérateur $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} \sigma_l^i \sigma_l^j(x)\partial_{ij}^2 + \nabla.b(x)$; T_D le temps de sortie de D par X. Si

$$E_x(T_D) < \infty \tag{17}$$

pour tout $x \in D$, alors pour tout $x \in \bar{D}$,

$$u(x) = E_x[f(X_{T_D})\exp(-\int_0^{T_D} k(X_s)ds) + \int_0^{T_D} g(X_t)\exp(-\int_0^t k(X_s)ds)dt).$$

Preuve en exercice (problème 7.3 de [19], corrigé page 393).
Remarquons d'abord que la continuité de X fait que $X_{T_D} \in \partial D$.
Indication : montrer que

$$M : t \mapsto u(X_{t\wedge T_D})\exp\left(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds\right) + \int_0^{t\wedge T_D} g(X_s)\exp\left(-\int_0^s k(X_u)du\right)ds, t \geq 0$$

est une martingale uniformément intégrable pour $\mathbb{P}_x$: on calcule $E_x(M_0) = E_x(M_\infty)$; sur $\{t < T_D\}$, on fait la différentielle de Itô de M et on utilise que sur $D, \mathcal{A}u - ku + g = 0$. $M_0 = u(x)$ car $X_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$,

$$dM_t = \exp(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds)[\mathcal{A}u(X_{t\wedge T_D})dt + \nabla u(X_{t\wedge T_D})\sigma(t, X_{t\wedge T_D})dW_t + g(X_{t\wedge T_D}) - (k.u)(X_{t\wedge T_D})dt,$$

les fonction ∇u et σ sont continues donc bornées sur le compact $\bar{D}$, donc le deuxième terme ci-dessus est une martingale, de plus les autres termes se simplifient puisque $\mathcal{A}u - ku + g = 0$ et pour tout $t, E_x[M_t] = u(x)$.

Cette martingale est uniformément intégrable car bornée dans L^2, on peut faire tendre t vers l'infini et appliquer le théorème d'arrêt puisque $E_x[T_D] < \infty$. □

Remarque 3.10 *(Friedman, 1975)*
Une condition suffisante pour avoir l'hypothèse (17) est $\exists l, \exists \alpha \ : \ a_{l,l}(x) \geq \alpha > 0$. Cette condition est plus forte que l'ellipticité, mais moins forte que l'uniforme ellipticité dans D.

on pose :

$$b^* = \max\{|b_l(x)|, x \in \bar{D}\}, q = \min\{x_l, x \in \bar{D}\},$$

on choisit $\nu > 4b^*/\alpha, h(x) = -\mu\exp(\nu x_l), x \in D$, μ à choisir plus tard. Alors h est de classe C^∞, et $-\mathcal{A}h(x)$ se calcule et se minore :

$$-\mathcal{A}h(x) = (\frac{1}{2}\nu^2 a_{ll} + \nu b_l(x))\mu e^{\nu x_l} \geq (\frac{8(b^*)^2}{\alpha} - \frac{4b^*}{\alpha}b^*)\mu e^{\nu x_l} \geq \frac{4(b^*)^2}{\alpha}\mu e^{\nu q} \geq 1.$$

On choisit alors μ assez grand pour que $-\mathcal{A}h(x) \geq 1$; $x \in D$, h et ses dérivées sont bornées dans D, et on peut appliquer Itô à h

$$h(X_t^{T_D}) = h(x) + \int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds + \int_0^{t\wedge T_D} \nabla h(X_s)\sigma(X_s)dW_s.$$

On en tire

$$t \wedge T_D \leq h(x) - h(X_t^{T_D}) = -\int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds$$

à une martingale uniformément intégrable près. Donc $E_x[t \wedge T_D] \leq 2\|h\|_\infty$ et l'on fait tendre t vers l'infini.

3.5 Modèle de Black et Scholes

Ce modèle est typiquement celui d'une exponentielle stochastique à coefficients constants. On suppose que l'actif risqué est solution de l'EDS

$$dS_t = S_t b dt + S_t \sigma dW_t, S_o = s,$$

le coefficient b s'appelle la "tendance" (trend) et σ la "volatilité". D'après ce qui précède, cette EDS admet la solution unique explicite :

$$S_t = s \exp[\sigma W_t + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t].$$

Remarquons que $\log S_t$ suit une loi gaussienne.

Définition 3.11 *On appelle* **probabilité neutre au risque** *toute probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que tous les prix sont des $(\mathcal{F}, Q)-$martingales.*
Un marché est **viable** *si l'hypothèse AOA est vérifiée. Une condition suffisante est l'existence d'au moins une probabilité neutre au risque.*
Un marché est **complet** *dès que pour tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ il existe θ stochastiquement intégrable par rapport au vecteur des prix tel que $X = E(X) + \int_0^T \theta_t dS_t$.*

Le marché du modèle de Black et Scholes est viable et complet avec l'unique probabilité neutre au risque

$$Q = L_T\mathbb{P}, dL_t = -L_t\sigma^{-1}(b - r)dW_t, t \in [0, T], L_0 = 1.$$

Définition 3.12 *On appelle option d'achat ("call") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 une somme q qui lui donne la possibilité d'acheter au temps 1 l'action au prix K sans en avoir l'obligation. Si en $T, S_T > K$, il exerce son droit et gagne $S_T - K - q$. Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu q. Globalement, il gagne $(S_T - K)^+ - q$.*

On appelle option de vente ("put") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 une somme q qui lui donne la possibilité de vendre au temps 1 l'action au prix K sans en avoir l'obligation. Si en $T, S_T < K$, il exerce son droit et gagne $K - S_T - q$. Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu q. Globalement, il gagne $(K - S_T)^+ - q$.

Le problème est alors de trouver un prix "équitable" (*fair price*), q, entre l'acheteur et le vendeur de ce contrat. C'est l'objet de la **formule de Black et Scholes**
Pour ce faire, on fait l'hypothèse que le portefeuille de couverture de cet objectif, θ, est tel qu'il existe une fonction C de classe $(1,2)$ telle que la valeur est :

$$V_t(\theta) = C(t, S_t). \tag{18}$$

Par ailleurs, θ est le couple (a,d) et on a

$$V_t(\theta) = a_t S_t^0 + d_t S_t = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \theta_s dS_s. \tag{19}$$

Avec cette "politique" θ, le vendeur de l'option (par exemple $(S_T - K)^+$) pourra "couvrir" l'option à l'aide du prix initial obtenu $q = V_0$: $V_T(\theta) = C(T, S_T)$.
On a deux manières de calculer la différentielle de cette valeur que l'on identifie :

$$dV_t(\theta) = \partial_t C(t,S_t)dt + \partial_x C(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2}C(t,S_t)S_t^2\sigma^2 dt,$$

à partir de (18) et à partir de (19) :

$$dV_t(\theta) = ra_t S_t^0 dt + d_t S_t(bdt + \sigma dW_t).$$

L'identification donne deux équations, en sus de (19) qui n'est autre que $C(t, S_t)$:

$$\begin{aligned} &\partial_t C(t,S_t) + bS_t\partial_x C(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2}C(t,S_t)S_t^2\sigma^2 = ra_t S_t^0 + d_t S_t b \\ &\partial_x C(t,S_t)S_t\sigma = d_t S_t \sigma. \end{aligned} \tag{20}$$

On obtient ainsi le portefeuille :

$$d_t = \partial_x C(t,S_t) \ ; \ a_t = \frac{C(t,S_t) - S_t\partial_x C(t,S_t)}{S_t^0}. \tag{21}$$

Pour connaitre explicitement le portefeuille, il reste à trouver la fonction C solution de l'EDP, obtenue en utilisant la première équation de (20) :

$$\partial_t C(t,x) + rx\partial_x C(t,x) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2}C(t,x)x^2\sigma^2 = rC(t,x),$$

$$C(T,x) = (x-K)^+, x \in \mathbb{R}^+.$$

On peut remplacer S_t par $x \in \mathbb{R}^+$ car c'est une var lognormale donc à support dans tout $\mathbb{R}^+$. Ceci se résout par la **formule de Feynman-Kac**. On pose

$$dY_s = Y_s(rds + \sigma dW_s), Y_t = x.$$

Alors $Y_s = x\exp[\sigma(W_s - X_t) - (s-t)(\frac{1}{2}\sigma^2 + r)]$ noté $Y_s t, x$ et

$$C(t,x) = E_x[e^{-r(T-t)}(Y_T^{t,x} - K)^+]$$

est la solution attendue, le portefeuille étant donné par les équations (21). La célèbre formule de Black-Scholes permet un calcul explicite de cette fonction, en posant φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard :

$$C(t,x) = x\varphi\left(\frac{\log(x/K) + (T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\varphi\left(\frac{\log(x/K) + (T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Le prix initial q de l'option est alors donné par $C(0,x)$.

De fait, on résout plutôt avec le changement de (variable,fonction) :

$$x = e^y, y \in \mathbb{R}\ ;\ D(t,y) = C(t,e^y)$$

qui permet de se ramener au problème de Dirichlet

$$\partial_t D(t,y) + r\partial_y D(t,y) + \frac{1}{2}\partial^2_{y^2} D(t,y)\sigma^2 = rD(t,y), y \in \mathbb{R},$$

$$D(T,y) = (e^y - K)^+, y \in \mathbb{R},$$

associé à l'équation différentielle stochastique :

$$dX_s = rds + \sigma dW_s, s \in [t,T], X_t = y.$$

C'est exactement ce que l'on a vu dans la proposition 3.9, avec $g = 0$, $f(x) = (e^x - k)^+$, $k(x) = r$. *Donc,*

$$D(t,y) = E_y[e^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+],$$

d'où la formule explicite car la loi de X_T *est une gaussienne.*

Le prix au temps t est $C(t,S_t) = E_Q e[^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+/\mathcal{F}_t]$ dont le calcul est simple : la loi de X_T sachant $\mathcal{F}_t$ est une gaussienne de moyenne $S_t + r(T-t)$ et de variance $\sigma^2(T-t)$.

4 Changement de probabilité et problème de martingales

La motivation de ce chapitre est la suivante : les martingales, et les martingales locales, sont des outils puissants, et cela vaut donc la peine de modéliser la réalité en sorte que les processus en jeu soient des martingales, au moins locales. Ainsi, pour l'application du calcul stochastique aux finances, les données sont celles d'un jeu de processus qui modélisent l'évolution dans le temps des prix des actions en cours sur le marché financier, et l'on peut légitimement se poser la question : est ce qu'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel les prix sont des martingales ? Précisément, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ qui donne cette propriété ? D'où les deux problèmes abordés dans ce chapitre :

- comment passer d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de façon simple, y a-t-il une densité $\frac{d\mathbb{P}}{dQ}$? comment se transforme alors le mouvement Brownien ? et c'est le théorème de Girsanov,

- étant donnée une famille de processus adaptés sur l'espace probabilisable filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous ces processus soient des martingales sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, et c'est ce que l'on appelle un problème de martingales.

On se place donc a priori sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement Brownien B, $B_0 = 0$ de dimension d. La filtration est càdlàg et l'on note $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ les martingales relatives à $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

4.1 Théorème de Girsanov

([19] 3.5, p 190-196 ; [29] 3.6, p 108-114)

Soit X un processus mesurable adapté dans $\mathcal{P}(B)$ c'est à dire que pour tout T :

$$\int_0^T \| X_s \|^2 \, ds < +\infty \ \mathbb{P} \ p.s.$$

On peut donc définir la martingale locale $X.B$ et son exponentielle de Doléans :

$$\mathcal{E}_t(X.B) = \exp[\int_0^t (X_s^i dB_s^i - \frac{1}{2} \| X_s \|^2 \, ds)],$$

solution de l'EDS

(22) $$dZ_t = Z_t X_t^i dB_t^i \ ; \ Z_0 = 1,$$

qui est aussi une martingale locale.

Sous certaines conditions, $\mathcal{E}_.(X.B)$ est une "vraie" martingale, alors pour tout t, $E[Z_t] = 1$, ce qui permet d'effectuer le changement de probabilité sur la tribu $\mathcal{F}_t$: $Q_t = Z_t.\mathbb{P}$ c'est à dire si $A \in \mathcal{F}_t$, $Q_t(A) = E_{\mathbb{P}}[1_A Z_t]$.

Théorème 4.1 *(Girsanov, 1960 ; Cameron-Martin, 1944) Si le processus* $Z = \mathcal{E}(X.B)$ *solution de (22) appartient à* $\mathcal{M}(\mathbb{P})$*, alors si* $Q_T = Z_T.\mathbb{P}$ *:*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds,\ t \leq T$$

est un mouvement Brownien sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, Q_T)$.

La preuve nécessite un lemme et une proposition préparatoires.

Lemme 4.2 *Soit* $T \geq 0$ *et* Z *élément de* $\mathcal{M}(\mathbb{P})$*. Soit* $0 \leq s \leq t \leq T$ *et une variable* Y *aléatoire* $\mathcal{F}_t-$*mesurable dans* $L^1(Q)$*, alors*

$$\tilde{E}_T(Y/\mathcal{F}_s) = \frac{E(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}$$

où $\tilde{E}_T$ *note l'espérance sous* Q *restreinte à* $\mathcal{F}_T$.

Remarquons qu'il s'agit en quelque sorte d'une formule de Bayes.
Preuve : Soit $A \in \mathcal{F}_s$, il vient :

$$\tilde{E}_T(1_A \frac{E(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}) = E(1_A E(YZ_t/\mathcal{F}_s))$$

car sur $\mathcal{F}_s,\ Q = Z_s\mathbb{P}$. Puis :

$$E[1_A E(YZ_t/\mathcal{F}_s)] = E(1_A YZ_t)$$

par définition de l'espérance conditionnelle et enfin par définition de Q_T,

$$E(1_A YZ_t) = \tilde{E}_T(1_A Y)$$

et ceci pour tout A ce qui permet d'identifier $\frac{E(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}$ comme l'espérance conditionnelle attendue. □

Proposition 4.3 *Soit* $T \geq 0$ *et un processus* X *de dimension* d *tel que* $X.B \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.
(i) Soit $M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ *nulle en* 0*, alors :*

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t X^i_s d\langle M, B^i\rangle_s \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q)$$

(ii) Soit $N \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ *nulle en* 0*, et* $\tilde{N}_t = N_t - \int_0^t X^i_s d\langle N, B^i\rangle_s$ *alors :*

$$\langle\tilde{M}, \tilde{N}\rangle_t = \langle M, N\rangle_t$$

où les crochets sont chacun calculés sur leur espaces de probabilité respectifs.

Preuve : on prend une suite de temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini telle que sur $\{(t,\omega),\ t \leq T_n(\omega)\}$ tous les processus en jeu sont bornés. Les égalités recherchées étant trajectorielles, on pourra toujours à la fin faire tendre n vers l'infini.

Supposons donc $M, X, \mathcal{E}(X.B), \langle M\rangle$ bornés. On obtient par l'inégalité de Kunita-Watanabé (6) :

$$|\int_0^t X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s| \leq \langle M\rangle_t \int_0^t \parallel X_s^i \parallel^2 ds$$

donc $\tilde{M}$ est aussi bornée.

Par le corollaire 2.33, on obtient :

$$\mathcal{E}_t(X.B)\tilde{M}_t = \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B)(dM_u - X_u^i d\langle M, B^i\rangle_u) + \int_0^t \tilde{M}_u \mathcal{E}_u(X.B) X_u^i dB_u^i + \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B) X_u^i d\langle M, B^i\rangle_u$$

qui se simplifie et montre que $\mathcal{E}_t(X.B)\tilde{M}_t \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$. On tire par ailleurs du lemme 4.2 :

$$\tilde{E}_T[\tilde{M}_t/\mathcal{F}_s] = \frac{E[\mathcal{E}_t(X.B)\tilde{M}_t/\mathcal{F}_s)}{\mathcal{E}_s(X.B)}.$$

Ces deux derniers faits montrent que $\tilde{M} \in \mathcal{M}_{loc}^c(Q)$.

Soit alors une deuxième martingale N et l'on applique le corollaire 2.33 au produit $\tilde{M}\tilde{N}$ (là encore on localise pour que N et $\langle N\rangle$ soient également bornés) :

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t &= \int_0^t \tilde{M}_u(dN_u - X_s^i d\langle N, B^i\rangle_s) + \int_0^t \tilde{N}_u(dM_u - \int_0^t X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s) \\
&= \int_0^t (\tilde{M}_u dN_u + \tilde{N}_u dM_u) - \int_0^t (\tilde{N}_u X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s + \tilde{M}_u X_s^i d\langle N, B^i\rangle_s).
\end{aligned}$$

puis on l'applique à nouveau au produit de ceci avec $\mathcal{E}_t(X.B)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_t(X.B)(\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t) &= \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B)[\tilde{M}_u dN_u + \tilde{N}_u dM_u - (\tilde{N}_u X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s + \tilde{M}_u X_s^i d\langle N, B^i\rangle_s)] \\
&+ \int_0^t (\tilde{M}_u\tilde{N}_u - \langle M, N\rangle_u)\mathcal{E}_u(X.B) X_u^i dB_u^i + \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B) X_u^i (\tilde{M}_u d\langle N, B^i\rangle_u + \tilde{N}_u d\langle M, B^i\rangle_u
\end{aligned}$$

ce qui donne après simplification :

$$\mathcal{E}_t(X.B)(\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t) = \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B)(\tilde{M}_u dN_u + \tilde{N}_u dM_u) + \int_0^t (\tilde{M}_u\tilde{N}_u - \langle M, N\rangle_u)\mathcal{E}_u(X.B) X_u^i dB_u^i$$

c'est à dire que ce processus appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ et le lemme 4.2 montre que :

$$\tilde{E}_T[\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t/\mathcal{F}_s] = \tilde{M}_s\tilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s \ \mathbb{P} \text{ et } Q \ p.s.$$

C'est exactement dire que le crochet de $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ sous Q coïncide avec celui de M et N sous $\mathbb{P}$.□

Preuve du théorème de Girsanov : la démonstration classique consiste à utiliser le théorème de Lévy (exercice 3 Feuille 7). Il suffit donc de l'appliquer au processus $\tilde{B}$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$. On applique la proposition précédente à $M = N = B$.

(i) $\tilde{B} \in \mathcal{M}_{loc}^c(Q)$,

(ii) $\langle \tilde{B}, \tilde{B}\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$

et le théorème de Lévy permet de conclure. □

Proposition 4.4 *Sous les hypothèses du théorème de Girsanov, pour toute Q-martingale locale continue N, il existe M, $\mathbb{P}-$martingale locale continue telle que :*

$$N = M - \int_0 X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s.$$

Preuve en exercice (6 feuille 7) : utiliser la proposition 4.3 pour donner la forme de M si elle existe et appliquer le lemme 4.2 à $Y = M_t Z_t^{-1}$ après avoir calculé Y par Itô.

On peut regarder maintenant les choses dans un ordre “inverse”, c'est à dire chercher, lorsqu'il y a des probabilités équivalentes, le lien entre les martingales sous l'une et l'autre probabilités et par rapport à la même filtration.

Proposition 4.5 *Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ et la martingale continue uniformément intégrable $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$. Alors $M \in \mathcal{M}_{loc}^c(Q) \Leftrightarrow MZ \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathbb{P})$.*

Preuve : Soit une suite de temps d'arrêt localisante pour M : si l'on reprend la preuve du lemme 4.2, il vient :

$$\tilde{E}_T[M_{t\wedge t_n}/\mathcal{F}_s] = \frac{E_T[Z_t M_{t\wedge t_n}/\mathcal{F}_s]}{Z_s} \tag{23}$$

Alors le fait que $M^{T_n} \in \mathcal{M}(Q)$ implique que $(MZ)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Réciproquement, il suffit de prendre une suite de temps d'arrêt localisante pour ZM et d'appliquer à nouveau (23).

Théorème 4.6 *de Girsanov-Meyer : Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes, $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$ et X une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de décomposition $X = M + A$. Alors, X est aussi une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de décomposition $X = N + C$, où*

$$N = M - \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s \ ; \ C = A + \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s.$$

Preuve : (i) puisque A est un processus à variation finie, il est clair qu'il en est de même pour C, puisque leur différence en est un.

(ii) On applique la proposition 4.5 à N et pour ce faire, on calcule le produit NZ par Itô sous $\mathbb{P}$.

$$d(NZ)_t = N_t dZ_t + Z_t dN_t - Z_t Z_t^{-1} d\langle Z, M\rangle_t + d\langle Z, N\rangle_t$$

Or, N est une $\mathbb{P}$-semi-martingale de partie martingale M : son crochet avec Z coïncide avec celui de M avec Z ce qui permet la simplification et montre que NZ est une $\mathbb{P}$-martingale donc N une Q-martingale. □

4.2 Condition de Novikov

(cf [19] pages 198-201.)

Tout le paragraphe précédent est fondé sur l'hypothèse que le processus $\mathcal{E}(X.B)$ est une vraie martingale. On doit donc donner des conditions sur X pour que cette hypothèse soit réalisée. De façon générale, $\mathcal{E}(X.B)$ est au moins une martingale locale avec pour suite localisante par exemple :

$$T_n = \inf\{t \geq 0, \ \int_0^t \| \mathcal{E}_s(X.B)X_s \|^2 \, ds > n\}$$

Lemme 4.7 $\mathcal{E}(X.B)$ *est une surmartingale et c'est une martingale si et seulement si pour tout* $t \geq 0$ *on a* $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$.

Preuve : $\mathcal{E}(X.B)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ donc pour tout $s \leq t$ on a

$$E[\mathcal{E}_{T_n \wedge t}(X.B)/\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}_{T_n \wedge s}(X.B)$$

par le lemme de Fatou on déduit de cette égalité en passant à la limite que de fait $\mathcal{E}(X.B)$ est une surmartingale. (toute martingale locale positive est une surmartingale.) Comme $E[\mathcal{E}_0(X.B)] = 1$, il suffit que pour tout $t \geq 0$ on ait $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$ pour que $\mathcal{E}(X.B)$ soit une martingale. □

Proposition 4.8 *Soit* M *une martingale locale continue pour* $\mathbb{P}$ *et* $Z = \mathcal{E}(M)$ *telle que* $E[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$. *Alors pour tout* $t \geq 0, E[Z_t] = 1$.

La preuve utilise un changement de temps c'est à dire :

$$T(s) = \inf\{t \geq 0, \ \langle M\rangle_t \geq s\}$$

alors le processus $s \rightarrow W_s = M_{T(s)}$ est un mouvement Brownien. On introduit pour $b < 0$ la famille de temps d'arrêt :

$$S_b = \inf\{s > 0, \ W_s - s = b\}$$

et l'on étudie la martingale arêtée en S_b. (voir le détail de la preuve, assez longue et délicate dans [19], pages 198-199.)

Corollaire 4.9 *(Novikov, 1971) : Soit* X *un processus mesurable adapté tel que :*

$$E[\exp \frac{1}{2} \int_0^t \| X_s \|^2 \, ds] < \infty \ \textit{pour tout} \ t \geq 0$$

alors $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Preuve : on applique la proposition à la martingale locale $M = X.B$ dont le crochet est $\langle M \rangle_t = \int_0^t \| X_s \|^2 ds$. Donc pour tout $t \geq 0$ on a $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$ et le lemme 4.7 montre le résultat attendu. $\square$

Pour terminer ce paragraphe, voici un exemple de processus $X \in \mathcal{P}(B)$ ne vérifiant pas la condition de Novikov, tel que $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ mais n'est pas une "vraie" martingale :

Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{1 \geq t \geq 0, t + B_t^2 = 1\}$ et

$$X_t = -\frac{2}{(1-t)^2} B_t 1_{\{t \leq T\}} \ ; \ 0 \leq t < 1,\ X_1 = 0.$$

(i) Montrer que $T < 1$ presque sûrement et donc que $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ presque sûrement.
(ii) Appliquer la formule de Itô au processus $t \to \frac{B_t^2}{(1-t)^2}$; $0 \leq t < 1$ pour montrer que :

$$\int_0^1 X_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2 dt = -\frac{1}{1-T} - 2\int_0^T [\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}] B_t^2 dt \leq -1.$$

(iii) La martingale locale $\mathcal{E}(X.B)$ n'est pas une martingale : on déduit de (ii) que son espérance est majorée par $\exp(-1) < 1$ ce qui contredit le lemme 4.7 ; cependant pour tout $n \geq 1$ et $\sigma_n = 1 - (1/\sqrt{n})$, le processus $\mathcal{E}(X.B)^{\sigma_n}$ est une martingale.

4.3 Théorème de représentation des martingales

(cf Protter [29], pages 147-157.)
L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'une classe assez large de martingales peut s'écrire (se "représenter" par) $X.B$. On étudie les martingales de $\mathcal{M}^{2,c}$ qui de plus sont nulles à l'origine et vérifie $\langle M \rangle_\infty \in L^1$. Car alors $\sup_t E[M_t^2] = \sup_t E[\langle M \rangle_t] = E[\langle M \rangle_\infty] < \infty$. Ces martingales sont uniformément intégrables, il existe M_∞ telle que pour tout $t \leq 0$, $M_t = E[M_\infty / \mathcal{F}_t]$. On note $\mathcal{H}_0^2$ leur ensemble.

$$\mathcal{H}_0^2 = \{M \in \mathcal{M}^{2,c}, M_0 = 0, \langle M \rangle_\infty \in L^1\}.$$

Définition 4.10 *Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{H}_0^2$ est appelé* **sous-espace stable** *si pour tout $M \in F$ et pour tout temps d'arrêt T alors $M^T \in F$.*

Théorème 4.11 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}_0^2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) si $M \in F$ et $A \in \mathcal{F}_t$, $(M - M^t)1_A \in F$, $\forall t \geq 0$.

(ii) F est un **sous-espace stable**.

(iii) si $M \in F$ et H borné $\in \mathcal{L}^*(M)$ alors $H.M \in F$.

(iv) si $M \in F$ et $H \in \mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$, alors $H.M \in F$.

Preuve : Puisque $\mathcal{L}_b^*(M) \subset \mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$, l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii) est immédiate.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : il suffit de prendre pour tout temps d'arrêt T le processus $H_t = 1_{[0,T]}(t)$. Alors,

$$(H.M)_t = \int_0^t 1_{[0,T]}(s) dM_s = M_{t \wedge T} \in F,$$

c'est à dire que M^T est un élément de F.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : soit t fixé, $A \in \mathcal{F}_t$ et $M \in F$. On construit le temps d'arrêt $T(\omega) = t$ si $\omega \in A$ et l'infini sinon. Il s'agit bien d'un temps d'arrêt puisque $A \in \mathcal{F}_t$. Par ailleurs, d'une part :

$$\begin{aligned}(M - M^t)1_A &= (M - M^t) \text{ si } \omega \in A, \text{ ce qui équivaut à } T(\omega) = t \\ &= 0 \text{ sinon },\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}M - M^T &= (M - M^t) \text{ si } \omega \in A, \\ &= 0 \text{ sinon },\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $(M - M^t)1_A = M - M^T$. Or F est stable, donc M et$M^T \in F$, donc $(M - M^t)1_A \in F$ pour tout $t \geq 0$, soit la propriété (i).

(i) $\Rightarrow$ (iv) : soit $H \in \mathcal{P}$ qui s'écrit :

$$H = H_0 + \sum_i H_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

où $H_i = 1_{A_i}, A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$. Alors

$$H.M = \sum_i 1_{A_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = \sum_i 1_{A_i}(M - M^{t_i})_{t_{i+1}}$$

qui appartient à F par (i). Tout processus simple est limite de combinaisons linéaires de processus tels H ci-dessus, et l'intégrale stochastique étant linéaire on obtient que pour tout processus simple $X, X.M \in F$ qui est un espace vectoriel. On procède ensuite par limite puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$ (cf proposition 2.9) □

Définition 4.12 *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$. On note $S(\mathcal{A})$ le plus petit sous espace vectoriel fermé stable contenant $\mathcal{A}$.*

Définition 4.13 *Soit M et $N \in \mathcal{H}_0^2$. On dit que M et N sont orthogonales si $E[M_\infty N_\infty] = 0$ et fortement orthogonales si $MN \in \mathcal{M}$.*

Remarquons que puisque par définition $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale, la forte orthogonalité équivaut au fait que $\langle M, N \rangle = 0$. On a donc de façon naturelle que la forte orthogonalité implique l'orthogonalité ; la réciproque est fausse : considérons $M \in \mathcal{H}_0^2$ et Y une variable de Bernoulli indépendante de M. Soit $N = YM$. Montrer en exercice que M est orthogonale à N mais que l'orthogonalité n'est pas forte.

Pour $\mathcal{A}$ sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$, on note $\mathcal{A}^\perp$ son orthogonal, et $\mathcal{A}^\dagger$ son orthogonal fort.

Lemme 4.14 *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$: $\mathcal{A}^\dagger$ est un sous-espace vectoriel fermé stable.*

Preuve : soit une suite $M^n \in \mathcal{A}^\dagger$ de limite M dans $\mathcal{H}_0^2$ et N dans $\mathcal{A}$: pour tout n, $M^n N$ est une martingale uniformément intégrable. D'autre part, pour tout $t \geq 0$, par Cauchy-Schwartz

$$E[|\langle M^n - M, N\rangle_t|^2] \leq E[\langle M^n - M\rangle_t]E[\langle N\rangle_t]$$

qui converge vers zéro. Donc $\langle M^n, N\rangle_t \to \langle M, N\rangle_t$ dans L^2. Or, pour tout n et tout t, $\langle M^n, N\rangle_t = 0$, et par conséquent $\langle M, N\rangle_t = 0$ et M est orthogonale à N. □

Lemme 4.15 *Soit deux martingales de $\mathcal{H}_0^2$. on a les équivalences suivantes :*

$(i)M$ *et* N *fortement orthogonaux, noté* $M \dagger N$,
$(ii)S(M) \dagger N$
$(iii)S(M) \dagger S(N)$
$(iv)S(M) \perp N$
$(v)S(M) \perp S(N)$

Preuve en exercice.

Théorème 4.16 *Soit $M^1, \cdots, M^n \in \mathcal{H}_0^2$ telles que pour $i \neq j$, $M^i \dagger M^j$. Alors, $S(M^1, \cdots, M^n) = \{\sum_{i=1}^n H^i M^i \ ; H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle)\}$.*

Preuve : on note $\mathcal{I}$ le membre de droite. Par construction et par la propriété (iv) , $\mathcal{I}$ est un espace stable. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \oplus_i \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle) & \longrightarrow & \mathcal{H}_0^2 \\ (H^i) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n H^i.M^i \end{array}$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit d'une isométrie en utilisant que pour $i \neq j$, $M^i \dagger M^j$:

$$\| \sum_{i=1}^n H^i M^i \|_2^2 = \sum_{i=1}^n \| H^i M^i \|_2^2 = \sum_{i=1}^n E[\int_0^\infty |H_s^i|^2 d\langle M^i\rangle_s].$$

Donc l'ensemble $\mathcal{I}$ image par une isométrie d'un fermé est fermé et contient donc $S(M^1, \cdots, M^n)$.

Réciproquement, d'après le théorème 4.11 (iv), tout ensemble fermé F stable contenant les M^i contient les $H^i.M^i$ donc $\mathcal{I}$. □

Définition 4.17 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2$. On dit que $\mathcal{A}$ a la* **propriété de représentation prévisible** *si :*

$$\mathcal{I} = \{X = \sum_{i=1}^n H^i M^i, \ M^i \in \mathcal{A}, H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle)\} = \mathcal{H}_0^2.$$

Proposition 4.18 *Soit $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2$ avec $M^i \dagger M^j, i \neq j$. Si tout $N \in \mathcal{H}_0^2$ fortement orthogonal à $\mathcal{A}$ est nul, alors $\mathcal{A}$ a la propriété de représentation prévisible.*

Preuve : le théorème 4.16 montre que $S(\mathcal{A})$ est l'ensemble $\mathcal{I}$ défini ci-dessus. Soit alors $N \in \mathcal{A}^\dagger$. D'après le (ii) du lemme ci-dessus,

$$N \in S(\mathcal{A})^\dagger = \mathcal{I}^\dagger.$$

L'hypothèse dit que N est nul, c'est à dire que $\mathcal{I}^\dagger = \{0\}$, donc que $\mathcal{I} = \mathcal{H}_0^2$. □

Ces propriétés d'orthogonalité et de représentation sont liées à la probabilité sous-jacente. Il faut donc voir ce qui se passe lorsque l'on change de probabilité.

Définition 4.19 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{F}_\infty$ absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$, égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$, et telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(Q)$.*

Lemme 4.20 *$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est convexe.*

Preuve en exercice.

Définition 4.21 *$Q \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite* **extrémale** *si*

$$Q = aQ_1 + (1-a)Q_2, a \in [0,1], Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow a = 0 \text{ ou } 1.$$

Théorème 4.22 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. $S(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ implique que $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Preuve : th. 37 page 152 dans [29]. On suppose que $\mathbb{P}$ n'est pas extrémale et donc s'écrit $aQ_1 + (1-a)Q_2$ avec $Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. La probabilité $Q_1 \leq \frac{1}{a}\mathbb{P}$ admet donc une densité Z par rapport à $\mathbb{P}$ majorée par $\frac{1}{a}$ et $Z - Z_0 \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Remarquons que $\mathbb{P}$ et Q_1 coincident sur $\mathcal{F}_0$ montre que $Z_0 = 1$. Soit $X \in \mathcal{A}$: c'est donc une martingale pour $\mathbb{P}$ et pour Q_1, donc ZX est une martingale pour $\mathbb{P}$ ainsi que $(Z - Z_0)X = (Z-1)X$ ce qui montre l'orthogonalité de $Z - Z_0$ à tout X donc à $\mathcal{A}$ donc à $S(\mathcal{A})$. Cet ensemble étant $\mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$, $Z - 1 = 0$ et $P = Q_1$ est extrémale. □

Théorème 4.23 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ et $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Si $M \in \mathcal{M}_b^c(\mathbb{P}) \cap \mathcal{A}^\dagger$ alors M est nulle.*

Preuve : Soit c un majorant de la martingale bornée M et supposons qu'elle n'est pas identiquement nulle. On peut donc définir

$$dQ = (1 - \frac{M_\infty}{2c})d\mathbb{P} \text{ et } dR = (1 + \frac{M_\infty}{2c})d\mathbb{P}.$$

Alors $\mathbb{P} = \frac{1}{2}(Q + R)$, Q et R sont absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ et sont égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$ puisque $M_0 = 0$. Soit $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$: d'après la proposition 4.5, $X \in \mathcal{H}_0^2(Q)$ si et seulement si $(1 - \frac{M_t}{2c})X_t \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Or $X \dagger M$ donc on a bien cette propriété et de même $X \in \mathcal{H}_0^2(Q)$ Donc Q, et de même $R, \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Ainsi y aurait-il une décomposition de $\mathbb{P}$ ce qui contredit l'hypothèse : M est nécessairement nulle.

Théorème 4.24 *Soit* $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ *avec* $M^i \dagger M^j, i \neq j$. $\mathbb{P}$ *est extrémale dans* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *implique que* $\mathcal{A}$ *a la propriété de représentation prévisible.*

Preuve : par la proposition 4.18 il suffit de montrer que tout $N \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P}) \cap \mathcal{A}^\dagger$ est nulle. Soit une telle martingale N et une suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t \leq 0 \ ; \ |N_t| \geq n\}$. La martingale N^{T_n} est bornée, dans $\mathcal{A}^\dagger$; $\mathbb{P}$ est extrémale. Le théorème 4.23 montre que N^{T_n} est nulle pour tout n, et donc $N = 0$. □

Théorème 4.25 *Soit* B *un mouvement Brownien de dimension* n *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. *Alors pour tout* $M \in \mathcal{M}_{loc}^{c,2}$, *il existe* $H^i \in \mathcal{P}(B^i), i = 1, \cdots, n$, *tels que :*

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{n} (H^i.B^i)_t.$$

Preuve en exercice : c'est une application du théorème précédent aux composantes du mouvement Brownien dont on montre que $\mathbb{P}$ est l'unique élément de $\mathcal{M}(B)$. Puis on localise la martingale M.

Corollaire 4.26 *Sous les mêmes hypothèses, soit* $Z \in L^1(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, *alors il existe* $H^i \in \mathcal{P}(B^i), i = 1, \cdots, n$, *tels que :*

$$Z = E[Z] + \sum_{i=1}^{n} (H^i.B^i)_\infty.$$

Preuve : on applique le théorème à la martingale $M_t = E[Z/\mathcal{F}_t]$. □

4.4 Problème de martingales

(d'après Jacod [18], pages 337-340.)
Rappelons le problème qui a motivé ce chapitre : on dispose d'un ensemble de prix dont l'évolution est modélisée par une famille de processus continus adaptés sur un ensemble de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, en fait des semi-martingales. Existe-t-il une probabilité Q telle que toute cette famille soit contenue dans $\mathcal{M}_{loc}^c(Q)$? C'est ce que l'on appelle un problème de martingale. On suppose ici (mais c'était de toute façon en général le cas !) que $\mathcal{B} = \mathcal{F}_\infty$.

On se place sur un ensemble un peu plus grand dans ce paragraphe :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = \{M \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathbb{P}) \ ; \ \sup_t |M_t| \in L^1\}.$$

On peut montrer que cette définition est équivalente à :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = \{M \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathbb{P}) \ ; \ \langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}} \in L^1\}$$

grâce à l'inégalité de Burkholder :

$$\| \sup_t |M_t| \|_q \leq c_q \| \langle M \rangle^{\frac{1}{2}} \|_q \leq C_q \| \sup_t |M_t| \|_q.$$

Définition 4.27 *Soit $\mathcal{X}$ une famille de processus continus adaptés sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{F}_t)$. On appelle solution du* **problème de martingale associé à** *$\mathcal{X}$ toute probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$. On note $M(\mathcal{X})$ cet ensemble de probabilités et l'on rappelle que $S(\mathcal{X})$ le plus petit espace stable de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ contenant $\{H.M, H \in \mathcal{L}^*(M), M \in \mathcal{X}\}$.*

Proposition 4.28 *$M(\mathcal{X})$ est convexe.*

Preuve en exercice.

On note $\mathbf{M_e}(\mathcal{X})$ les éléments extrémaux de cet ensemble.

Théorème 4.29 *(ch th. 11.2 de [18] page 338.) Soit $\mathbb{P} \in M(\mathcal{X})$; on a les équivalences :*

(i) $\mathbb{P} \in M_e(\mathcal{X})$
(ii) $\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = S(\mathcal{X} \cup \{1\})$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$
(iii) $\forall N \in \mathcal{M}_b(\mathbb{P}) \cap \mathcal{X}^\dagger$ *telle que* $\langle N \rangle$ *est borné* , $N = 0$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$.

Corollaire 4.30 *Si de plus $\mathcal{X}$ est fini ou composé uniquement de processus presque sûrement continus, les trois assertions du théorème sont équivalentes à*

$$(iv)\{Q \in M(\mathcal{X}),\ Q \sim \mathbb{P}\} = \{\mathbb{P}\}.$$

Preuve :
(ii)⇒(iii) Soit M une martingale bornée, nulle en 0, orthogonale fortement à tout élément de $\mathcal{X}$ soit $\langle M, X \rangle = 0,\ \forall X \in \mathcal{X}$.

Puisque $\mathcal{X} \cup \{1\}$ engendre par hypothèse l'ensemble $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, tout $N \in \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ est limite de processus de la forme $N_0 + \sum_i H_i.X_i$. Donc,

$$\langle M, N \rangle_t = \lim M_0 N_0 + \sum_i \langle M, H_i.X_i \rangle_t = \sum_i \int_0^t H_i d\langle M, X_i \rangle_s$$

qui est nulle par hypothèse sur M qui est ainsi orthogonale à tout élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Comme M est bornée, elle est aussi élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, donc orthogonale à elle-même, donc nulle.

(iii)⇒(ii) On a par définition l'inclusion $S(\mathcal{X} \cup \{1\}) \subset \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Supposon l'inclusion stricte. Puisque $S(\mathcal{X} \cup \{1\})$ est un fermé convexe de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, il existe $M \in \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ orthogonale à $S(\mathcal{X} \cup \{1\})$. En particulier M est orthogonale à 1, donc $M_0 = 0$. Soit la suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t/|M_t| \geq n\}$ qui fait que M^{T_n} est une martingale bornée, nulle en 0, orthogonale à tout $\mathcal{X}$: elle est nulle par l'hypothèse (iii) et l'égalité des deux ensembles est vérifiée.

(i)⇒(iii) On a $\mathbb{P}$ extrémale dans $M(\mathcal{X})$. Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable bornée et N' une martingale bornée, nulle en zéro, orthogonale à tout $\mathcal{X}$. On pose $N = Y - E[Y] + N'$. Remarquons que pour tout $t \geq 0,\ E_{\mathbb{P}}(N_t) = 0$. Posons alors

$$a = \|N\|_\infty \ ;\ Z_1 = 1 + \frac{N}{2a} \ ;\ Z_2 = 1 - \frac{N}{2a}.$$

Il est clair que $E(Z_i) = 1, Z_i \geq \frac{1}{2} > 0$, et donc les mesures $Q_i = Z_i\mathbb{P}$ sont des probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$ dont la demi-somme est $\mathbb{P}$.

Du fait que Y est $\mathcal{F}_0$-mesurable et N' est orthogonale à X $\forall X \in \mathcal{X}$, N est aussi orthogonale à X $\forall X \in \mathcal{X}$, et NX est une $\mathbb{P}$- martingale. Donc $Z_iX = X \pm \frac{NX}{2a}$ est également une $\mathbb{P}$- martingale. En utilisant la proposition 4.5, $X \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q_i)$ et $Q_i \in M(\mathcal{X})$ ce qui contredit l'extrémalité de $\mathbb{P}$ sauf si $N_t = 0, \forall t \geq 0$ c'est à dire à la fois $Y = E[Y]$ et $N' = 0$ ce qui montre (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Supposons que $\mathbb{P}$ admet la décomposition dans $M(\mathcal{X})$: $\mathbb{P} = aQ_1 + (1-a)Q_2$. Donc Q_1 est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ et la densité Z existe, majorée par $\frac{1}{a}$, d'espérance 1 et puisque $\mathcal{F}_0 = (0, \Omega)$, $Z_0 = 1$ presque sûrement : $Z - 1$ est une martingale bornée nulle en zéro.

Par ailleurs, pour tout $X \in \mathcal{X}, X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \cap \mathcal{M}^c_{loc}(Q_1)$ puisque $\mathbb{P}$ et $Q_1 \in M(\mathcal{X})$. Mais toujours la proposition 4.5 montre que $ZX \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ et $(Z-1)X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ c'est à dire que $Z - 1$ est orthogonale à tout X et l'hypothèse (iii) montre alors que $Z - 1 = 0$, ce qui veut dire que $Q_1 = \mathbb{P}$ qui est donc extrémale.

(iv)$\Rightarrow$(iii) se montre comme (i)$\Rightarrow$(iii), preuve qui ne nécessite pas que $\mathcal{X}$ ait une propriété particulière.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Supposons qu'il existe $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$ dans $M(\mathcal{X})$ qui soit équivalente à $\mathbb{P}$. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini, (ii) signifie que (cf le théorème 4.16) :

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{P}) = \{a + \sum_{i=1}^{n} H^i X^i \ ; \ a \in \mathbb{R},\ H^i \in \mathcal{L}^*(X^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle X^i \rangle),\ X^i \in \mathcal{X}\}.$$

Soit Z la martingale densité de $\mathbb{P}'$ par rapport à $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}' = Z\mathbb{P}$ avec Z $\mathbb{P}$-martingale d'espérance 1, égale à 1 en zéro. Tout X de $\mathcal{X}$ est dans $\mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \cap \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}')$ mais la proposition 4.5 dit que $ZX \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$, donc $(Z-1)X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$, c'est à dire que $Z - 1$ est orthogonale à X donc à $S(\mathcal{X} \cup \{1\}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Si par localisation on borne cette martingale, la martingale arrêtée est orthogonale à elle-même, donc nulle.

5 Modèle financier en temps continu.

(d'après [8] chap 12.1 à 12.5)

5.1 Constitution du modèle

On se place en horizon fini : $t \in [0, T]$

On est sur un espace de Wiener, espace de probabilité filtré :$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ De plus, on suppose que $\mathcal{F}_0 = \{O, \Omega\}, \mathcal{F}_T = \mathcal{A}$.

Il existe un bien de consommation périssable Sur le marché, il y a $N + 1$ actifs financiers de prix p. On suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage donc les processus de prix sont des semi-martingales sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ (cf. Delbaen et Schachermayer 1994) dont on peut vendre et acheter des quantités réelles, mais il n'y a pas de coûts de transaction. On suppose ici les processus de prix continus.

Le premier actif est à taux sans risque, type caisse d'épargne (bond, en anglais) :

$$dp_t^0 = p_t^0 r dt,\ r > 0,\ p_0^0 = 1.$$

C'est à dire que $p_t^0 = e^{rt}$.

Il y a I agents économiques ayant accès à l'information $\mathcal{F}_t$ au temps t. Pour tout $i = 1, \cdots, I$, le $i-$ème agent dispose de ressources $e_0^i \in \mathbb{R}^+$ au début et $e_T^i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin, et de même consomme $c_0^i \in \mathbb{R}$ au début et $c_T^i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin. Il n'y a ni ressource ni consommation intermédiaire.

On note X une partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ l'ensemble des objectifs à atteindre, muni d'une relation de préférence complète, continue, croissante et convexe (que l'on construira plus tard et qui diffère d'une relation d'ordre : il manque l'antisymétrie et la transitivité).

Définition 5.1 *Une relation de préférence (notée $\prec$) est dite* **complète** *si pour tout c_1 et c_2 de X, on a ou bien $c_1 \prec c_2$ ou bien $c_2 \prec c_1$*
Elle est dite **continue** *si $\forall c \in X$, $\{c' \in X,\ c' \prec c\}$ et $\{c' \in X,\ c \prec c'\}$ sont des fermés.*
Elle est dite **croissante** *si toutes les coordonnées de c' sont supérieures ou égales à celles de c, alors $c \prec c'$.*
Elle est dite **convexe** *si c' et $c" \prec c$ alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha c' + (1 - \alpha)c" \prec c$.*

5.2 Mesure de prix d'équilibre ou probabilité neutre au risque

Définition 5.2 *Etant donné un système de prix $(p^0, \cdots, p^N)$, une* **mesure de prix d'équilibre** *sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ est une probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que les prix actualisés $e^{-rt}p^n$, notés $\tilde{p}^n$, sont des Q-martingales uniformément intégrables.*

On note $\mathcal{Q}_p$ leur ensemble. L'**hypothèse** du modèle est :

$\mathcal{Q}_p$ **est non vide**.
Cette hypothèse est importante : c'est une condition suffisante pour l'absence d'opportunité d'arbitrage.
On choisit alors $Q \in \mathcal{Q}_p$; elle n'est pas forcément unique, mais la plupart des résultats sont indépendants de l'élément choisi dans cet ensemble $\mathcal{Q}_p$.

5.3 Stratégies d'échange

Une stratégie est un portefeuille θ, processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$, θ^n représentant la part du portefeuille investie dans le $n$ième actif financier. Les conditions à imposer sont celles qui permettent au processus réel $\int \langle \theta_s, dp_s \rangle$ d'être bien défini : cette quantité représente le gain issu de l'échange.

Définition 5.3 *Une* **stratégie admissible** *est un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^{N+1}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ *stochastiquement intégrable par rapport au vecteur prix.*

Définition 5.4 *Une stratégie est* **autofinançante** *si de plus pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*, la valeur du portefeuille :*

$$V_t(\theta) = \langle \theta_t, p_t \rangle = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, dp_s \rangle.$$

Remarque: Ceci s'interprète de la manière suivante : la consommation est exactement financée par les ressources et la variation du portefeuille !

Ceci est peut-être plus clair en discret :

$$V_{t+1} - V_t = \langle \theta_{t+1}, p_{t+1} \rangle - \langle \theta_t, p_t \rangle = \langle \theta_{t+1}, p_{t+1} - p_t \rangle$$

équivaut à :

$$\langle \theta_{t+1}, p_t \rangle = \langle \theta_t, p_t \rangle.$$

Le portefeuille se fait de t à $t+1$ par réorganisation interne.

Ce n'est pas obligé, mais l'on peut supposer que les prix sont des exponentielles stochastiques (ainsi sera-t-on assuré qu'ils restent positifs !!)
Hypothèse : $\forall n$, il existe une semi-martingale x^n telle que :

$$p_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), t \in [0, T].$$

Concrètement,

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t) dt, n = 1, \cdots, N; dx_t^0 = r dt.$$

Exercice : traduisons dans ce contexte l'hypothèse majeure du modèle, à savoir l'existence d'une mesure Q de prix d'équilibre, c'est à dire que les prix actualisés $\tilde{p}^n$ sont des martingales.

Ceci se traite bien par la formule de Ito :

$$d\tilde{p}_t^n = e^{-rt}dp_t^n - rp_t^n e^{-rt}dt = \tilde{p}_t^n(dx_t^n - rdt) = \tilde{p}_t^n[\sigma_j^n(t)dW_t^j + (b^n(t) - r)dt].$$

Il s'agit donc de trouver Q équivalente à $\mathbb{P}$ et un $Q-$ mouvement Brownien $\tilde{W}$ tel que $dx_t^n - rdt = \sigma d\tilde{W}$. Terminer l'exercice en supposant par exemple que la matrice $\sigma^*\sigma$ est de rang d donc inversible et qu'il y a une condition type Novikov sur le vecteur $v_t = (\sigma^*\sigma)^{-1}\sigma^*(b-r)$.

Théorème 5.5 *Soit θ une stratégie admissible. Elle est autofinançante si et seulement si la valeur actualisée du portefeuille $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt}V_t(\theta)$ vérifie :*

$$\tilde{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{p}_s \rangle.$$

Preuve en exercice, à l'aide de la formule de Ito.

Corollaire 5.6 *Soit Q une mesure de prix d'équilibre. Pour toute stratégie θ autofinançante élément de $\mathcal{P}^*(\tilde{p})$, la valeur actualisée du portefeuille est une $Q-$martingale locale.*

Preuve en exercice.

Définition 5.7 *On dit que θ est une* **stratégie d'arbitrage** *si elle est admissible, autofinançante et vérifie :*

$\langle \theta_0, p_0 \rangle \leq 0$ *et* $\langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$ *presque sûrement et* $\neq 0$ *avec une probabilité* $\rangle 0$,
ou
$\langle \theta_0, p_0 \rangle < 0$ *et* $\langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$ *presque sûrement.*

De fait, on peut se contenter pour définition de

$$\begin{array}{rcl} \langle \theta_0, p_0 \rangle & = & 0 \text{ et} \\ \langle \theta_T, p_T \rangle & \geq & 0 \text{ presque sûrement et } \neq 0 \text{ avec une probabilité } > 0 \end{array} \tag{24}$$

Preuve : Si $\langle \theta_0, p_0 \rangle = a < 0$, on définit une nouvelle stratégie qui va vérifier cette dernière propriété :

$$\theta'^n = \theta^n, n = 1, \cdots, N \ ; \ \theta'^0(t) = \theta^0(t) - ae^{-rt}, \forall t \in [0, T].$$

Alors,

$$\langle \theta'_0, p_0 \rangle = \theta'^0_0, p_0^0 + \sum_1^N \langle \theta_0^n, p_0^n \rangle = \langle \theta_0, p_0 \rangle - a = 0$$

et $\langle \theta'_T, p_T \rangle = \langle \theta_T, p_T \rangle - ae^{-rT}e^{rT} < \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$. Donc, $\langle \theta'_T, p_T \rangle$ est positif et non nul.

Définition 5.8 *Un marché sans stratégie d'arbitrage est dit* **viable***.*

On va donner des conditions suffisantes pour qu'un marché soit viable.

Théorème 5.9 *(cf [8], 12.2 et sq.) (1) Si pour toute stratégie autofinançante, $\tilde{V}_t(\theta)$ est une $Q-$surmartingale, alors le marché est viable.*

(2) Si toute stratégie autofinançante est élément de $\mathcal{P}^*(\tilde{p})$ et telle que $\tilde{V}_t(\theta) \geq 0$, alors le marché est viable.

Preuve : (1) Le fait que $\tilde{V}_t(\theta)$ soit une $Q-$surmartingale s'écrit :

$$\forall s \leq t,\ E_Q[\tilde{V}_t(\theta)/\mathcal{F}_s] \leq \tilde{V}_s(\theta).$$

En particulier puisque la tribu initiale $\mathcal{F}_0$ est triviale, pour $s = 0$,

$$E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq \tilde{V}_0(\theta) \text{ c'est à dire } \langle \theta_0, p_0 \rangle.$$

Supposons qu'il existe une stratégie d'arbitrage : $\langle \theta_0, p_0 \rangle = 0, \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$.

Donc $E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq 0$ et puisque $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}\langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0,\ \tilde{V}_T(\theta) = 0$ et la stratégie θ ne peut être d'arbitrage.

(2) Puisque la stratégie θ est autofinançante,

$$\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{p}_s \rangle.$$

Le corollaire 5.6 montre que $\tilde{V}_t(\theta)$ est alors une $Q-$martingale locale. Comme elle est positive, c'est une surmartingale (cf la preuve du lemme 4.7) et l'on est ramené à (1) pour conclure.□

5.4 Ensemble budgétaire et équilibre

On fixe encore ici Q, mesure de prix d'équilibre et l'on précise l'ensemble X des objectifs : $X = \mathbb{R} \times L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Définition 5.10 *Pour un système de prix p et un processus de ressource e, on appelle* **ensemble budgétaire** *l'ensemble de consommations*

$$\begin{aligned} B(e,p) = \{c \in X \quad : \ & \exists \theta \text{ admissible autofinanccante telle que } \tilde{V}_t(\theta) \in \mathcal{M}_{UI}(Q), \\ & c(0) = e(0) - \langle \theta_0, p_0 \rangle,\ c(T) = e(T) + \langle \theta_T, p_T \rangle\} \end{aligned}$$

Définition 5.11 *On dit que l'on est en* **situation d'équilibre** *pour un ensemble donné d'agents économiques de ressources $\{e^i, i = 1, \cdots, I\}$ si pour tout i il existe une stratégie θ^i vérifiant :*

$$(1) \quad \forall n, \forall t, \sum_{i=1}^{I} \theta_n^i(t) = 0 \ p.s.$$

$$(2) \quad \theta^i \text{ est optimal dans } B(e^i, p) \text{ pour l'agent } i.$$

Le premier point veut dire que le marché est “clair”. Le second sous-entend l’existence d’une relation de préférence sur $B(e^i, p) \subset X$ que l’on va définir un peu plus tard.

Définition 5.12 *On dit que la consommation c est* **simulable** *(attainable, en anglais), s’il existe un processus de ressource e tel que $e(T) = 0$ et $c \in B(e, p)$.*

C’est à dire qu’il existe une stratégie θ autofinançante telle que $\tilde{V}_t(\theta) \in \mathcal{M}_{UI}(Q)$ et $\langle \theta_0, p_0 \rangle = e(0) - c(0)$ et $\langle \theta_T, p_T \rangle = c(T)$.

On note $C(p)$ le sous-ensemble de X des consommations “simulables”. On va mainteant définir sur $C(p)$ une fonctionnelle de prix qui permettra d’induire sur X une relation de préférence relativement “naturelle” et qui donnera un sens à l’optimalité dans (2) de la définition 5.11.

Définition 5.13 *Soit $\varphi : C(p) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(c) = c(0) + \langle \theta_0, p_0 \rangle$. On appelle φ la* **fonctionnelle de prix**.

Comme précédemment, cela veut dire qu’il existe une ressource $e(0)$ telle que $c \in B(e, p)$ et $\varphi(c) = e(0)$, c’est à dire le prix initial d’une consommation simulable.

Proposition 5.14 *L’application φ est bien définie et coïncide avec $\varphi(c) = c(0)+e^{-rT}E_Q[c(T)]$.*

Preuve : les hypothèses assez fortes sur $B(e, p)$ montrent que $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt}V_t(\theta)$ est une $Q-$martingale uniformément intégrable avec $c(T) = V_T(\theta)$ et $\varphi(c) = c(0) + V_0(\theta)$. Donc, $E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] = \tilde{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$.

Soit $E_Q[e^{-rT}c(T)] = V_0(\theta)$ et l’on a bien $\varphi(c) = c(0) + e^{-rT}E_Q[c(T)]$. Le résultat ne dépend donc pas de la stratégie choisie pour traduire l’appartenance de c à $B(e, p)$. □

Proposition 5.15 *(cf [8] th.12.6 p.304) La fonctionnelle de prix est une forme linéaire positive continue pour la topologie de la norme produit sur $X = \mathbb{R} \times L^1(Q)$.*

Preuve : Il est clair que c est positive implique $\varphi(c) = c(0) + e^{-rT}E_Q[c(T)]$ positive et de même cette expression est linéaire en c. Enfin, la continuité se déduit de la majoration :

$$|\varphi(c)| \leq |c(0)| + \|c(T)\|_{1,Q}$$

car $e^{-rT} \leq 1$. □

Corollaire 5.16 *La fonctionnelle φ admet une extension ψ sur tout X qui est une forme linéaire positive continue, et l’on définit alors la relation de préférence attendue par :*

$$c_1 \prec c_2 \text{ si } \psi(c_1) \leq \psi(c_2).$$

Preuve : On définit ψ sur X par :

$$\psi(a, Y) = a + E_Q[Y]$$

qui a bien les propriétés demandées et prolonge φ grâce à la proposition précédente. □

5.5 Marché complet

Définition 5.17 *On dit qu'un marché est* **complet** *sous la probabilité Q pour le système de prix p si l'ensemble $C(p) = X$ soit $C(p) = \mathbb{R} \times L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$.*

On cherche dans ce paragraphe à caractériser les marchés complets, ou du moins à mettre en évidence des conditions suffisantes de complétude.

Théorème 5.18 *Une consommation de X est simulable si et seulement s'il existe un processus vectoriel $\alpha \in \mathcal{P}^*(\tilde{p})$ tel que :*

$$E_Q[e^{-rT}c(T)/\mathcal{F}_t] = e^{-rT}E_Q[c(T)] + \int_0^t \langle \alpha_s, d\tilde{p}_s \rangle.$$

Preuve : Si c est simulable, rappellons encore une fois qu'il existe une stratégie θ admissible et autofinançante telle que $\tilde{V}_t(\theta)$ est une $Q-$martingale uniformément intégrable et $c(T) = \langle \theta_T, p_T \rangle$.

Puisque θ est admissible elle est par définition stochastiquement intégrable par rapport à p donc $\tilde{p}$; elle est autofinançante c'est à dire que $d\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_t, d\tilde{p}_t \rangle$. Or $c(T) = \langle \theta_T, p_T \rangle$ soit $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}c(T)$ et enfin $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale uniformément intégrable :

$$\tilde{V}_t(\theta) = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)/\mathcal{F}_t] = V_0(\theta) + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{p}_s \rangle$$

et $V_0(\theta) = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)]$ ce qui est bien $e^{-rT}E_Q[c(T)]$.

On a ainsi identifié le processus α cherché comme étant la stratégie θ sur les coordonnées de 1 à N.

Réciproquement, si α existe, on définit la stratégie

$$\theta^n = \alpha^n,\ n = 1, \cdots, N\ ;\ \theta^0 = e^{-rT}E_Q[c(T)] + \int_0^T \langle \alpha_s, d\tilde{p}_s \rangle - \sum_1^N \langle \theta_s^n, \tilde{p}_s^n \rangle.$$

On vérifie que cette stratégie permet effectivement à la consommation c d'être simulable. Utiliser l'exercice 2 pour vérifier que cette stratégie proposée θ est effectivement autofinançante. □

Proposition 5.19 *L'ensemble $\mathcal{Q}_p$ des mesures de prix d'équilibre est convexe.*

Preuve : en exercice.

Pour l'étude de cet ensemble, on va maintenant appliquer les résultats du chapitre précédent, sur le problème de martingales, à l'ensemble de processus $\mathcal{X} = \{p^1, \cdots, p^N\}$. C'est un cas où $\mathcal{X}$ est fini et, en particulier, on va pouvoir utiliser le corollaire 4.30.

Proposition 5.20 *(cf [8], corollaire 12.4) Si pour Q mesure de prix d'équilibre, l'ensemble $\mathcal{M}_{UI}(Q)$ est l'ensemble stable $S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$, alors Q est l'unique mesure de prix d'équilibre.*

Preuve : en exercice.

On a par définition l'inclusion $S(\{\tilde{p}\}) \subset \mathcal{H}^1(\mathbb{P}) \subset \mathcal{M}_{UI}(Q)$. Donc l'hypothèse implique l'égalité et le résultat est une conséquence des équivalences du corollaire 4.30 ($ii \Rightarrow i$). $\square$

Proposition 5.21 *Si $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ alors Q est extrémale dans $M(\{\tilde{p}\})$.*

Preuve : ce n'est pas tout à fait l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$ car $\mathcal{Q}_p$ est contenu dans l'ensemble $M(\{\tilde{p}\})$ et non forcément égal. Mais la démonstration est analogue.

Supposons qu'il existe Q_1 et Q_2 dans $M(\{\tilde{p}\})$, (alors $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q_1) \cap \mathcal{M}_{loc}(Q_2)$) et $\lambda \in [0,1]$ tel que $Q = \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2$; alors $Q_1 \leq \frac{1}{\lambda}Q$. Par ailleurs $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{UI}(Q)$ donc $\tilde{p}_T \in L^1(Q)$. Ainsi, on a aussi que $\tilde{p}_T \in L^1(Q_1)$ et l'on peut calculer $E_{Q_1}[\tilde{p}_T/\mathcal{F}_t]$.

Comme $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q_1)$ avec $Z = \frac{dQ_1}{dQ}$, par la proposition 4.5 on obtient que $Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$; mais comme $\tilde{p}$ est dans $\mathcal{M}_{UI}(Q)$ et $Z \leq \frac{1}{\lambda}$ on a aussi $Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(Q)$. De la suite d'égalités

$$E_{Q_1}[\tilde{p}_T/\mathcal{F}_t] = \frac{E_Q[Z_T\tilde{p}_T/\mathcal{F}_t]}{Z_t} = \frac{Z_t\tilde{p}_t}{Z_t} = \tilde{p}_t$$

on tire que $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{UI}(Q_1)$. L'unicité de Q dans $\mathcal{Q}_p$ montre que $Q_1 = Q$ et Q est bien extrémale. $\square$

Corollaire 5.22 *Si $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ alors $\mathcal{M}_{UI}(Q) = S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$.*

Preuve : la proposition montre que Q est extrémale dans $M(\{\tilde{p}\})$. Donc la propriété (i) du théorème 4.29 est vraie et implique (ii), c'est à dire $S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\}) = \mathcal{H}^1(Q)$. Soit alors $M \in \mathcal{M}_{UI}(Q)$. Il existe une suite croissante de temps d'arrêt $T_n \to T$ telle que pour tout n, $M^{T_n} \in \mathcal{H}^1(Q) = S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$, donc pour tout n il existe $u^n \in \mathcal{L}^*(\tilde{p})$ tel que :

$$M_t^{T_n} = M_0 + \int_0^t (u_s^n, d\tilde{p}_s).$$

Par ailleurs, $M_{T_n \wedge t}$ converge presque sûrement vers M_t. Mais puisque $M_{T_n\wedge t} = E_Q[M_T/\mathcal{F}_{T_n\wedge t}]$,

$$|M_{T_n\wedge t}| \leq E_Q[|M_T|/\mathcal{F}_{T_n\wedge t}],$$

et $M_{T_n\wedge t}$ converge vers M_t dans L^1. Le corollaire 4.23 de Jacod page 124 :

"si $N \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ et $H_n \in \mathcal{P}^*(N)$ est une suite telle que $H_n.N$ converge pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors il existe $H \in \mathcal{P}^*(N)$ telle que $H.M \in \mathcal{M}$ et $H.M_\infty = X$." dit qu'alors il existe u stochastiquement intégrable par rapport à $\tilde{p}$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t (u_s, d\tilde{p}_s)$$

c'est à dire $M \in S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$. $\square$

On a finalement, pour résumer, le résultat suivant :

Théorème 5.23 *(cf th.12.13 ?) Soit Q une mesure de prix d'équilibre. On a les équivalences :*

(i) Le marché est complet relativement au système de prix $\{p\}$.

(ii) $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$

(iii) $\mathcal{M}_{UI}(Q) = S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$.

Preuve : (ii) implique (iii) est le dernier corollaire.

L'équivalence de (i) et (iii) est le théorème 5.18 et la définition d'un marché complet.

(iii) implique (ii) : Si $\mathcal{M}_{UI}(Q) = S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$, alors on a a fortiori

$$\mathcal{H}^1(Q) = S(\{\tilde{p}\} \cup \{1\}),$$

c'est à dire la propriété (ii) du théorème 4.29, donc (iv) du corollaire 4.30 est vraie, soit $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$. □

Exercice : reprendre l'exercice 1 de la feuille 9 pour trouver des conditions sur les prix pour que le marché soit complet.

5.6 Un exemple : stratégie optimale pour un petit épargnant

On suppose que le système de prix est justement celui de cet exercice :

$$p_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), t \in [0, T],$$

avec :

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t) dt, n = 1, \cdots, N; dx_t^0 = r dt.$$

On suppose que la matrice σ est de rang plein $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement, et plus : $\sigma\sigma^* \geq \alpha I$ où $\alpha \rangle 0$. Les coefficients b, σ, r sont bornés sur $[0, T] \times \Omega$.

5.6.1 Le marché est-il viable ?

C'est à dire, y a-t-il absence de stratégie d'arbitrage ?
On définit pour stratégie admissible les processus θ à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$ appartenant à $\mathcal{P}(p.\sigma.W)$ et l'on ajoute comme condition

$$(\theta, p) \geq 0, \ dt \otimes d\mathbb{P} \text{ presque sûrement}$$

c'est à dire que le petit épargnant peut à chaque instant réaliser son portefeuille. On peut alors montrer :

Proposition 5.24 *Le marché est viable dès qu'il existe une mesure de prix d'équilibre.*

Preuve : c'est une conséquence du (2) du théorème 5.9. En effet, s'il existe une mesure de prix d'équilibre, $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale locale ; l'admissibilité de θ implique que $\tilde{V}(\theta) \geq 0$. □

Il s'agit donc de montrer dans cet exemple qu'il existe une mesure de prix d'équilibre, donc de chercher Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{UI}(Q)$. Or, on a vu

$$d\tilde{p}_t = \tilde{p}_t[(b-r)dt + \sigma dW_t].$$

Les coefficients sont bornés, donc on a que $\tilde{p} = \mathcal{E}(\int \sigma dW + (b-r)dt)$ est bien défini et il suffit de trouver Q qui fasse de $\int \sigma dW + (b-r)dt$ une martingale uniformément intégrable. Supposons $N = d$, alors σ est inversible et l'on peut définir

$$u = -\sigma^{-1}(b-r)$$

dont il est facile de voir qu'il vérifie la condition de Novikov et alors il existe Q équivalente à $\mathbb{P}$, $Q = L.\mathbb{P}$, $L = \mathcal{E}(u.W)$ telle que:

$$\tilde{W} = W + \int_0 \sigma^{-1}(b-r)dt$$

est un $Q-$mouvement Brownien et $\tilde{p} = \mathcal{E}(\int \sigma dW) \in \mathcal{M}_{UI}(Q)$.

Remarque 5.25 *On peut trouver des hypothèses moins fortes pour l'existence de Q.*

5.6.2 Le marché est-il complet ?

D'après le théorème 5.23, il suffit de vérifier que $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ Soit donc $Q' \in \mathcal{Q}_p$, $Q' = Z.\mathbb{P}$ avec $Z \in \mathcal{M}_{UI}(\mathbb{P})$. D'après le théorème de représentation des martingales, il existe un processus z tel que $dZ_t = z_t dW_t$. Or d'après la proposition 4.5 :

$$\tilde{p} \in \mathcal{M}(Q') \Longleftrightarrow Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}).$$

On calcule par la formule de Itô :

$$d(Z.\tilde{p})_t = Z_t.\tilde{p}_t[\sigma_t dW_t + (b-r)dt] + \tilde{p}_t z_t dW_t + \tilde{p}_t z_t \sigma_t dt.$$

On tire du fait que $Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ l'égalité $Z_t\tilde{p}_t(b-r) + \tilde{p}_t z_t \sigma_t = 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. Or $\tilde{p} > 0$. On peut simplifier cette égalité et en tirer

$$z_t = Z_t u_t \text{ avec } u_t = -\sigma_t^{-1}(b-r)_t$$

c'est à dire que Z est identique à L et $Q' = Q$ et le marché est complet. □

Remarque 5.26 *Si $d \leq N$ et σ surjective, on n'a pas unicité du vecteur u qui permette d'écrire $\sigma dW + (b-r)dt = \sigma d\tilde{W}$. Dans ce cas, le marché n'est pas complet et l'ensemble $\mathcal{Q}_p$ est en bijection avec l'ensemble $\sigma^{-1}(r-b)$.*

5.6.3 CNS d'admissibilité

Le petit épargnant suit la stratégie θ et consomme à la vitesse c_t au temps t. A l'instant t sa richesse est :

$$X_t = V_t(\theta) = (\theta_t, p_t).$$

Si θ est autofinançante,

$$dX_t = (\theta_t, dp_t) - c_t dt.$$

Soit

$$dX_t = \theta_t^0 p_t^0 r dt + \sum_1^N \theta_t^n p_t^n [\sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t)dt] - c_t dt.$$

On peut réutiliser $X_t = (\theta_t, p_t)$ et noter $\pi_t^n = \theta_t^n p_t^n, n \geq 1$ la quantité de richesse sur l'actif n ; alors $\theta_t^0 p_t^0 = X_t - \sum_n \pi_t^n$.

D'où l'on tire :

$$dX_t = (X_t r_r - c_t)dt + \sum_1^N \pi_t^n [\sigma_j^n(t) dW_t^j + (b^n(t) - r)dt]$$

soit sous la probabilité $Q = L.\mathbb{P}$:

$$dX_t = (X_t r_r - c_t)dt + \sum_1^N \pi_t^n [\sigma_j^n(t) d\tilde{W}_t^j]$$

avec $X_0 = x$, EDS dont la solution est :

$$X_t = p_t^0 [x + \int_0^t \pi_s \sigma_s d\tilde{W}_s - \int_0^t e^{-rs} c_s ds].$$

(se vérifie avec la formule de Itô)

On a grâce à cette formulation une CNS pour que la stratégie (π, c) soit admissible.

Proposition 5.27 *La consommation actualisée "objectif" $\int_0^T e^{-rs} c_s ds$ étant fixée,*

$$E_Q[\int_0^T e^{-rs} c_s ds] \leq x$$

équivaut à l'existence d'une stratégie π admissible qui permet de simuler X_T en partant de x.

Preuve : en exercice.

5.6.4 Politiques optimales

On est ramené alors au problème suivant : le petit épargnant juge de la qualité de sa stratégie par ce que les économistes appellent l'utilité ; il cherche à maximiser :

$$(c, X_T) \to E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T)]$$

où les fonction d'utilité U_i sont positives, concaves, strictement croissantes et de classe C^1. Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\sup_{(c,X_T)} \{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T)]/E_Q[\int_0^T e^{-rs}c_s ds] \leq x. \tag{25}$$

Ceci se résout par la méthode de Lagrange. Soit :

$$\mathcal{L} : C_1 \times C_2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$\mathcal{L}(c, X, \lambda) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T)] - \lambda(E_Q[\int_0^T e^{-rs}c_s ds] - x)$$

où $C_1 = \{c \in L^1([0,T] \times \Omega, dt \times dQ)$ et $C_2 = L^1(\mathbb{P}) \cap L^1(Q)$. On obtient par exemple par le théorème de Kuhn et Tucker (point selle) des conditions suffisantes pour qu'un couple $(c*, X^*)$ soit optimal. Une fois c^* connue, on en déduit un portefeuille optimal par le théorème de représentation. En effet, l'unicité de la mesure Q assure l'existence d'un processus prévisible u tel que la martingale $E_Q[\int_0^T e^{-rs}c_s^* ds/\mathcal{F}_t]$ se représente par rapport au $Q-$ mouvement Brownien $\tilde{W}$: $x + \int_0^t u_s d\tilde{W}_s$ et un portefeuille optimal est alors donné par :

$$\pi_s^* = e^{rs}\sigma_s^{-1}u_s.$$

DEA 1994-95 **Université d'Orléans**

Calcul Stochastique **Département de mathématiques**

FEUILLE 1

1. Soit une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in N)$ convergeant en loi à valeurs dans un espace métrique (E, d) et φ une application continue de (E, d) dans l'espace métrique (F, ρ). Montrer qu'alors la suite de variables aléatoires $(\varphi(X_n), n \in N)$ converge aussi en loi.

2. Montrer le théorème de Fatou :

$$P\{\liminf A_n\} \leq \liminf P\{A_n\} \leq \limsup P\{A_n\} \leq P\{\limsup A_n\},$$

pour toute suite d'événements $(A_n, n \in N)$.

3. Montrer que si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, alors l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est sa projection sur l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

4. Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$, un processus adapté continu X à valeurs réelles, B un ouvert réel et les variables aléatoires à valeurs réelles positives :

$$T = a, T_B = \inf\{t \geq 0; X_t \in B\}.$$

Montrer que T et T_B sont des temps d'arrêt.

5. Si T et S sont des temps d'arrêt, montrer qu'il en est de même des variables aléatoires $T \wedge S, T \vee S, T + S$.

6. Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$, et un temps d'arrêt T. On définit la famille d'événements :

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{A}; \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

(i) Montrer que $\mathcal{F}_T$ est une tribu.

(ii) Si T est constant et égal à t, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

(iii) Si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

(iv) Si T et S sont des temps d'arrêt, $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$, en particulier $\{S \leq T\}, \{S \geq T\}, \{S = T\}$ sont des événements de $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

7. Soit X un processus progressivement mesurable et T un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_t$. Montrer que

- l'application $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable

- et que le processus $t \mapsto X_{t\wedge T}$ est progressivement mesurable.

8. The following three conditions are equivalent for a nonnegative right-continuous submartingale $(X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty)$:

(a) it is a uniformly integrable family of random variables ;

(b) it converges in L^1 as $t \to \infty$;

(c) it converges P almost surely as $t \to \infty$ to an integrable random variable X_∞, such that $(X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq \infty)$ is a submartingale.
Observe that the implications (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) hold without the assumption of nonnegativity.

9. The following four conditions are equivalent for a right-continuous martingale $(X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty)$:

(a) (b) as above ;

(c) it converges P almost surely as $t \to \infty$ to an integrable random variable X_∞, such that $(X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq \infty)$ is a martingale.

(d) there exists an integrable random variable Y such that $X_t = E(Y/\mathcal{F}_t)$ P almost surely, for every $t \geq 0$.
Besides, if (d) holds and X_∞ is the random variable in (c), then :

$$E(Y/\mathcal{F}_\infty) = X_\infty a.s.P.$$

10. Let $(X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty)$ a nonnegative right-continuous supermartingale ; then $X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t$ exists for P almost surely $\omega \in \Omega$ and $(X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq \infty)$ is a nonnegative right-continuous supermartingale.

FEUILLE 2

Dans toute cette feuille, $\Omega = \mathcal{C}(R^+, R)$.
1. Soit ρ définie sur $\Omega \times \Omega$ par :

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \sup_{0\leq t\leq n} (\mid \omega_1(t) - \omega_2(t) \mid \wedge 1).$$

Montrer qu'il s'agit d'une distance et que (Ω, ρ) est un espace métrique complet.

2. Soit $(t_i, i = 1, \cdots, n)$ un n-uple de réels tels que pour tout $i, t_i \leq t$, B un borélien de R^n et $C = \{\omega : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in B\}$. Soit $\mathcal{G}_t$ la σ-algèbre engendrée par la famille des C ainsi définis.

(i) Montrer que $\mathcal{G} = \vee_t \mathcal{G}_t$ coincide avec les boréliens de (Ω, ρ).

(ii) Si $\varphi_t : \Omega \to \Omega$ telle que

$$\varphi_t(\omega) : s \mapsto \omega(s \wedge t)$$

alors $\mathcal{G}_t = \varphi_t^{-1}(\mathcal{G})$ c'est à dire les boréliens de $\Omega^t = \mathcal{C}([0,T], R)$.

3. Soit $m^T(\omega, \delta) = \sup\{\mid \omega(s) - \omega(t) \mid ; \mid s - t \mid \leq \delta, 0 \leq s,t \leq T\}$ le module de continuité sur $[0,T]$. Montrer que

(i) $\omega \mapsto m^T(\omega, \delta)$ est continue sur (Ω, ρ).

(ii) $\delta \mapsto m^T(\omega, \delta)$ est croissante.

(iii) $\lim_{\delta \to 0} m^T(\omega, \delta) = 0, \forall \omega$.

4. Let (X^m) be a sequence of continuous stochastic processes on $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ satisfying the following conditions :

(i) $\sup_{m \geq 1} E \mid X_0^m \mid^\nu = M < \infty$,

(ii) $\sup_{m \geq 1} E \mid X_t^m - X_s^m \mid^\alpha \leq C_T \mid t - s \mid^{1+\beta} ; \forall T > 0$ and $0 \leq s,t \leq T$.

for some positive constants α, β, ν and C_T.

Show that the probability measures $P_m = P(X^m)^{-1} ; m \geq 1$ induced by these processes on $(\Omega, \mathcal{G})$ form a tight sequence.

5. Suppose (P^m) is a sequence of probability measures on $(\Omega, \mathcal{G})$ which converges weakly to a probability measure P. Suppose, in addition, that (f_n) is a uniformly bounded sequence of real-valued, continuous functions on Ω converging to a continuous function f, the convergence being uniform on compact subsets of Ω. Then :

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\ P_n(\omega) = \int_\Omega f(\omega) d\ P(\omega).$$

FEUILLE 3

Dans toute cette feuille, $\Omega = \mathcal{C}(R^+, R)$.

1. Soit une famille de probabilités sur l'espace des trajectoires $\Omega, \{\mathbb{P}_x^\delta, \delta \in \mathbb{R}, \}$ telle que pour tout $\delta, \omega(0) = x$. Montrer que le critère suivant est un critère suffisant de tension, c'est à dire que le critère de Prohorov est vérifié :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{t \to 0} \overline{\lim_{|\delta| \to 0}} \sup_x \mathbb{P}_x^\delta\{\omega : \tau_x(\varepsilon) \leq t\} = 0,$$

où $\tau_x(\varepsilon)$ est le nombre de sorties de la trajectoire ω de la boule $B(x, \varepsilon)$.

2. Soit la suite de processus non aléatoires :

$$X_t^n = nt\ 1_{[0,1/2n]}(t) + (1 - nt) 1_{[1/2n,1/n]}(t)\ ;\ t \geq 0,$$

et le processus $X_t = 0$.

Montrer que X^n converge vers X en distribution de dimension finie mais que X^n ne converge pas en loi vers X. (Indication : trouver sur Ω muni de la distance ρ une fonction continue bornée f telle que $f(0) = 0$ mais $f(X^n)$ ne converge pas vers zéro.)

3. Soit deux suites de variables aléatoires X^n et Y^n et une variable aléatoire X définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace métrique (E, ρ) telles que :

$$\begin{array}{l} X^n \to X \text{ en loi et } \rho(X^n, Y^n) \to 0 \text{ en proba} \\ \text{alors } Y^n \to X \text{ en loi} \end{array}$$

4. Montrer que le mouvement Brownien réel est un processus gaussien de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$ et que réciproquement tout processus continu gaussien centré de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$ est un mouvement Brownien réel.

5. Soit B_t un mouvement Brownien réel. Montrer que $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ presque sûrement. (C'est à dire la loi des grands nombres, la preuve est un peu dificile...)

6. Soit $Y_t = t.B_{1/t}$; $Y_0 = 0$ et $\mathcal{F}_t^Y$ la filtration naturelle associée au processus Y. Montrer que $(Y_t, \mathcal{F}_t^Y)$ est un mouvement Brownien (appliquer le critère donné en 4 et l'exercice 5).

7. On considère l'ensemble des zéros du mouvement Brownien :

$$\mathcal{X} = \{(t, \omega) \in R^+ \times \Omega : B_t(\omega) = 0\}$$

et les sections de celui-ci par trajectoire $\omega \in \Omega$:

$$\mathcal{X}_\omega = \{t \in R^+ : B_t(\omega) = 0\}$$

Montrer que P-presque sûrement en ω on a :

(i) la mesure de Lebesgue de $\mathcal{X}_\omega$ est nulle ,

(ii) $\mathcal{X}_\omega$ est fermé non borné (preuve un peu difficile...),

(iii) $t = 0$ est un point d'accumulation de $\mathcal{X}_\omega$,

(iv) $\mathcal{X}_\omega$ n'a pas de point isolé, donc est dense dans lui-même.

8. Soit $\mathcal{G}_t = \sigma(B_s, s \leq t) \vee \mathcal{N}, t \geq 0$. Montrer que cette filtration est càd, c'est à dire que $\mathcal{G}_{t^+} = \cap_{s>t} \mathcal{G}_s$.

(Indication : utiliser que les fonctions caractéristiques conditionnelles des vecteurs (B_u, B_z) avec $z, u > t$ sachant $\mathcal{G}_{t^+}$ est limite des fonctions caractéristiques conditionnelles des mêmes vecteurs sachant $\mathcal{G}_w$ lorsque w décroit vers t et coincide avec les fonctions caractéristiques conditionnelles des vecteurs (B_u, B_z) avec $z, u > t$ sachant $\mathcal{G}_t$.)

FEUILLE 4

Dans toute cette feuille, on fixe une martingale M de carré intégrable sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.
1. Soit $\mathcal{L}_T(M)$ l'ensemble des processus X mesurables adaptés sur $[0,T]$ tels que :

$$[X]_T = E[\int_0^T X_s^2 d < M >_s] < +\infty$$

et $\mathcal{L}_T^*(M)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ progressivement mesurables.

Montrer que pour tout $T > 0$, $\mathcal{L}_T^*(M)$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2([0,T] \times \Omega, d < M >_t \times dP)$ pour la distance d définie par :

$$d(X,Y) = [X - Y]_T.$$

2. Soit $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des processus simples sur lequel est défini l'intégrale stochastique par rapport à M :

$$I_t(X) = \sum_j X_j(M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t}).$$

Montrer que I_t vérifie les propriétés suivantes :

(i) I_t est une application linéaire.

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d < M >_s]$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d < M >_u /\mathcal{F}_s]$.

(vii) $< I_.(X) >_t = \int_0^t X_s^2 d < M >_s$.

3. Montrer l'associativité de l'intégrale stochastique, c'est à dire : si H est stochastiquement intégrable par rapport à la martingale M d'intégrale notée $H.M$ et si G est stochastiquement intégrable par rapport à la martingale $H.M$, alors $G.H$ est stochastiquement intégrable par rapport à la martingale M et l'on a :

$$G.(H.M) = (G.H).M.$$

4. Soit un temps d'arrêt T, deux processus X et Y tels que $X^T = Y^T$, deux martingales M et N telles que $M^T = N^T$. On suppose que $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Montrer qu'alors $I_M(X)^T = I_N(Y)^T$. (on utilisera que pour toute martingale de carré intégrable : $M_t = 0$ $p.s. \Longleftrightarrow < M >_t = 0$ $p.s.$)

FEUILLE 5

Dans toute cette feuille, on fixe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

1. Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable, et des processus $X \in \mathcal{L}^*_\infty(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*_\infty(N)$. Montrer que

(i) $X.M$ et $Y.N$ sont uniformément intégrables de variables terminales $\int_0^\infty X_s dM_s$ et $\int_0^\infty Y_s dN_s$.

(ii) $\lim_{t\to\infty}\langle X.M, Y.N\rangle_t$ existe presque sûrement.

c'est une application directe de l'inégalité de Kunita-Watanabe

(iii)$E[X.M_\infty Y.N_\infty] = E[\int_0^\infty X_s Y_s d\langle M, N\rangle_s]$.

On utilisera le théorème : si M est une martingale locale continue telle que $E[\langle M\rangle_\infty] < \infty$, alors elle est uniformément intégrable et converge presque sûrement à l'infini. De plus $E[\langle M\rangle_\infty] = E[M_\infty^2]$.

2. Soit M et N deux martingales continues locales et des réels a et b et $X \in \mathcal{P}^*(M) \cap \mathcal{P}^*(N)$. Montrer que l'intégration stochastique par rapport aux martingales continues locales est une application linéaire, c'est à dire $X.(aM + bN) = aX.M + bX.N$

3. Soit M une martingale continue locale et $X \in \mathcal{P}^*(M)$. Montrer qu'il existe une suite de processus simples (X^n) tels que $\forall T > 0$, on a $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X_s^n - X_s|^2 d\langle M\rangle_s = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} |I_t(X^n) - I_t(X)| = 0.$$

4. Soit M une martingale continue locale et $X \in \mathcal{P}^*(M)$. Soit $s < t$ et Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable ; montrer qu'alors :

$$\int_s^t Z X_u dM_u = Z \int_s^t X_u dM_u.$$

indication : utiliser la propriété (vi) de l'intégrale stochastique et calculer $E[\int_s^t Z X_u dM_u - Z\int_s^t X_u dM_u]^2$.

5. Montrer que l'unique solution dans $\mathcal{C}^{1,2}(R^+, R^d)$ de l'équation aux dérivées partielles (équation de la chaleur)

$$\partial_t f = \frac{1}{2}\Delta f, f(0, x) = \varphi(x),\ \forall x \in R^d$$

où φ est dans $\mathcal{C}^2(R^d)$ est $f(t, x) = E[\varphi(x + B_t)]$ avec B mouvement Brownien.

6. Let W a standard Brownian motion, ε a number in $[0, 1]$, and $\Pi = (t_0, \cdots, t_m)$ a partition of $[0, 1]$ with $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$). Consider the approximating sum :

$$S_\varepsilon(\Pi) = \sum_{i=0}^{m-1} [(1-\varepsilon)W_{t_i} + \varepsilon W_{t_{i+1}}](W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

for the stochastic integral $\int_0^t W_s dW_s$. Show that :

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S_\varepsilon(\Pi) = \frac{1}{2}W_t^2 + (\varepsilon - \frac{1}{2})t,$$

where the limit is in probability. The right hand of the last limit is a martingale if and only if $\varepsilon = 0$, so that W is evaluated at the left-hand endpoint of each interval $[t_i, t_{i+1}]$ in the approximating sum ; this corresponds to the Ito integral.

With $\varepsilon = \frac{1}{2}$ we obtain the Stratonovitch integral, which obeys the usual rules of calculus such as $\int_0^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2}W_t^2$.
indication : mettre en évidence une approximation de l'intégrale de Ito $\int_0^t W_s \circ dW_s$ *et de la variation quadratique de W puis appliquer la formule de Ito au carré de W. Ou : récrire* $S_\varepsilon(\Pi)$ *avec une combinaison de* $W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2$ et de $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$.

FEUILLE 6

Dans toute cette feuille, on fixe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

1. Soit M un vecteur de dimension d de martingales locales continues, A un vecteur de dimension d de processus continus adaptés à variation finie et X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable ; soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. On pose $X_t = X_0 + M_t + A_t$. Montrer qu'alors, $\mathbb{P}$ presque sûrement :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_t f(s, X_s)ds + \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dM_s^i + \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dA_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij}^2 f(s, X_s)d\langle M^i, M^j\rangle_s \end{aligned}$$

2. Soit deux semi-martingales $X = X_0 + M + A$ et $Y = Y_0 + N + C$. Montrer que

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y\rangle.$$

Il s'agit de ce que l'on appelle la **formule d'intégration par parties**.

3. Montrer que

$$(\exp \int_0^t a_s ds)(x + \int_0^t b_s \exp(-\int_0^t a_u du)dB_s)$$

est solution de l'EDS

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t, \; t \in [0, T], \; X_0 = x,$$

après avoir justifié les intégrales présentes dans la formule.

4. Soit B le mouvement Brownien réel ; montrer que

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t.$$

Si $X \in \mathcal{P}(B)$, alors :

$$(X.B)_t^2 = 2\int_0^t (X.B)_s X_s dB_s + \int_0^t X_s^2 ds.$$

Soit $Z_t = \exp((X.B)_t - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds)$. Montrer que Z est solution de l'q̧uation différentielle stochastique :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s^2 dB_s.$$

Montrer que $Y = Z^{-1}$ est solution de

$$dY_t = Y_t(X_t^2 dt - X_t dB_t).$$

5. On définit l'intégrale de Stratonovitch par

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s \circ dX_s + \frac{1}{2}\langle Y, X\rangle_t.$$

Montrer que la limite de la somme suivante avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$S_\varepsilon(\Pi) = \sum_{i=0}^{m-1} [(1-\varepsilon)W_{t_i} + \varepsilon W_{t_{i+1}}](W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

est $\int_0^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2}W_t^2$.

Soit X et Y deux semi-martingales continues et π une partition de [0,t]. Montrer que

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2}(Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

est $\int_0^t Y_s \circ dX_s$.

Soit X un vecteur de dimension d de semi-martingales continues et f une fonction de classe C^2. Montrer alors que :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \partial_i f(X_s) \circ dX_s^i.$$

FEUILLE 7

Dans toute cette feuille, on fixe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

1. Soit u un processus adapté tel que $\mathbb{P}(\int_0^a u_s^2 ds = 0) = 1$.
Montrer qu'alors $\int_0^t u_s dB_s = 0,\ \mathbb{P}\ p.s.\ \forall t \leq a$.
Montrer que $\int_0^a (a-s)dB_s = \int_0^a B_s ds$.

2. Soit l'équation différentielle de Orstein Uhlenbeck :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t,\ X_0 = x.$$

(i) Montrer que le processus suivant est solution de cette EDS :

$$X_t = e^{-\alpha t}(x + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s).$$

(ii) Montrer que l'espérance $m(t) = E[X_t] = m(0)e^{-\alpha t}$.

(iii) Montrer que la covariance

$$V(t) = Var[X_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} + (V(0) - \frac{\sigma^2}{2\alpha})e^{-2\alpha t}.$$

(iv) Si x est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable de loi $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$, montrer que X est un processus gaussien de covariance $\rho(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$.

3. **Théorème de Lévy** : Soit X une semi-martingale continue. C'est un mouvement Brownien réel si et seulement si c'est une martingale locale continue de crochet $\langle X \rangle_t = t$.

indication : calculer par la formule de Itô la fonction caractéristique de $X_t - X_s$ sachant $\mathcal{F}_s$ pour tout $s \leq t$.

4. Soit X un vecteur de dimension d de martingales locales continues telles que $\langle X_i, X_j \rangle_t = A_t \delta(i,j)$. Soit u une fonction harmonique (c'est à dire $\Delta(u) = 0$) ; montrer alors que $u(X)$ est une martingale locale.

Si u est sous-harmonique (c'est à dire $\Delta(u) \geq 0$) ; alors montrer que $u(X)$ est une sous-martingale.

5. Soit $B = (X, Y)$ un mouvement Bownien de dimension 2 tel que $B_0 = (0,0)$. On pose $A_t = \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$. Alors montrer que :

$$E[\exp(iuA_t)] = \frac{1}{\cosh(ut)},\ \forall t \in \mathbb{R}^+, u \in \mathbb{R}.$$

indication : Poser $V_t = iuA_t - \frac{1}{2}\alpha(t) \parallel B_t \parallel^2 + \beta(t)$, où α et β sont dans $C^1(R^+)$ et nulles en t_0. Choisir α et β en sorte que $\exp(V_t) \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ et en déduire $E[V_t]$ pour tout $t \leq t_0$ puis $E[\exp(iuA_{t_0})]$.

6. Sous les hypothèses du théorème de Girsanov, pour toute Q-martingale locale continue N, montrer qu'il existe M, $\mathbb{P}-$martingale locale continue telle que :

$$N = M - \int_0 X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s.$$

indication : utiliser la proposition de passage de $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ à $\mathcal{M}(Q)$ pour donner la forme de M si elle existe et appliquer le lemme "de Bayes" à $Y = M_t Z_t^{-1}$ après avoir calculé Y par la formule de Itô.

FEUILLE 8

Dans toute cette feuille, on fixe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

1. Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{1 \geq t \geq 0, t + B_t^2 = 1\}$ et

$$X_t = -\frac{2}{(1-t)^2} B_t 1_{\{t \leq T\}} \ ; \ 0 \leq t < 1, \ X_1 = 0.$$

(i) Montrer que $T < 1$ presque sûrement et donc que $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ presque sûrement.
(ii) Appliquer la formule de Itô au processus $t \rightarrow \frac{B_t^2}{(1-t)^2}$; $0 \leq t \leq T$ pour montrer que :

$$\int_0^1 X_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2 dt = -1 - 2\int_0^T [\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}] B_t^2 dt \leq -1. \tag{26}$$

(iii) La martingale locale $\mathcal{E}(X.B)$ n'est pas une martingale, mais cependant pour tout $n \geq 1$ et $\sigma_n = 1 - (1/\sqrt{n})$, le processus $\mathcal{E}(X.B)^{\sigma_n}$ est une martingale.

2. Soit $M \in \mathcal{H}_0^2$ et Y une variable de Bernoulli indépendante de M. Soit $N = YM$. Montrer que M est orthogonale à N mais que l'orthogonalité n'est pas forte.

3. Soit deux martingales de $\mathcal{H}_0^2$. Montrer les cinq équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcc} (i) & M \perp N \text{ fortement noté } M \dagger N, & (ii) S(M) \dagger N \\ (iii) & S(M) \dagger S(N) & (iv) S(M) \perp N \\ (v) & & S(M) \perp S(N) \end{array}$$

4. Soit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{F}_\infty$ absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$, égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$, et telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(Q)$. Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est convexe.

5. Soit B un mouvement Brownien de dimension n sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_{loc}^{c,2}$, il existe $H^i \in \mathcal{P}(B^i), i = 1, \cdots, n$, tels que :

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^n (H^i.B^i)_t.$$

Indication : appliquer le théorème de la probabilité extrémale dans $M(\mathcal{B})$ (qui est de fait réduit à $\mathbb{P}$) où $\mathcal{B}$ est la famille des composantes du mouvement Brownien, puis localiser la martingale M.

6. Montrer que le processus H ci-dessus est unique au sens où tout H' qui vérifie

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{n} (H'^i.B^i)_t \text{ est tel que : } \int_0^t \sum_{i=1}^{n} |H'^i_s - H^i_s|^2 ds = 0 \text{ presque sûrement.}$$

FEUILLE 9

Dans toute cette feuille, on fixe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

1. Dans un système de prix p, on suppose que $\forall n$, il existe une semi-martingale x^n telle que :

$$p_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), t \in [0, T].$$

Concrètement,

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t)dt, n = 1, \cdots, N; dx_t^0 = rdt.$$

Traduire dans ce contexte l'hypothèse du modèle, à savoir l'existence d'une mesure Q de prix d'équilibre, c'est à dire que les prix actualisés $\tilde{p}^n$ sont des $Q-$martingales.

(utiliser la formule de Ito)

2. Soit θ une stratégie admissible. Montrer qu'elle est autofinançante si et seulemnt si la valeur actualisée du portefeuille $\tilde{V}_t(p) = e^{-rt}V_t(p)$ vérifie :

$$\tilde{V}_t(p) = V_0(p) + \int_0^t < \theta_s, d\tilde{p}_s > .$$

(réutiliser la formule de Ito)

3. Montrer que pour toute stratégie θ autofinançante élément de $\mathcal{P}^*(\tilde{p})$, la valeur actualisée du portefeuille est une $Q-$martingale locale.

4. Montrer que la relation définie par

$$c_1 \prec c_2 \text{ si } \psi(c_1) \leq \psi(c_2)$$

où l'application ψ est définie sur l'ensemble de consommations X par :

$$\psi(a, Y) = a + E_Q[Y]$$

est une relation de préférence complète, continue, croissante et convexe.

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}_p$ des mesures de prix d'équilibre est convexe.

References

[1] L.ARNOLD : "Stochastic Differential Equations : Theory and Applications", Wiley, New York, 1974.

[2] L. BACHELIER: "Théorie de la speculation" :Annales scientifiques de l'école normale supérieure,17, 21-88, Paris, 1900.

[3] F. BLACK and M. SCHOLES : "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, 3, 637-654,1973.

[4] J.C. COX and S.A. ROSS : " The valuation of options for alternative stochastics processes", Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.

[5] Rose Ann DANA et Monique JEANBLANC : "Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre", Economica, deuxième édition, Paris, 1998.

[6] F. DELBAEN and W. SCHACHERMAYER, "A general version of the fundamental theorem of asset pricing", Math. Ann. 300, 463-520, 1994

[7] G. DEMANGE et J.C. ROCHET : "Méthodes mathématiques de la finance", Economica.

[8] M.U. DOTHAN : "Prices in financial Markets", Oxford University Press, Oxford, 1990.

[9] R.M. DUDLEY : "Wiener functionnals as Itô integrals", The Annals of Probability, 5, 140-141, 1977.

[10] W. H. FLEMING, R.W. RISHEL : " Deterministic and stochastic optimal control", Springer-Verlag, New-York, 1975.

[11] A. FRIEDMAN : Stochastic Differential Equations and Applications, I , Academic Press, New-York ,1975.

[12] J.M. HARRISON and D.M.KREPS : "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets", Journal of Economic Theory, 20, 381-408, 1979.

[13] J.M. HARRISON and S. PLISKA : "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading",Stochastics Processes and their Applications, 11,215-260, 1981.

[14] S. HE, J. WANG and J. YAN :Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Science Press, New-York and Beijing ,1992.

[15] R.A. HOWARD : " Dynamic Programming and Markov Processes",The M.I.T. Press, Cambridge, 1966.

[16] C. HUANG, "Information structure and equilibrium asset prices", Journal of Economic Theory, 35, 33-71, 1985.

[17] K. ITO and H.P. Mc KEAN : "Diffusion Processes and their sample paths", Springer-Verlag, New York, 1974.

[18] J. JACOD : "Calcul stochastique et problèmes de martingales", Lecture Notes 714, Springer-Verlag, New York, 1979.

[19] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : "Brownian Motion and Stochastic calculus", Springer-Verlag, New York, 1988.

[20] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : "Methods of Mathematical Finance", Springer-Verlag, New York, 1998.

[21] H. KUNITA and S. WATANABE : "On square integrable martingales" Nagoya Mathematics Journal, 30, 209-245, 1967.

[22] D. LAMBERTON et B. LAPEYRE : "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", Ellipses, Paris,1991.

[23] D. LEPINGLE et J. MEMIN : "Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 42, p175-203, 1978.

[24] R.S. LIPTSER and A.N. SHIRYAEV : "Statistics of Random Processes", Springer-Verlag, New York, 1977.

[25] H.P. Mc KEAN : "Stochastic Integrals", Academic Press, New-York, 1969.

[26] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI : "Martingale Methods in Financial Modelling",Springer-Verlag, New-York, 1997.

[27] J. NEVEU : "Martingales à temps discrets", Masson, Paris, 1972.

[28] S. R. PLISKA : "Introduction to Mathematical Finance", Blackwell, Oxford, 1998.

[29] P. PROTTER : "Stochastic Integration and Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1990.

[30] F. QUITTARD-PINON : "Marchés de capitaux et théorie financière", Economica, Paris, 1993.

[31] Z. SCHUSS : "Theory and Applications of Stochastic Differential Equations" Wiley, New York, 1980.

[32] K. VO KHAC : "Théorie des probabilités", Ellipses, Paris, 1984.