Autour des schémas asymptotiquement préservant

Marie Hélène Vignal

IMT: Institut de Mathématiques de Toulouse.

Université Toulouse 3

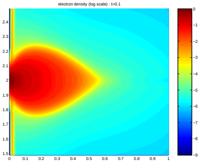
Marseille le 8 février 2011

Collaboration avec

Claire Chainais-Hillairet (Université Lille 1)

Contexte général : problèmes multi-échelles

- **Modèles mathématiques M_λ dépendant d'un paramètre λ**
  - λ très petit comparé à l'échelle de référence
  - λ de taille variable, plusieurs ordres de grandeur



- **Problèmes multi-échelles :** échelle microscopique (λ)
  et
  échelle macroscopique (λ ou échelle de référence)

- **Difficultés :** Les schémas classiques explicites sont stables et consistants

  ssi λ est résolu par le maillage $\Rightarrow$ coût trop important

Contexte général : problèmes multi-échelles

$1^{ère}$ solution : utiliser le modèle asymptotique

$$M_0 = \lim_{\lambda \to 0} M_\lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Maillage indépendant de } \lambda$$

- **Problèmes**
  - Nécessité de **conditions aux limites préparées** au régime asymptotique
  - On doit utiliser M_λ là où $\lambda = O(1)$ $\Rightarrow$ **deux modèles**
    - Reconnection de M_λ et M_0.
    - Localisation de l'interface.
    - Interface mobile : problème numérique difficile en 2D ou 3D.

Contexte général : problèmes multi-échelles

Une autre solution : utiliser un schéma asymptotiquement préservant

- Utiliser le modèle microscopique M_λ partout.
- Le discrétiser avec un schéma préservant l'asymptotique $\lambda \to 0$
  - Maillage indépendant de λ : **Stabilité asymptotique**.
  - On obtient une approximation de la solution de M_0 quand $\lambda \to 0$:
    Consistance asymptotique.

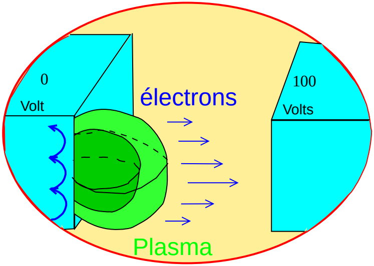
Schéma asymptotiquement stable et consistant

$\Rightarrow$ Schéma asymptotiquement préservant (AP)

([S.Jin] cinétique $\to$ fluide)

Applications physiques

- Exemple 1 : expansion de plasma entre deux electrodes



- Diodes à forts courants,

  Financé par le CEA/DAM.

- Arcs sur les panneaux solaires des satellites,

  Financé par le CNES.

- Schéma AP pour Euler-Poisson dans la limite quasineutre
  Crispel, Degond, MHV, JCP 2007.

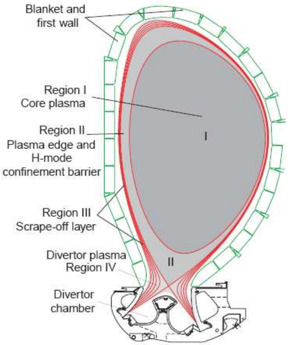
- Stabilité asymptotique : P. Degond, JG. Liu, MHV, SIAM 2008.

- Couche limite : MHV, SIAM 2010.

Applications physiques

➠ Exemple 2 : ITER

Fusion du Deutérium-Tritium par confinement inertiel



➠ **Financé par le CEA**

➠ Schémas AP dans la **limite quasineutre**,

→ Euler-Maxwell, → Vlasov-Poisson

➠ **Limite de dérive et Bas Mach**

→ Euler-Lorentz, → Vlasov-Lorentz,

➠ **Collaborations** avec : A.B. Sun, P. Degond, F. Deluzet, S.Hirstoaga, L. Navoret, A. Sangam, D. Savelief

Quelques références sur les schémas AP

- **Limites quasineutres**
  - **Euler-Poisson :**
  - **Vlasov-Poisson :**
  - **Dérive-diffusion Poisson :**
- **Limites Bas Mach**

Quelques références sur les schémas AP

- **Limites quasineutres**
  - **Euler-Poisson :**
    - S. Fabre (1992),
    - Ph. Colella, M.R. Dorr, D.D. Wake (1999),
    - H.H. Choe, N.S. Yoon, S.S. Kim and D.I. Choi (2001),
    - P. Crispel, P. Degond, M.H. Vignal (2007),
    - P. Degond, J.G. Liu, M.H. Vignal (2008),
    - M.H. Vignal (2010).
  - **Vlasov-Poisson :**
  - **Dérive-diffusion Poisson :**
- **Limites Bas Mach**

Quelques références sur les schémas AP

- **Limites quasineutres**
  - **Euler-Poisson :**
  - **Vlasov-Poisson :**
    - R.J. Mason (1981,1983),
    - B.I. Cohen, A.B. Langdon, A. Friedman (1982,1983),
    - P. Degond, F. Deluzet, L. Navoret (2006),
    - R. Belaouar, N. Crouseilles, P. Degond, E. Sonnendrücker (2009),
    - P. Degond, F. Deluzet, L. Navoret, A.B. Sun, M.H. Vignal (2010).
  - **Dérive-diffusion Poisson :**
- **Limites Bas Mach**

Quelques références sur les schémas AP

- **Limites quasineutres**
  - **Euler-Poisson :**
  - **Vlasov-Poisson :**
  - **Dérive-diffusion Poisson :**
    - G. Lapenta, F. Iinoya, J.U. Brackbill (1995),
    - P.L.G. Ventzek, T.J. Sommerer, R.J. Hoekstra, M.J. Kushner, (1993),
    - P.L.G. Ventzek, R.J. Hoekstra, M.J. Kushner, (1994),
    - C. Chainais-Hillairet, M.H. Vignal.
- **Limites Bas Mach**

Quelques références sur les schémas AP

- **Limites quasineutres**
  - **Euler-Poisson :**
  - **Vlasov-Poisson :**
  - **Dérive-diffusion Poisson :**
- **Limites Bas Mach** - R. Klein (1995),
  - C.D. Munz, S. Roller, R. Klein, K.J. Geratz (2002),
  - J.H. Park, C.D. Munz (2005),
  - P. Degond, S. Jin and J.-G. Liu (2007),
  - P. Degond, F. Deluzet et A. Sangam, M.H. Vignal (2009),
  - S. Dellacherie (2010).

Plan

Le modèle de dérive diffusion adimensionné

➡ Pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1$, 2 ou 3) borné, et $t > 0$

$$
(DD)_\lambda \begin{cases} \partial_t N - \nabla \cdot \Big(\nabla r(N) - N \nabla \psi \Big) = 0, \\ \partial_t P - \nabla \cdot \Big(\nabla r(P) + P \nabla \psi \Big) = 0, \\ -\lambda^2 \Delta \psi = P - N + C, \end{cases} \qquad r(s) = s^\gamma, \quad \gamma \geq 1.
$$

➡ $N(x,t) =$ densité des électrons, $P(x,t) =$ densité des trous,
$\psi(x,t) =$ potentiel électrique, $C(x) =$ dopage (préconcentration),

$$
\lambda = \frac{\text{Longueur de Debye}}{\text{taille du domaine}} = \text{longueur de Debye adimensionnée} \ll 1
$$

➡ Existence, parfois unicité : -T. Seidman, G. Troianello (1985), -H. Gajewski (1985),
-P.A. Markowitch, C.A. Ringhofer, C. Schmeiser (1990).

➡ Preuve basée sur estimations L^∞, $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et pt fixe de Schauder

La limite quasineutre formelle

- Formellement $\lambda \to 0$:

$$(DD)_0 \begin{cases} \partial_t N - \nabla \cdot \Big(\nabla r(N) - N \nabla \psi \Big) = 0, \\ \partial_t P - \nabla \cdot \Big(\nabla r(P) + P \nabla \psi \Big) = 0, \\ 0 = P - N + C. \end{cases}$$

- On soustrait les éqs. de masse

$$\partial_t (P - N) - \Delta(r(P) - r(N)) - \nabla \cdot \Big((P + N) \nabla \psi \Big) = 0.$$

- Contrainte de quasineutralité $\Rightarrow$ équation explicite pour ψ

$$-\nabla \cdot \Big((P + N) \nabla \psi \Big) = \Delta(r(P) - r(N)).$$

La limite quasineutre formelle

- A partir du modèle microscopique

$$(DD)_\lambda \begin{cases} \partial_t N - \nabla\cdot\Big(\nabla r(N) - N\nabla\psi\Big) = 0, \\ \partial_t P - \nabla\cdot\Big(\nabla r(P) + P\nabla\psi\Big) = 0, \\ -\lambda^2\Delta\psi = P - N + C. \end{cases}$$

- On soustrait les éqs. de masse

$$\partial_t(P-N) - \Delta(r(P)-r(N)) - \nabla\cdot\Big((P+N)\nabla\psi\Big) = 0.$$

- On utilise l'eq. de Poisson

$$-\lambda^2\partial_t\Delta\psi - \nabla\cdot\Big((P+N)\nabla\psi\Big) = \Delta(r(P)-r(N)).$$

- Présence d'oscillations en temps à la période λ^2.
- Les schémas explicites doivent résoudre cette échelle $\Rightarrow \Delta t \leq \lambda^2$.

La limite quasineutre rigoureuse

➠ **Références :**

- I. Gasser (2001),
- I. Gasser, C.D. Levermore, P.A. Markovich, C. Schmeiser (2001),
- A. Jüngel, Y.J. Peng (2001),
- L. Xiao, P.A. Markowich, S. Wang (2002),
- C. Schmeiser, S. Wang (2003),
- L. Xiao, S. Wang (2003),
- S. Wang, X. Cai (2005),
- J. Ri, F. Huang (2009),

La limite quasineutre rigoureuse

➠ **Références :**

- I. Gasser (2001),
- I. Gasser, C.D. Levermore, P.A. Markovich, C. Schmeiser (2001),
- A. Jüngel, Y.J. Peng (2001),
- L. Xiao, P.A. Markowich, S. Wang (2002),
- C. Schmeiser, S. Wang (2003),
- L. Xiao, S. Wang (2003),
- S. Wang, X. Cai (2005),
- J. Ri, F. Huang (2009),

Equilibre thermique et dissipation d'entropie

- Système stationnaire ($\gamma = 1$)

$$\left\{\begin{array}{l} -\nabla\cdot\Big(\nabla N - N\,\nabla\psi\Big) = 0, \\[2mm] -\nabla\cdot\Big(\nabla P + P\,\nabla\psi\Big) = 0, \\[2mm] -\lambda^2\Delta\psi = P - N + C. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\nabla\cdot\Big(N\,\nabla\Big(\ln(N) - \psi\Big)\Big) = 0, \\[2mm] -\nabla\cdot\Big(P\,\nabla\Big(\ln(P) + \psi\Big)\Big) = 0, \\[2mm] -\lambda^2\Delta\psi = P - N + C. \end{array}\right.$$

- Existence de l'éq. thermique (N_e, P_e, ψ_e) : P.A. Markowitch, A. Unterreiter (1993)

$$\left\{\begin{array}{l} \ln(N_e) - \psi_e = \alpha_N = cste, \\[2mm] \ln(P_e) + \psi_e = \alpha_P = cste, \\[2mm] -\lambda^2\Delta\psi_e = \exp(\alpha_P - \psi_e) - \exp(\alpha_N + \psi_e) + C. \end{array}\right.$$

- Quand $t \to +\infty$, convergence vers l'éq. thermique : A. Jüngel (1995) $(C = 0)$

Dissipation d'entropie

- Entropie (ou énergie) du système instationnaire

$$e(t) = \int_\Omega \Big(H(N) - H(N_e) - \ln(N_e)\,(N - N_e) + H(P) - H(P_e) - \ln(P_e)\,(P - P_e) + \frac{\lambda^2}{2}\,|\nabla\psi - \nabla\psi_e|^2 \Big)\,dx \geq 0,$$

où $H(s) = \int_1^s \ln(u)\,du = s \ln s - s + 1$ est convexe.

- Dissipation d'entropie

$$\frac{de(t)}{dt} = -\int_\Omega \left(\frac{|\nabla N - N\nabla\psi|^2}{N} + \frac{|\nabla P + P\nabla\psi|^2}{P} \right) dx \leq 0.$$

- Estimation uniforme en λ

$$e(T) + \int_0^T \int_\Omega \left(\left| \frac{\nabla N - N\nabla\psi}{\sqrt{N}} \right|^2 + \left| \frac{\nabla P + P\nabla\psi}{\sqrt{P}} \right|^2 \right) dx\,dt \leq e(0).$$

La limite quasineutre rigoureuse

- I. Gasser, C.D. Levermore, P.A. Markowich, C. Schmeiser (2001)

$$(DD)_\lambda \begin{cases} \partial_t N - \nabla \cdot \Big(\nabla N - N\nabla\psi\Big) = 0, & \\ \partial_t P - \nabla \cdot \Big(\nabla P + P\nabla\psi\Big) = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t > 0. \\ -\lambda^2 \Delta\psi = P - N + C, & \end{cases}$$

- Cond. aux limites quasineutres et compatibles avec l'équilibre thermique

- Sur $\partial\Omega_D$: $N = N_b = n_b \exp(\psi_b), \quad P = P_b = n_b \exp(-\psi_b), \quad \psi = \psi_b,$

$$\text{avec} \quad P_b - N_b + C = 0.$$

- Sur $\partial\Omega_N$: $(\nabla N - N\nabla\psi)\cdot\nu = 0, \quad (\nabla P + P\nabla\psi)\cdot\nu = 0, \quad \nabla\psi\cdot\nu = 0.$

- Conditions initiales quasineutres

$$P_0 - N_0 + C = 0.$$

La limite quasineutre rigoureuse

Théorème : (Gasser-Levermore-Markowich-Schmeiser)

Si - $C \in H^1(\Omega)$, - P_0, $N_0 \in L^1(\Omega)$ uniformément en λ,

- $N + P \geq \underline{C}$, - Entropie $e(t=0)$ est indépendante de λ.

Alors $N^\lambda, P^\lambda \to N, P$ dans $L^1([0,T]\times\Omega)$ et $\nabla\psi^\lambda \rightharpoonup \nabla\psi$ dans $L^2(\Omega\times[0,T])$,

$$(DD)_0 \begin{cases} \partial_t N - \nabla\cdot\Big(\nabla N - N\nabla\psi\Big) = 0, \\ \partial_t P - \nabla\cdot\Big(\nabla P + P\nabla\psi\Big) = 0, \\ 0 = P - N + C. \end{cases}$$

- Sur $\quad \partial\Omega_D : \; N = N_b, \quad P = P_b, \quad \psi = \psi_b.$
- Sur $\quad \partial\Omega_N : \; (\nabla N - N\nabla\psi)\cdot\nu = 0, \quad (\nabla P + P\nabla\psi)\cdot\nu = 0.$

$$P_0 - N_0 + C = 0.$$

La limite quasineutre rigoureuse

- En choisissant $P+N$, $P-N$ et ψ comme inconnues

$$(DD)_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t(P+N) - \nabla\cdot\Big(\nabla(P+N) - C\nabla\psi\Big) = 0, \\ -\nabla\cdot\Big(-\nabla C + (P+N)\nabla\psi\Big) = 0, \\ P-N = -C. \end{cases}$$

- Sur $\partial\Omega_D$: $\quad P+N = P_b+N_b, \quad P-N = P_b-N_b = -C, \quad \psi = \psi_b.$

- Sur $\partial\Omega_N$: $\quad (\nabla(P+N) - C\nabla\psi)\cdot\nu = 0, \quad (-\nabla C + (P+N)\nabla\psi)\cdot\nu = 0.$

- Preuve basée sur :
  - la dissipation d'entropie,
  - des injections de Sobolev.

- Si $C=0$, plus simple car estimations L^∞ et $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ uniformes en λ, I. Gasser (2001).

Plan

Le schéma implicite

- Si N^n, P^n, ψ^n sont des approximations connues au temps t^n

$$\begin{cases} N^{n+1} - N^n - \Delta t\, \nabla \cdot \Big(\nabla N^{n+1} - N^{n+1} \nabla \psi^{n+1} \Big) = 0, \\ P^{n+1} - P^n - \Delta t\, \nabla \cdot \Big(\nabla P^{n+1} + P^{n+1} \nabla \psi^{n+1} \Big) = 0, \\ -\lambda^2 \Delta \psi^{n+1} = P^{n+1} - N^{n+1} + C. \end{cases}$$

- Schéma couplé $\Rightarrow$ non linéaire $\Rightarrow$ algorithme de Newton.
- Schéma asymptotiquement stable et consistant.
- Discrétisation en espace : Scharfetter-Gummel, décentré amont...

Le schéma implicite, résultats

- Existence unicité de la solution
  - Semi-discrétisé en temps : - estimations L^∞, $L^2(0,T;H^1(\Omega))$,
    - point fixe de Schauder.
  - Schéma espace-temps : - estimations L^∞, degré topologique,
    (C. Chainais-Hillairet, J.G. Liu, Y.J. Peng, 2003,2004).

- Pour $C = 0$, stabilité L^∞ et $L^2(]0,T[;H^1(\Omega))$ uniformes en λ.

- Dissipation discrète d'entropie (Marianne Chatard, à paraître).

- Preuve de Gasser-Levermore-Markowich-Schmeiser passe pour
  le schéma semi-discrétisé en temps.

- Construction du schéma AP découplé
  - Termes de couplage implicites $\Rightarrow$ stabilité uniforme en λ

$$\begin{cases} N^{n+1} - N^n - \Delta t\, \nabla \cdot \left(\nabla N^n - N^n \nabla \psi^{n+1} \right) = 0, & (1) \\ P^{n+1} - P^n - \Delta t\, \nabla \cdot \left(\nabla P^n + P^n \nabla \psi^{n+1} \right) = 0, & (2) \\ -\lambda^2 \Delta \psi^{n+1} = P^{n+1} - N^{n+1} + C, & (3) \end{cases}$$

  - En éliminant P^{n+1} et N^{n+1}, l'eq. (3) devient

$$-\lambda^2 \Delta \psi^{n+1} - \Delta t\, \nabla \cdot \left((N^n + P^n) \nabla \psi^{n+1} \right) = P^n - N^n + C + \Delta t\, \Delta (P^n - N^n).$$

  - Equation de Poisson reformulée

$$-\nabla \cdot \left(\left(\lambda^2 + \Delta t\, (N^n + P^n) \right) \nabla \psi^{n+1} \right) = P^n - N^n + C + \Delta t\, \Delta (P^n - N^n).$$

Le schéma asymptotiquement préservant découplé

➠ On remplace l'éq. de Poisson par l'eq. de Poisson reformulée dans le schéma implicite

$$\begin{cases} N^{n+1} - N^n - \Delta t \, \nabla \cdot \left(\nabla N^{n+1} - N^{n+1} \nabla \psi^{n+1} \right) = 0, \\ P^{n+1} - P^n - \Delta t \, \nabla \cdot \left(\nabla P^{n+1} + P^{n+1} \nabla \psi^{n+1} \right) = 0, \\ -\nabla \cdot \left(\left(\lambda^2 + \Delta t \, (N^n + P^n) \right) \nabla \psi^{n+1} \right) = P^n - N^n + C + \Delta t \; \Delta (P^n - N^n). \end{cases}$$

- ➠ Schéma découplé $\Rightarrow$ linéaire.
- ➠ Schéma asymptotiquement stable et consistant (numériquement).
- ➠ Discrétisation en espace : Scharfetter-Gummel, décentré amont...

Le schéma AP, résultats

- Existence unicité de la solution : idem schéma implicite

- Formellement
  - $\lambda = 0$ dans le schéma

$$\begin{cases} N^{n+1} - N^n - \Delta t\, \nabla \cdot \Big(\nabla N^{n+1} - N^{n+1} \nabla \psi^{n+1} \Big) = 0, \\ P^{n+1} - P^n - \Delta t\, \nabla \cdot \Big(\nabla P^{n+1} + P^{n+1} \nabla \psi^{n+1} \Big) = 0, \\ -\nabla \cdot \Big(\Big(\Delta t\, (N^n + P^n) \Big) \nabla \psi^{n+1} \Big) = P^n - N^n + C + \Delta t\, \Delta (P^n - N^n). \end{cases}$$

  - Développement asymptotique en Δt

$\Delta t^0 \quad \rightarrow \quad$ la quasineutralité : $P^n - N^n + C = 0,$

$\Delta t^1 \quad \rightarrow \quad$ discrétisation de l'eq. quasineutre du potentiel ψ :

$$-\nabla \cdot \Big(\Big((N^n + P^n) \Big) \nabla \psi^{n+1} \Big) = \Delta (P^n - N^n) = -\Delta C.$$

Plan

Cas test en dimension une

- Domaine $x \in]0,1[$, 100 mailles uniformes.
- $\lambda^2 = 10^{-10}$, $\Delta t = 10^{-3}$
- Profile de dopage non constant : $C(x) = \begin{cases} -1, & \text{for } x < 1/2, \\ +1, & \text{for } x > 1/2. \end{cases}$
- Conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{aligned} &P(x=0,t) = \overline{P}_0, \quad N(x=0,t) = \overline{N}_0, \quad \psi(x=0,t) = \overline{\psi}_0, \\ &P(x=1,t) = \overline{P}_0, \quad N(x=1,t) = \overline{N}_1, \quad \psi(x=1,t) = \overline{\psi}_1. \end{aligned}$$

  - Conditions quasineutres : $\overline{P}_{0,1} - \overline{N}_{0,1} + C = 0.$
  - Conditions non quasineutres : $\overline{P}_{0,1} - \overline{N}_{0,1} + C \neq 0.$
- Conditions initiales : $P(x,t=0) = P_0$, $N(x,t=0) = N_0$.
  - Conditions quasineutres : $P_0 - N_0 + C = 0.$
  - Conditions non quasineutres : $P_0 - N_0 + C \neq 0.$

Conditions aux limites et initiales quasineutres

Temps CPU implicite : 1.5938 s.

Temps CPU AP : 0.5938 s.

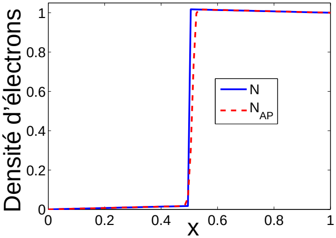
Gain ≈ 2.7.

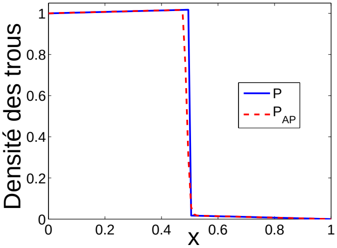
Erreurs rel. en norme L^2 :

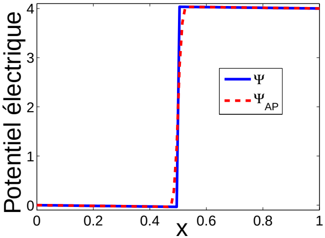
sur N : 0.1077,

sur P : 0.1077,

sur ψ : 0.0623.







Cond. init. quasineutres (QN) et cond. aux limites non QN

Temps CPU implicite : 1.6250s.

Temps CPU AP : 0.5938s.

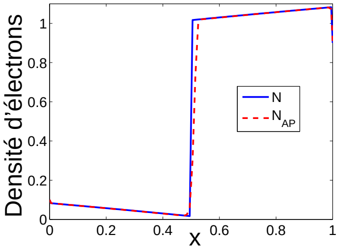
Gain ≈ 2.7.

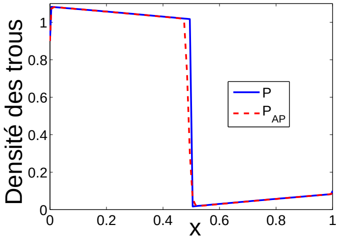
Erreurs rel. en norme L^2 :

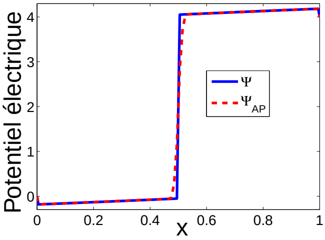
sur N : 0.1038,

sur P : 0.1038,

sur ψ : 0.0614.



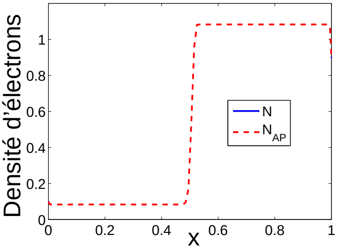


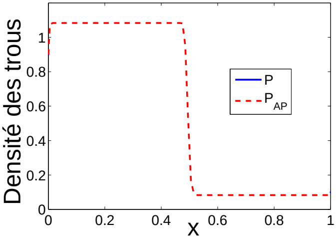


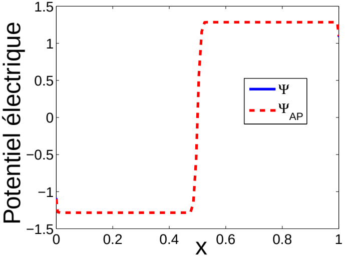
Conditions aux limites et initiales non quasineutres

Schéma implicite instable.

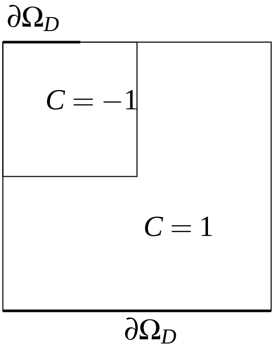
Temps CPU AP : 0.6094 s.







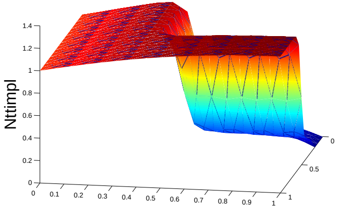
Diode - Jonction PN



- $\lambda^2 = 10^{-3}$ ou 10^{-10}, $\Delta t = 5\ 10^{-4}$.
- Temps final T=0.5
- Maillage en espace : 896 triangles.
- Conditions aux limites :
  - Sur $\partial\Omega_D$: conditions de Dirichlet quasineutres.
  - Ailleurs : conditions de Neumann homogènes.
- Conditions initiales quasineutres.

Diode - Jonction PN, $\lambda^2 = 10^{-3}$, $\Delta t = 5\ 10^{-4}$

Schéma implicite



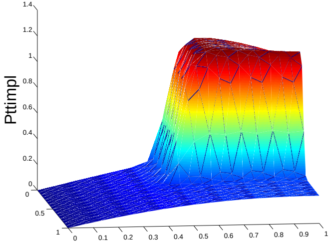
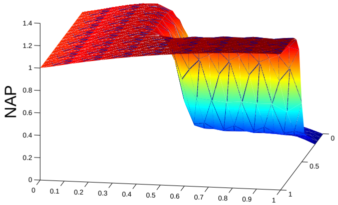


Schéma AP



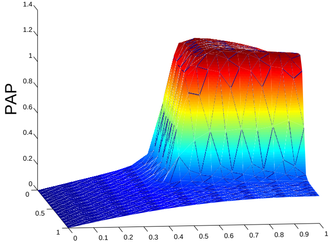


Schéma implicite

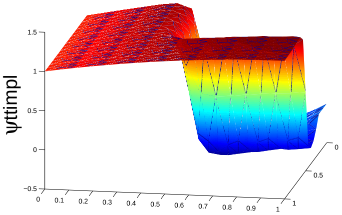
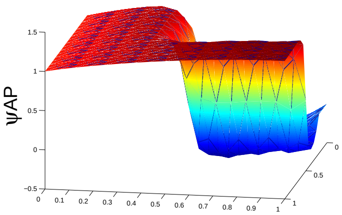


Schéma AP



-Temps CPU schéma implicite : 86.7656s.

-Temps CPU schéma AP découplé : 16.5000s.

$\Rightarrow$ gain ≈ 5.3.

-Erreurs relatives en norme L^2 : Sur N : 0.0532,

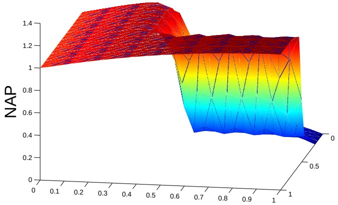
Sur P : 0.0482,

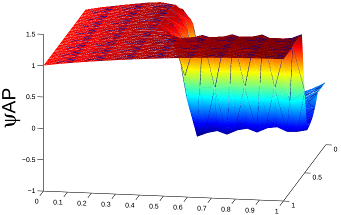
Sur ψ : 0.0667.

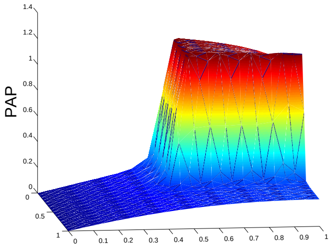
Diode - Jonction PN, $\lambda^2 = 10^{-10}$, $\Delta t = 5\ 10^{-4}$

Schéma implicite instable

Schéma AP découplé







Plan

Travaux en cours et perspectives

- Convergence uniforme en λ du schéma implicite en espace et en temps.
- Convergence uniforme en λ du schéma AP découplé.
- Etude des couches limites initiale et en espace.
- Comportement en temps long du schéma AP découplé
  Schéma semi-implicite (C. Chainais-Hillairet, F. Filbet, 2010).
- Problème de corrosion d'acier (C. Chainais-Hillairet, C. Bataillon)

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t N - \nabla \cdot \Big(\nabla N - N \nabla \psi \Big) = 0, \\ \partial_t P - \nabla \cdot \Big(\nabla P + P \nabla \psi \Big) = 0, \\ -\lambda^2 \Delta \psi = P - N + C. \end{cases}$$

Deux petits paramètres ε et λ, construire un schéma AP dans la double limite.