

# Schémas asymptotiquement préservants pour des modèles fluides de plasma

Marie-Hélène Vignal

**IMT**: Institut de Mathématiques de Toulouse

Université Toulouse 3

# 1. Introduction

⇒ Modélisation numérique d'un dispositif tel que

⇒ un des **paramètres physiques importants**,  $\varepsilon$ , est :

- très petit dans une **partie du domaine** :  $\varepsilon \ll 1$ ,

- **d'ordre 1 ailleurs** :  $\varepsilon = O(1)$ ,

⇒ On ne cherche pas à décrire l'échelle  $\varepsilon$ .

⇒ Modèle de départ  $M_\varepsilon$  :

⇒ Valide partout

⇒ Schémas classiques explicites **stables et consistants**

**ssi  $\varepsilon$  est résolu** par le maillage  $\Rightarrow$  **coût trop important.**

## Une solution possible

- Utiliser  $M_\varepsilon$  où  $\varepsilon = O(1)$ .
- Utiliser un modèle asymptotique où  $\varepsilon \ll 1$  :

$$M_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon.$$

- Problèmes :**
  - Reconnection de  $M_\varepsilon$  et  $M_0$ .
  - Interface mobile** : pb numérique difficile en 2D ou 3D.

## Une autre solution possible

⇒ Utiliser  $M_\varepsilon$  partout.

⇒ Le discrétiser avec un schéma tel que :

⇒ il n'a pas besoin de résoudre l'échelle  $\varepsilon$  :

Stabilité asymptotique

⇒ il donne une sol. approchée de  $M_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

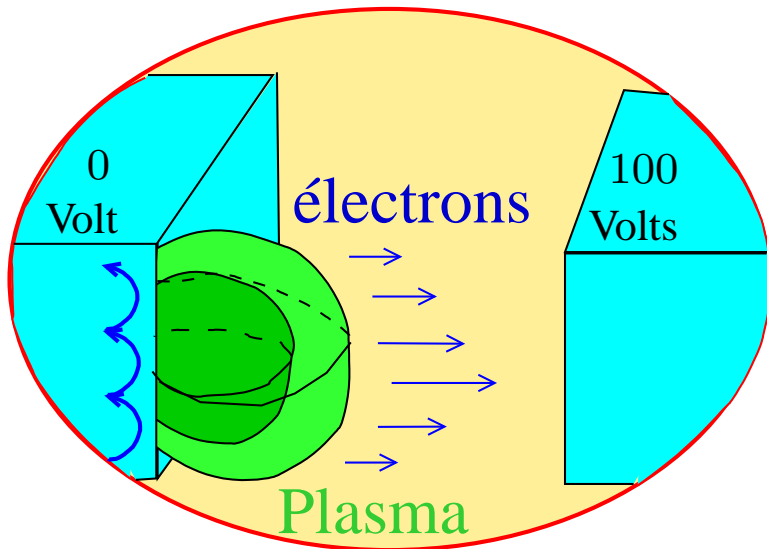
Consistance asymptotique

Schéma asymptotiquement stable et consistant

⇒ Schéma asymptotiquement préservant

([S.Jin] cinétique  $\rightarrow$  fluide)

Ex. 1 : expansion d'un plasma entre 2 électrodes



Diodes à forts courants,  
C. Parzani, P. Degond,  
Contrat CEA/DAM.

Arcs panneaux solaires,  
Contrat CNES.

P. Crispel, P. Degond, F. Deluzet, D. Savelief

Schéma AP pour Euler-Poisson dans la limite quasineutre

P. Crispel, P. Degond, MHV, JCP 07.

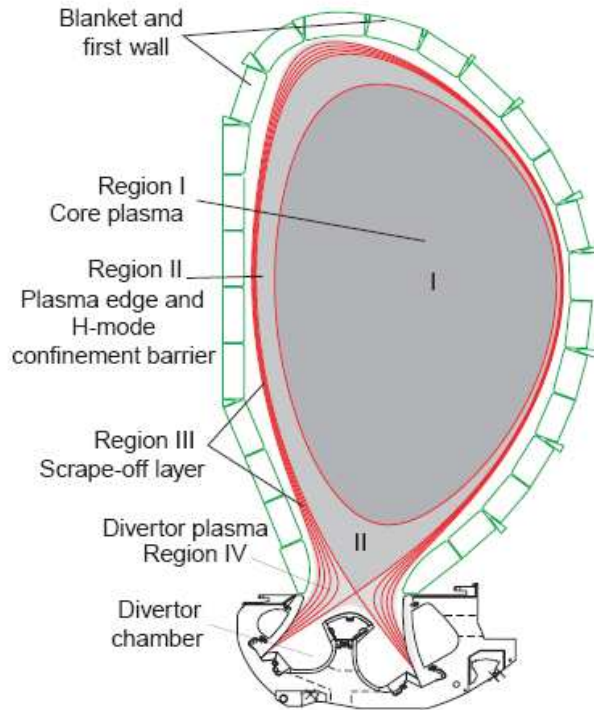
Stabilité asympt. : P. Degond, JG. Liu, MHV, SIAM 08.

## Ex. 2 : Fusion par confinement magnétique, ITER

→ contrat CEA Saclay, 2006-...

- P. Degond, F. Deluzet,  
N. Lemarchant

- A. Ambroso, P. Omnès, J. Segré



→ contrat CEA Cadarache, 2008-...

- P. Degond, F. Deluzet,

- A. Sangam (Post-doc CNRS).

- X. Garbet, G. Falchetto, M. Ottaviani

- S. Hirstoaga (Post-doc INRIA), E. Sonnendrücker

- ▣ Schémas AP, **limite quasi-neutre**,
  - ▣ Euler-Maxwell,
  - ▣ Vlasov-Poisson, Vlasov-Maxwell
  
- ▣ Schémas AP, **limite bas Mach** pour Euler.
  
- ▣ **Limites de dérive** (champ magnet. fort)
  - ▣ Euler-Maxwell (**Euler-Lorentz**)
  - ▣ Vlasov-Maxwell



## 1. Introduction

## 2. Un schéma AP dans la limite de dérive pour Euler-Lorentz

2.1. La limite de dérive pour Euler-Lorentz

2.2. Le schéma classique pour Euler-Lorentz

2.3. Le schéma AP pour Euler-Lorentz

2.4. Résultats numériques

## 3. Conclusion

## 2. Un schéma AP dans la limite de dérive pour le système d'Euler-Lorentz

Collaborateurs :

P. Degond, F. Deluzet, A. Sangam

Article accepté au JCP

➡ Loi de pression isotherme pour simplifier

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, \\ m \left( \partial_t (n u) + \nabla (n u \otimes u) \right) + T \nabla n \\ \hspace{15em} = q n (E + u \times B). \end{cases}$$

➡  $n =$  densité ions,

$u =$  vitesse ions,

$m =$  masse ions,

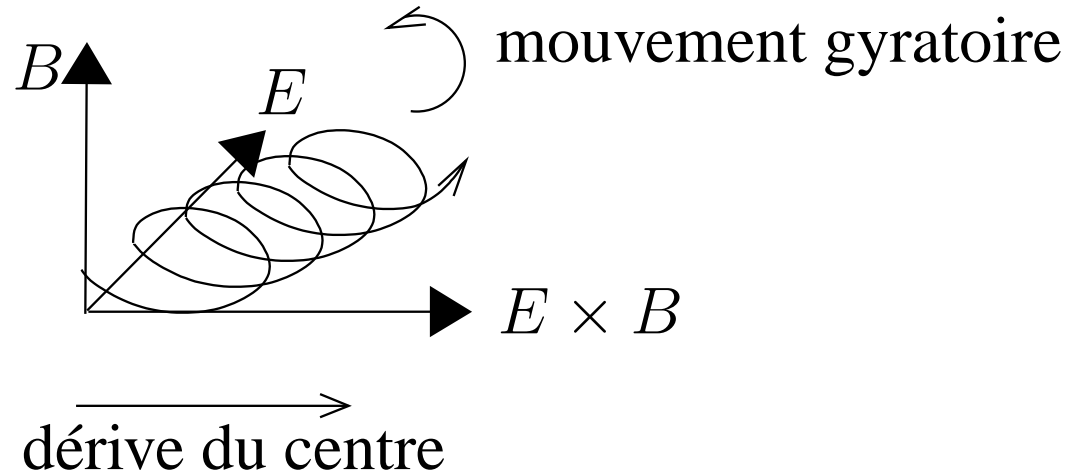
$T =$  température constante,

$q =$  charge ions,

$E =$  champ électrique,

$B =$  champ magnétique.

- ➡ Mvt d'une part. dans un champ électromagnétique



- ➡ Régime tel que :

- ➡ Forces de Lorentz et de pression très fortes

- ➡ Conséquences :

- ➡ gyro-période  $\ll 1$ .

- ➡ Dynamique  $// B$  plus rapide que  $\perp B$ .

►► Choix de l'adimensionnement

$$\bar{t} = t/t_0, \quad \bar{x} = x/x_0, \quad \bar{n} = n/n_0, \quad \bar{u} = u/(x_0/t_0),$$

$$\bar{T} = T/T_0, \quad \bar{B} = B/|B_0|, \quad \bar{E} = E/(u_0 |B_0|),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\bar{t}} \bar{n} + \nabla \cdot (\bar{n} \bar{u}) = 0, \\ \partial_{\bar{t}} (\bar{n} \bar{u}) + \nabla (\bar{n} \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{T_0}{m u_0^2} \bar{T} \nabla \bar{n} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{t_0}{(q B_0/m)^{-1}} \bar{n} (\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}). \end{array} \right.$$

►► Forces de Lorentz et de pression très fortes

$$\varepsilon = \frac{\text{gyro-période}}{\text{tps carac.}} = \frac{(q B_0/m)^{-1}}{t_0} = (\text{nbre Mach})^2 = \frac{m u_0^2}{T_0} \ll 1$$

⇒ Système d'Euler-Lorentz adimensionné

$$(EL_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, \\ \varepsilon \left( \partial_t (n u) + \nabla (n u \otimes u) \right) + T \nabla n \\ \qquad \qquad \qquad = n (E + u \times B). \end{cases}$$

Limite de dérive :  $\varepsilon \rightarrow 0$

⇒  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $(EL_\varepsilon) \Rightarrow$  modèle Fluide de Dérive

$$(FD) \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, \\ T \nabla n = n (E + u \times B). \end{cases}$$

⇒ Décomposition de la vitesse selon  $b = \frac{B}{\|B\|}$

⇓

$$u = \overbrace{(I - b \otimes b) u}^{u_\perp} + \overbrace{(u \cdot b) b}^{u_{//b}}$$

⇒ Projection de l'équation en vitesse

⇒ Partie perpendiculaire

$$b \times (T \nabla n - n E = n u \times B) \Rightarrow n u_{\perp} = \frac{b}{\|B\|} \times (T \nabla n - n E)$$

⇒ Eq. explicite pour  $n u_{\perp}$

⇒ Partie parallèle

$$b \cdot (T \nabla n - n E = n u \times B) \Rightarrow b \cdot (T \nabla n - n E) = 0$$

⇒ Eq. implicite pour  $n u_{\parallel}$

⇒  $u_{\parallel} =$  multiplicateur de Lagrange de  $b \cdot (T \nabla n - n E) = 0$



# Eq. explicite pour la vitesse parallèle I 17

►►► Pour simplifier  $B = \text{constante}$  (pas nécessaire)

$$(FD) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, & (1) \\ n u_{\perp} = \frac{b}{\|B\|} \times (T \nabla n - n E), & (2) \\ b \cdot (T \nabla n - n E) = 0. & (3) \end{cases}$$

$$\text{►►► } T b \cdot \nabla(1) \Rightarrow T b \cdot \nabla \partial_t n + T b \cdot \nabla(\nabla \cdot (n u)) = 0$$

$$\text{►►► } \partial_t(3) \Rightarrow T b \cdot \nabla \partial_t n - \partial_t(n b \cdot E) = 0$$

Différence  $\Rightarrow$  Equation elliptique pour  $u_{//}$

# Eq. explicite pour la vitesse parallèle II 18

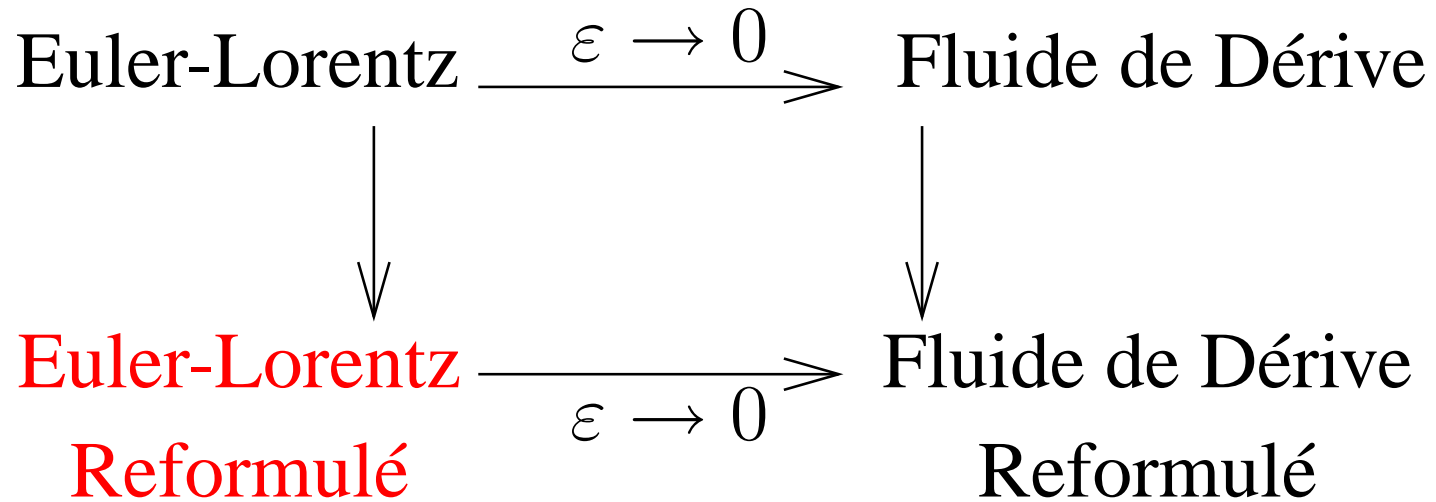
Equation elliptique pour  $u_{//}$

$$\underbrace{-T (b \cdot \nabla)(\nabla \cdot (nu_{//}b))}_{\nabla_{//}(\nabla_{//} \cdot (nu)_{//})} = T b \cdot \nabla(\nabla \cdot (nu_{\perp})) + \partial_t(n b \cdot E)$$

$\longrightarrow$  opérateurs duaux 1D

Modèle Fluide de Dérive Reformulé

$$(FD) \Leftrightarrow (FDR) \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, \\ nu_{\perp} = \frac{b}{\|B\|} \times (T \nabla n - n E), \\ -T \nabla_{//}(\nabla_{//} \cdot (nu)_{//}) = RHS. \end{cases}$$



⇒ Dans le modèle d'Euler-Lorentz

$$(T b \cdot \nabla) \text{ Eq. masse} - (b \cdot \partial_t) \text{ Eq. vitesse}$$



$$\varepsilon \partial_{tt}^2(nu_{//}) - T(b \cdot \nabla)(\nabla \cdot (nu_{//} b)) = RHS$$

➡ Modèle d'Euler-Lorentz reformulé

$$(ELR_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, \\ \left( \varepsilon \left( \partial_t (n u) + \nabla (n u \otimes u) \right) + T \nabla n \right. \\ \left. = n (E + u \times B) \right)_\perp, \\ \varepsilon \partial_{tt}^2 (n u_{//}) - T (b \cdot \nabla) (\nabla \cdot (n u_{//} b)) = RHS. \end{array} \right.$$

➡ Formellement **équivalent** à **Euler-Lorentz**

⇒ Donne (FDR) qd  $\varepsilon = 0 \Rightarrow$  propriété de **consistance**.

⇒ Eq. des ondes sur  $nu_{//}$

$$\varepsilon \partial_{tt}^2(nu_{//}) - T(b \cdot \nabla)(\nabla \cdot (nu_{//} b)) = RHS$$

⇒ Schéma **explicite**  $\Rightarrow$  stabilité **conditionnelle**

⇒ Schéma **implicite**  $\Rightarrow$  stabilité **inconditionnelle**

## 2.2. Schéma classique pour Euler-Lorentz

➡ Si  $n^m$  et  $u^m$  approx. connues au temps  $t^m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \nabla \cdot (n u)^m = 0, \\ \varepsilon \left( \frac{(n u)^{m+1} - (n u)^m}{\Delta t} + \nabla (n u \otimes u)^m \right) + T \nabla n^m \\ \qquad \qquad \qquad = n^{m+1} (E + u \times B)^{m+1}. \end{array} \right.$$

➡ Stable et consistant ssi  $\Delta t = O(\sqrt{\varepsilon})$

## Reformulation discrète

$(T b \cdot \nabla)$  Eq. masse –  $(b \cdot \partial_t \text{ discret})$  Eq. vitesse

$\Downarrow$

$$\varepsilon \frac{(nu_{//})^{m+1} - 2(nu_{//})^m + (nu_{//})^{m-1}}{\Delta t^2} - T(b \cdot \nabla)(\nabla \cdot (nu_{//} b)^{m-1}) = RHS$$

Schéma explicite  $\Rightarrow$  stabilité conditionnelle

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$  on perd  $u_{//}^{m+1} \Rightarrow$  pb de consistance



## 2.3. Schéma AP pour Euler-Lorentz

▣▣▣ Si  $n^m$  et  $u^m$  approx. connues au temps  $t^m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \nabla \cdot (n u)^{m+1} = 0, \\ \varepsilon \left( \frac{(n u)^{m+1} - (n u)^m}{\Delta t} + \nabla (n u \otimes u) \right)^m + T (\nabla n)^{m+1/2} \\ \qquad \qquad \qquad = n^m E^{m+1} + (n u \times B)^{m+1}, \\ (\nabla n)^{m+1/2} = (\nabla n)_{//}^{m+1} + (\nabla n)_{\perp}^m. \end{array} \right.$$

▣▣▣ Asymptotiquement stable et consistant

➡ Reformulation discrète

$(T b \cdot \nabla)$  Eq. masse –  $(b \cdot \partial_t \text{ discret})$  Eq. vitesse

⇓

$$\varepsilon \frac{(nu_{//})^{m+1} - 2(nu_{//})^m + (nu_{//})^{m-1}}{\Delta t^2} - T(b \cdot \nabla)(\nabla \cdot (nu_{//} b)^{m+1}) = RHS$$

➡ Schéma implicite  $\Rightarrow$  stabilité inconditionnelle

➡  $\varepsilon = 0 \Rightarrow$  on conserve  $u_{//}^{m+1} \Rightarrow$  consistant limite dérive

## 2.3. Résultats numériques

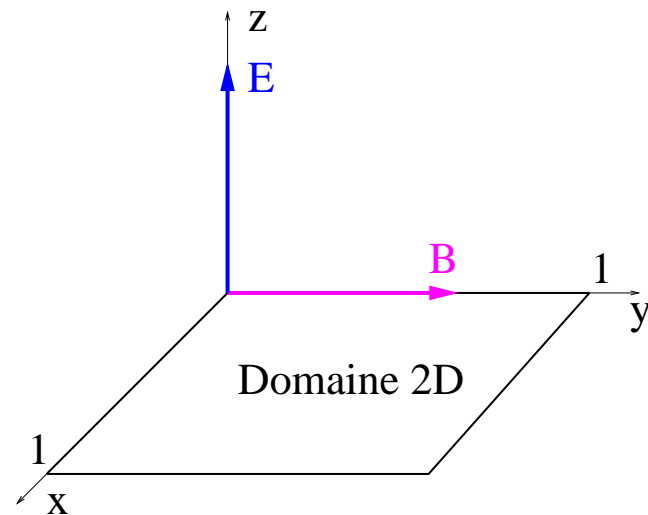
$$(EL_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n u) = 0, \\ \varepsilon \left( \partial_t (n u) + \nabla (n u \otimes u) \right) + T \nabla n \\ \hspace{15em} = n (E + u \times B). \end{cases}$$

Cas résolu :  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max |u \pm \sqrt{T/\varepsilon}|}$

Cas non résolu :  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max |u|}$

$$\Rightarrow T = 1, \quad E = (0, 0, 1), \quad B = (0, 1, 0),$$

$$\varepsilon = 10^{-6} \text{ ou } 1, \quad \Delta x = \Delta y = 1/100.$$



$$(n u)_{//} = (n u)_y$$

$$(n u)_{\perp} = \begin{pmatrix} (n u)_x \\ 0 \\ (n u)_z \end{pmatrix}$$

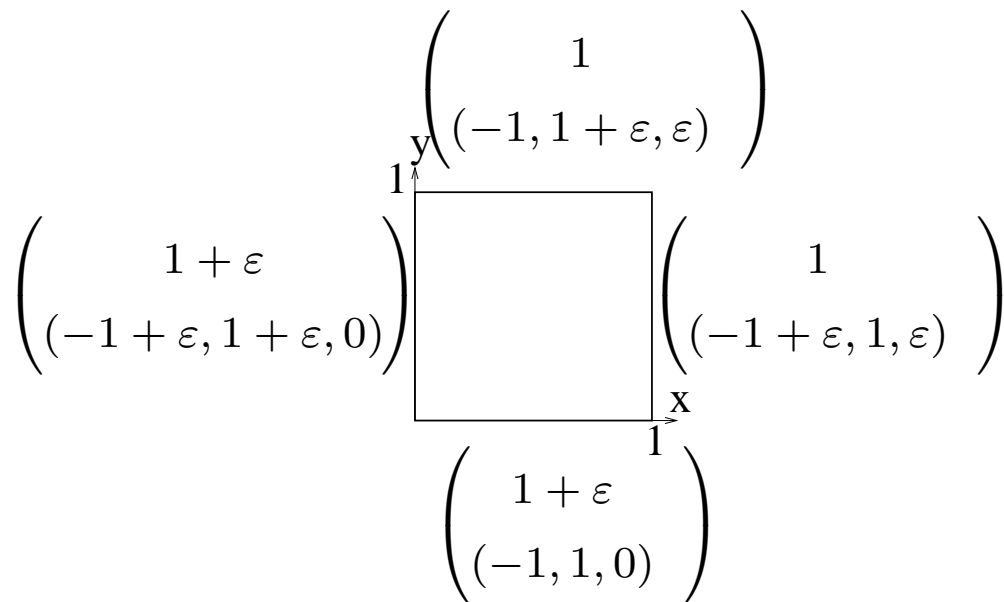
$\Rightarrow$  Cond. initiale

$$(n, nu) = (1, (0, 0, 0))$$

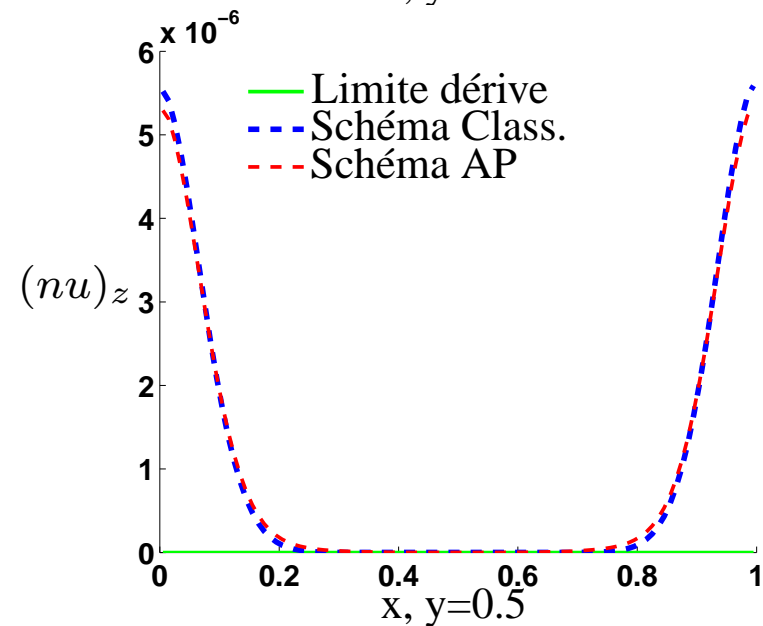
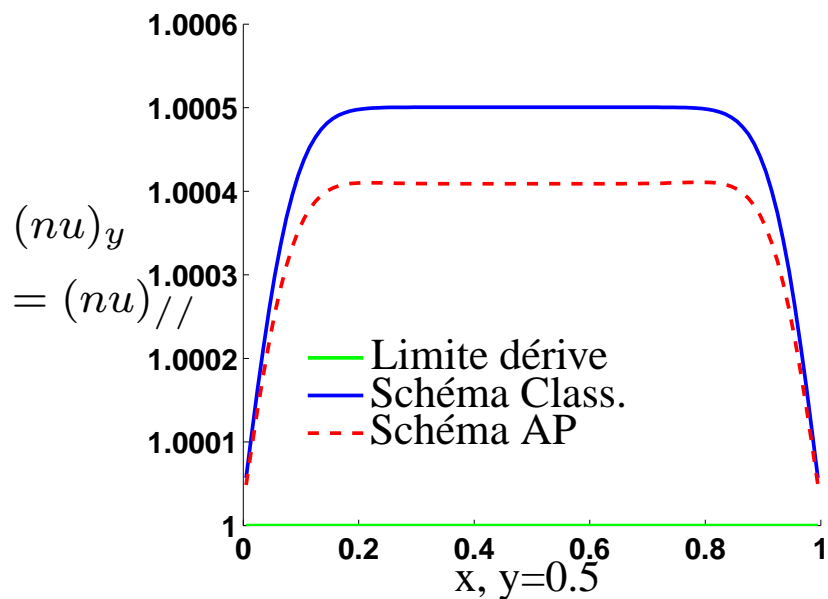
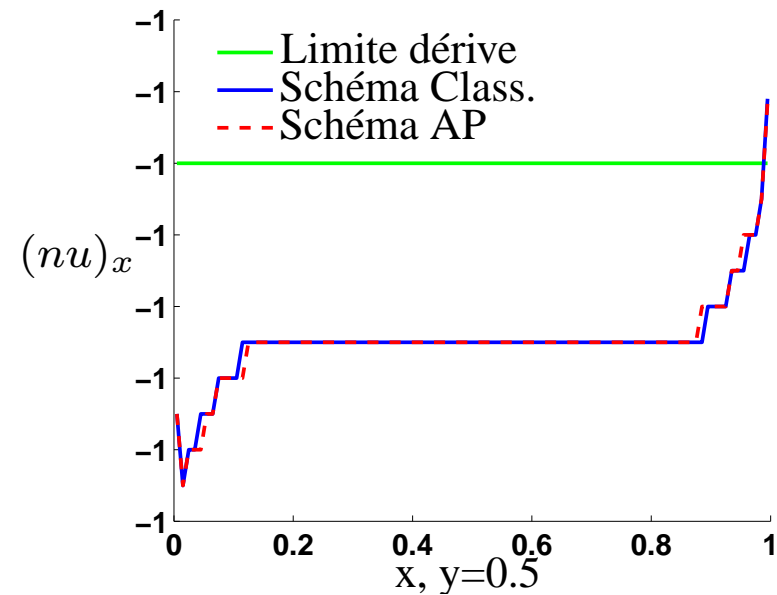
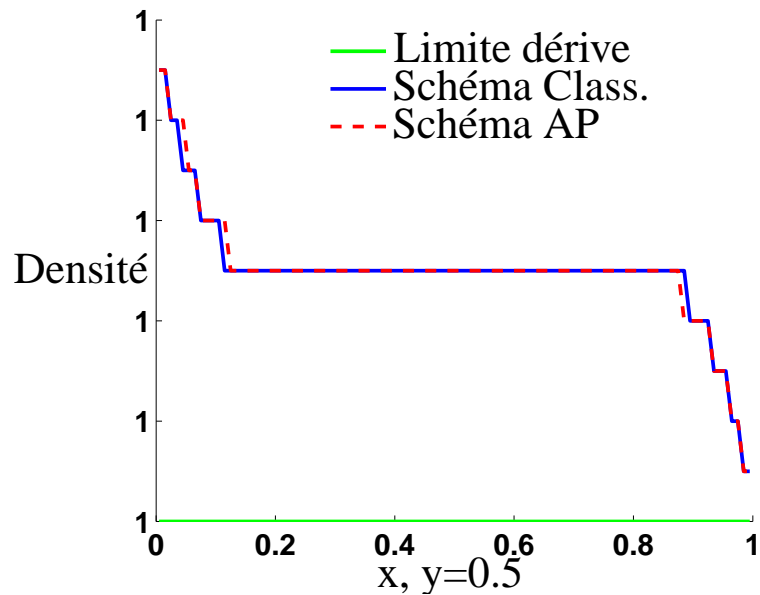
$\Rightarrow$  Sol. exacte de Fluide de Dérive

$$(n, nu)(x, t) = (1, (-1, 1, 0))$$

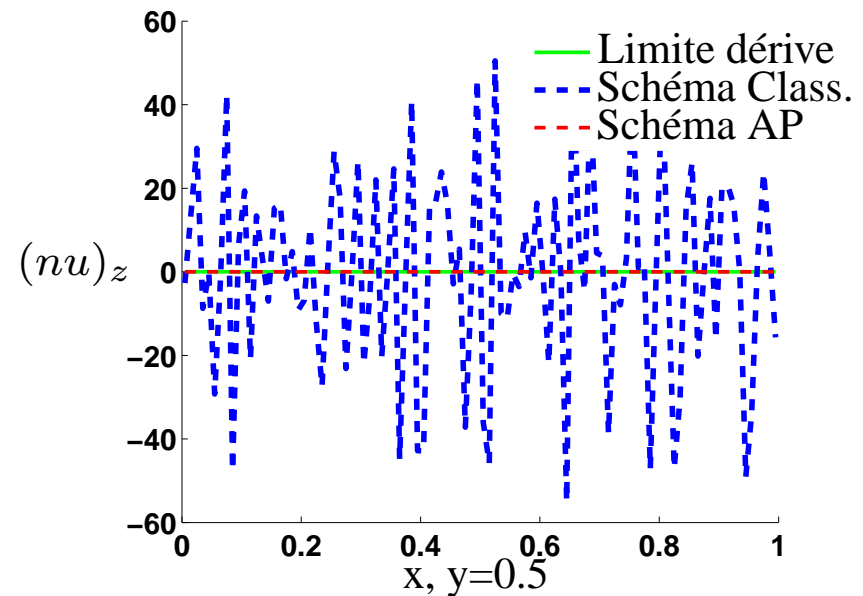
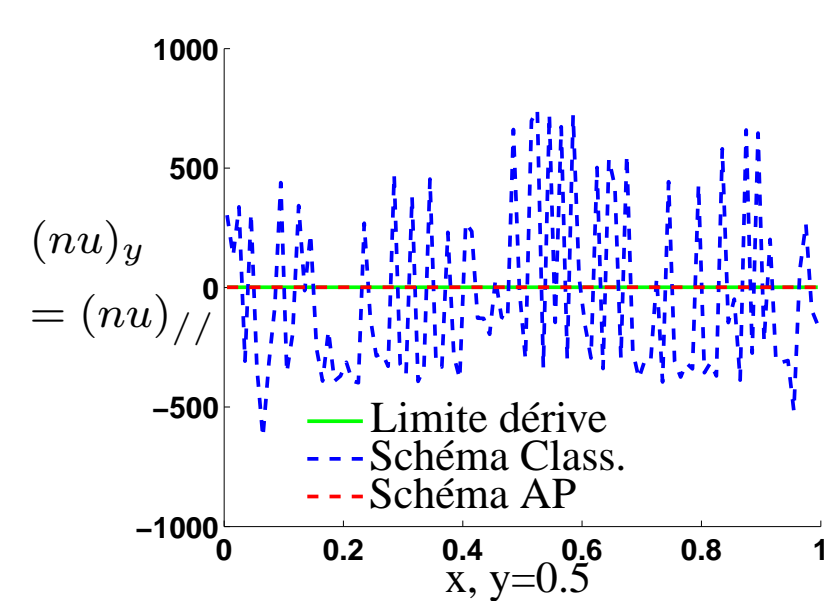
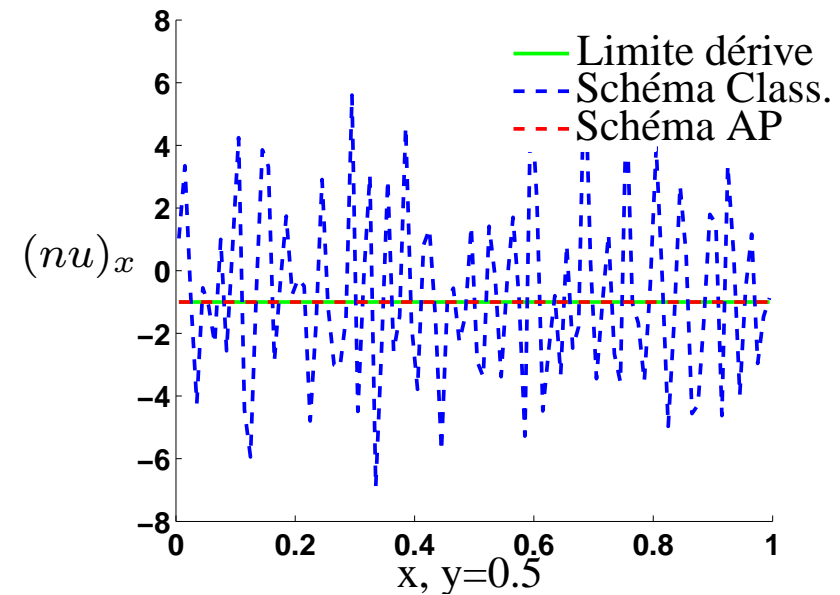
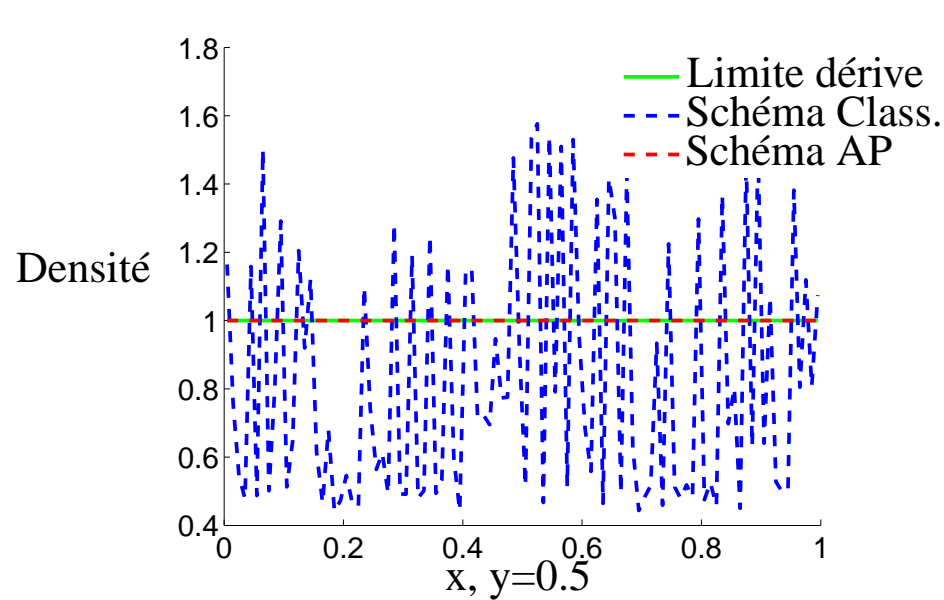
Cond. aux limites bien préparées au régime de dérive



$$\varepsilon = 10^{-6} \text{ ou } 1$$







# Comparaison erreurs, rés. et non rés. 34

 $n$ 

	Rés.	Non rés.
Class.	$8.68 \cdot 10^{-5}$	59.4
AP	$8.72 \cdot 10^{-5}$	$9.56 \cdot 10^{-5}$

 $nu_x$ 

	Rés.	Non rés.
Class.	$2.74 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^3$
AP	$2.87 \cdot 10^{-4}$	$6.96 \cdot 10^{-5}$

 $nu_y$ 

	Rés.	Non rés.
Class.	$4.55 \cdot 10^{-2}$	$8.69 \cdot 10^4$
AP	$3.94 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-4}$

 $nu_z$ 

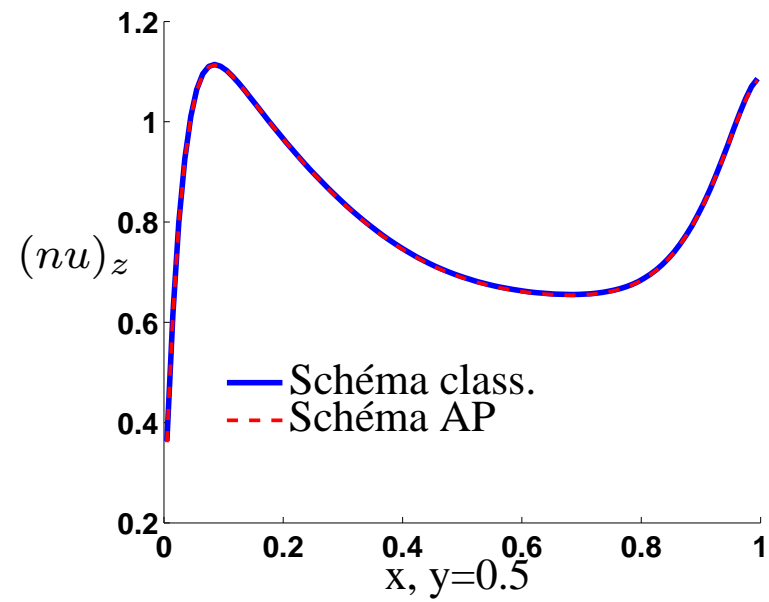
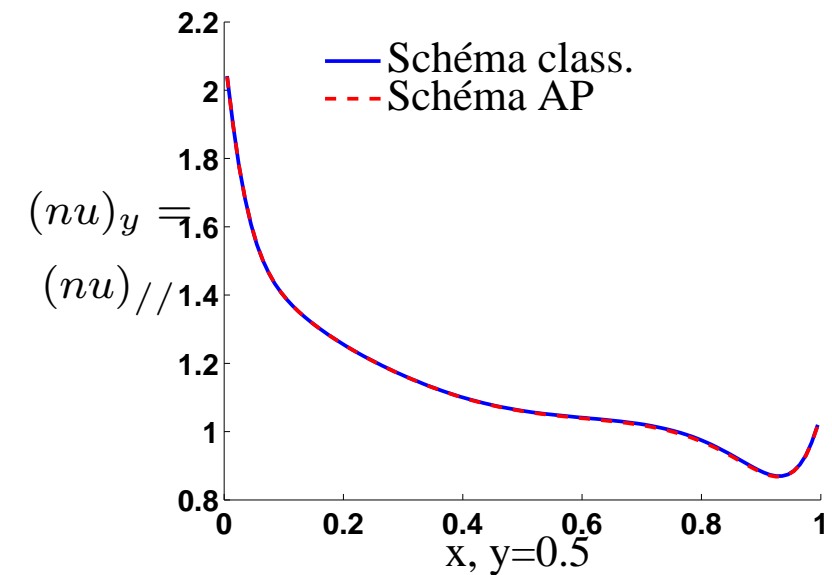
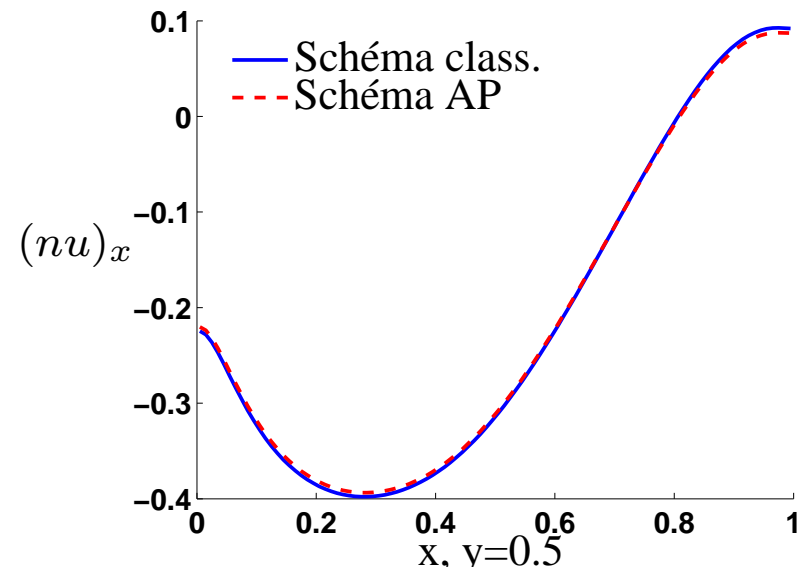
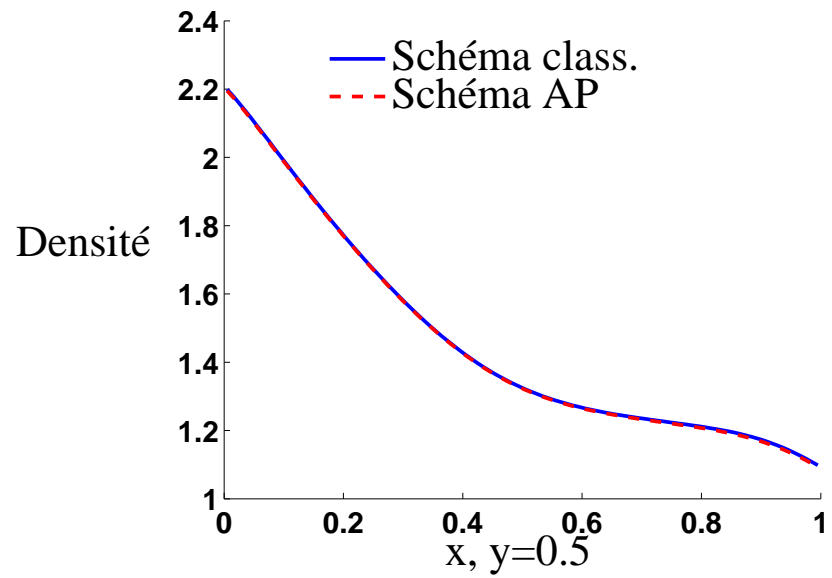
	Rés.	Non rés.
Class.	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$5.83 \cdot 10^3$
AP	$2.07 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$

## Comparaison des temps CPU en secondes

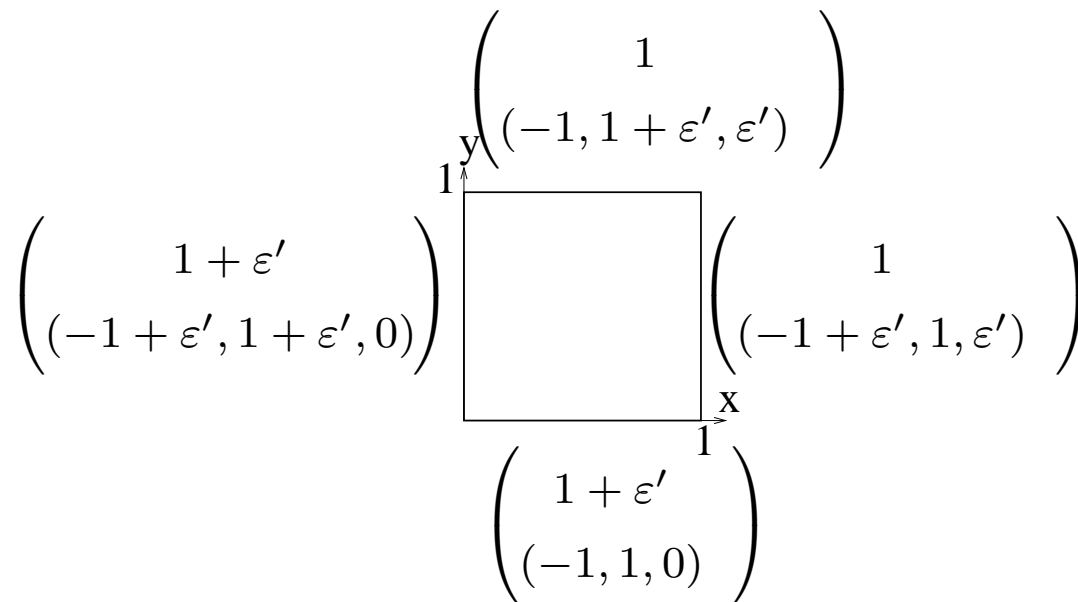
$\varepsilon$	tps final	Class rés.	AP non rés.	rapport
$10^{-5}$	1	4940.3	13.8	357
$10^{-6}$	0.1	1584.2	1.39	1140
$1.5 \cdot 10^{-8}$	0.01	1149.5	0.17	6762

## Pas de temps

$\varepsilon$	AP res.	AP non rés.
$10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$



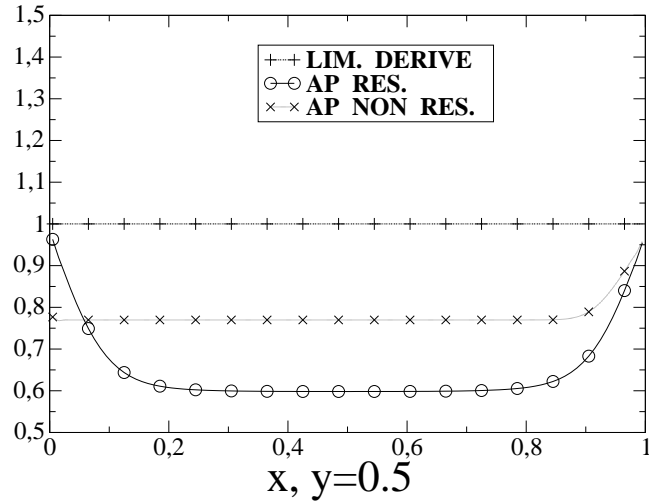
Cond. aux limites pas préparées au régime de dérive



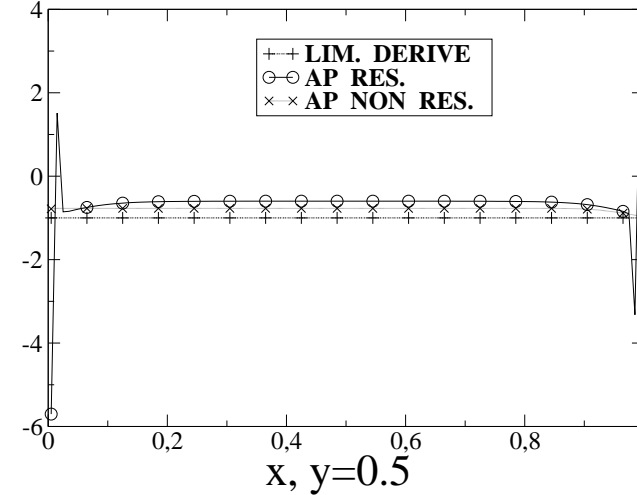
$$\varepsilon = 10^{-6}$$

$$\varepsilon' = 10^{-2}$$

Densité

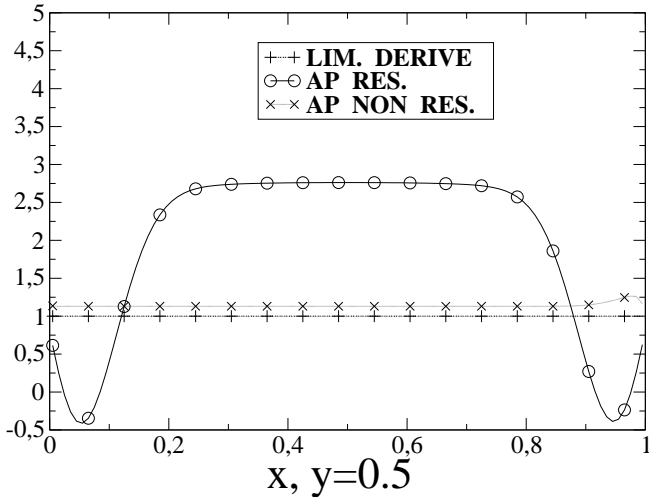


$(nu)_x$

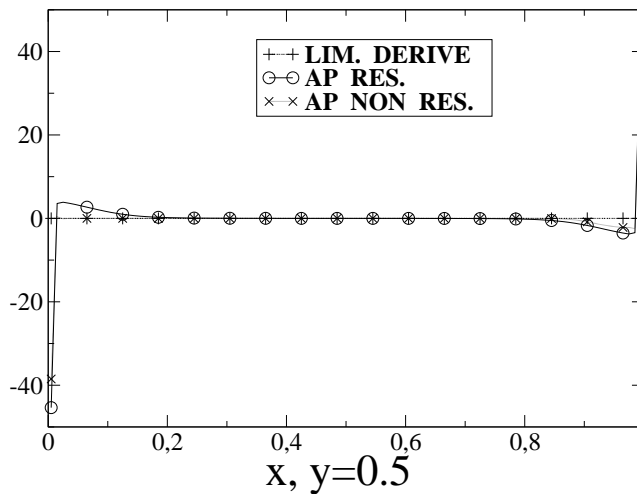


$(nu)_y =$

$(nu)_{//}$



$(nu)_z$



## 3. Conclusion

- ▣▶ Cas test plus complexes :
  - ▣▶ Cas test non cartesiens ( $B$  non // maillage)
  - ▣▶  $B$  non constant
  
- ▣▶ Euler complet
  
- ▣▶ Couplage avec Poisson, Maxwell.