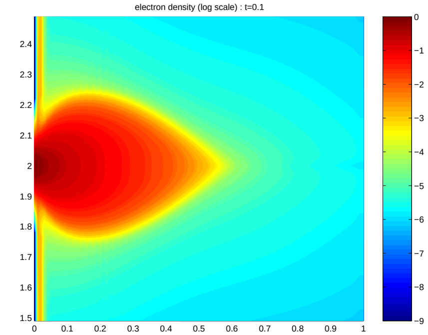
Un problème de couche limite pour Euler-Poisson

Marie-Hélène Vignal
IMT: Institut de Mathématiques de Toulouse

(à paraître dans SIAM Applied Mathematics)

Contexte général : problèmes multi-échelles

- **Modèles mathématiques** M_λ **dépendant d'un paramètre** λ
  - λ très petit comparé à la taille du domaine
  - λ de taille variable plusieurs ordres de grandeur



- **Multi-échelles :** échelle microscopique (λ)

  et

  échelle macroscopique (λ ou taille de domaine)

- **Difficultés :** schémas classiques explicites stables et consistants

  ssi λ est résolu par le maillage $\Rightarrow$ coût trop important

Contexte général : problèmes multi-échelles

$1^{ère}$ solution : utiliser un modèle asymptotique

$$M_0 = \lim_{\lambda \to 0} M_\lambda. \Rightarrow \text{ Maillage indépendant de } \lambda$$

- **C**onditions aux **L**imites **préparées au régime asymptotique**
- Modèle **valide** seulement dans les régions où $\boldsymbol{\lambda} \ll 1$
  - On doit utiliser M_λ là où $\lambda = O(1)$.
    - → Localisation de l'interface.
    - → Reconnection de M_λ et M_0.
    - → Interface mobile : pb. numérique difficile en 2D ou 3D.

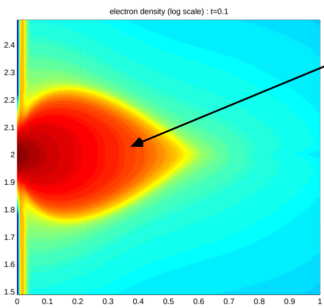
$2^{ème}$ solution : utiliser un schéma Asympt. Préservant

- Utiliser M_λ partout.
- Le discrétiser avec un schéma préservant l'asymptotique $\lambda \to 0$
  - **Maillage indépendant de $\boldsymbol{\lambda}$** : Stabilité asympt.,
  - On obtient une approx. de la solution de M_0 quand $\lambda \to 0$: Consistance asymptotique
- Si conditions aux limites mal préparées $\Rightarrow$ couche limite

Maillage redevient dépendant de $\boldsymbol{\lambda}$

Expansion d'une bulle de plasma entre deux électrodes

injection
de particules
en déséquilibre



plasma à
l'équilibre

déséquilibres à
l'échelle $\lambda \ll 1$

faible masse des électrons + pression	$\Rightarrow$	accélération des électrons
charge d'espace (équilibre électrique)	$\Rightarrow$	décélération des électrons

$$\Downarrow$$

Conséquence : Oscillations à l'entrée du domaine

Problème de couche limite

Zone de transition entre le plasma en déséquilibre injecté et le plasma interne à l'équilibre $\Rightarrow$ **Couche limite de taille $\boldsymbol{\lambda}$**

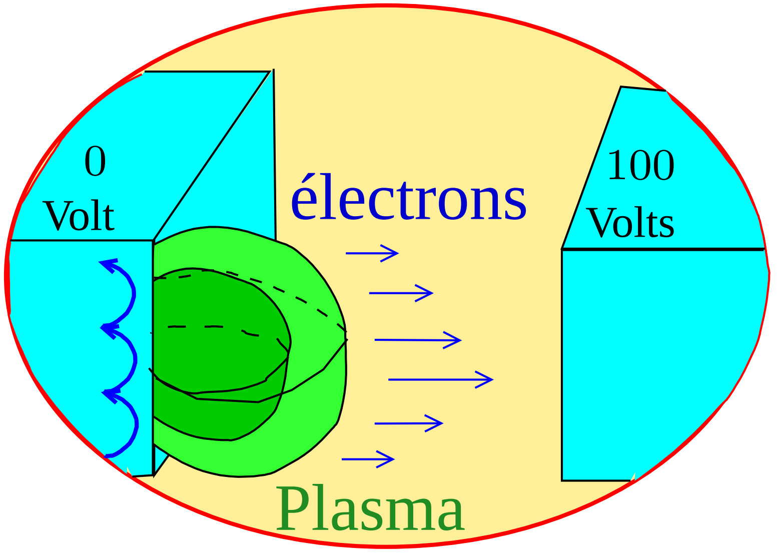
- **Difficultés :**
  - Modèle asymptotique $M_0 = \lim_{\lambda \to 0} M_\lambda$
    - → Conditions aux limites cohérentes avec M_0
    - → Valeurs en sortie de couche limite
  - Schémas classique ou asymptotiquement préservant pour M_λ
    - → Stables ssi la couche limite est résolue,
    - → Mailles de taille $\lambda \Rightarrow$ **contraintes sur le maillage**

Plan

Plan

Applications physiques

➠ Expansion d'une bulle de plasma entre 2 électrodes



➠ Diodes à forts courants,

Contrats CEA/DAM.

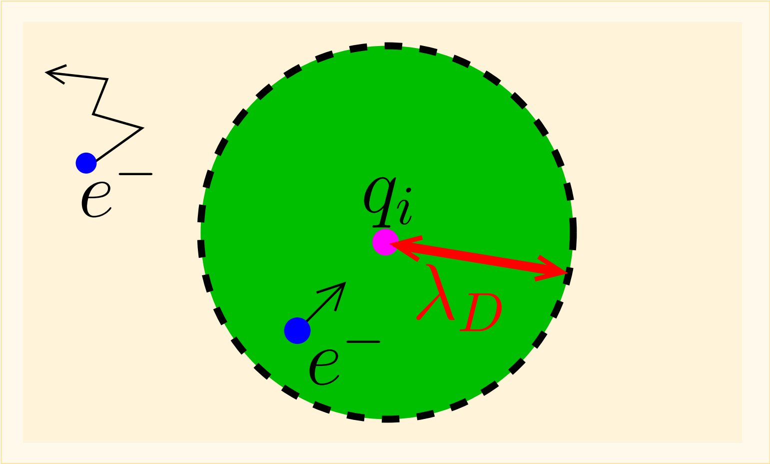
➠ Phémomènes d'arcs sur les panneaux solaires de satellites

Contrats CNES-Onera Toulouse.

Petite échelle d'espace dans un plasma

- **Longueur de Debye**

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n} \right)^{1/2}$$



  - Electrons sont attirés par $q_i > 0$
  - Un nuage de charges < 0 autour de q_i
  - Ecrantage de q_i au delà de la distance λ_D

- Déséquilibres de charges subsistent aux échelles $\leq \lambda_D$

Limite quasi-neutre

- **Plasmas quasi-neutres** : (très fréquent)

$$\lambda = \frac{\lambda_D}{L} \ll 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c}\text{Déséquilibres de charges}\\ \text{négligeables}\\ n_+(x,t) \approx n_-(x,t)\end{array}$$

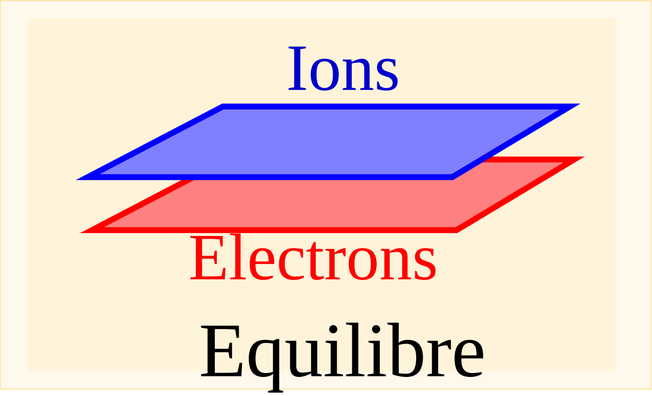
L=Longueur caractéristique du problème

- **Plasmas non quasi-neutres** : (gaines, faisceaux, ...)

$$\lambda \sim 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c}\text{Déséquilibres de charges}\\ \text{d'ordre 1}\\ n_+(x,t) \neq n_-(x,t)\end{array}$$

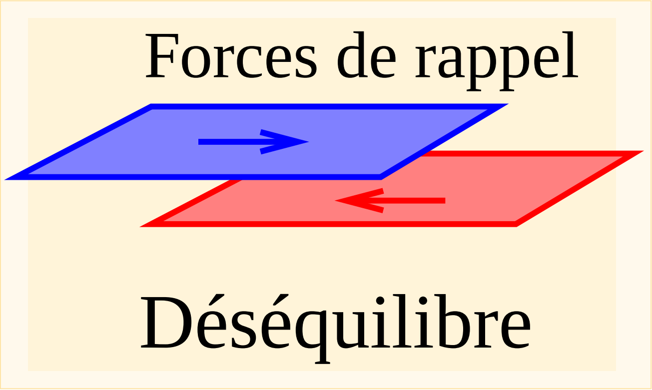
Petite échelle de temps : oscillations plasma

- Plasma oscillations:
  - Déséquilibres de charges
  - Forces électriques de rappel
  - Oscillations



- Période plasma (électronique)

$$\tau_e = \left(\frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n} \right)^{1/2}$$



Période plasma et quasi-neutralité

Dans le régime quasi-neutre : $\boldsymbol{\lambda} \ll 1$

$$\tau := \frac{\tau_e}{t_0} = \mathcal{O}(\lambda) \ll 1$$

$t_0 =$ temps caractéristique du problème

Etat quasi-neutre = moyenne sur un très grand nombre de périodes plasma

Plan

Modèle d'Euler-Poisson

➠ Euler pour les ions et les électrons, Poisson pour le potentiel

$$\begin{cases} \partial_t n_i + \partial_x q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \partial_x \left[\dfrac{q_i^2}{n_i} + p_i \right] = -n_i \partial_x \phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t n_e + \partial_x q_e = 0, \\ \partial_t q_e + \partial_x \left[\dfrac{q_e^2}{n_e} + \dfrac{p_e}{\varepsilon} \right] = \dfrac{n_e}{\varepsilon} \partial_x \phi, \end{cases}$$

$$-\lambda^2 \, \partial_{xx}^2 \phi = n_i - n_e,$$

➠ $n_{i,e} = \text{densités}, \qquad q_{i,e} = \text{qtés de mvt}, \qquad p_{i,e} = \text{pressions},$

$$\phi = \text{potentiel électrique}, \qquad \varepsilon = \frac{\text{masse } e^-}{\text{masse ions}}.$$

➠ $\lambda = \dfrac{\lambda_D}{L} = \dfrac{\text{long. Debye}}{\text{taille dispo.}}, \qquad \tau = \dfrac{\text{période plasma}}{\text{temps final}} = \dfrac{\tau_p}{t_0} = \sqrt{\varepsilon}\,\lambda$

Limite quasi-neutre formelle

➠ $\lambda \to 0$ dans Euler-Poisson

$$\begin{cases} \partial_t n_i + \partial_x q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \partial_x \left[\dfrac{q_i^2}{n_i} + p_i \right] = -n_i \partial_x \phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t n_e + \partial_x q_e = 0, \\ \partial_t q_e + \partial_x \left[\dfrac{q_e^2}{n_e} + \dfrac{p_e}{\varepsilon} \right] = \dfrac{n_e}{\varepsilon} \partial_x \phi \end{cases}$$

$$n_i = n_e,$$

➠ ϕ = mult. de Lagrange de la contrainte de quasi-neutralité

$$n_i = n_e$$

➠ Reformulation nécessaire

Limite quasi-neutre formelle

- Reformulation de la limite

  - Conservations de la charge et de la qté de mvt totale

$$\begin{cases} \partial_t(n_i - n_e) + \partial_x(q_i - q_e) = 0, \\ \partial_t(q_i - q_e) + \partial_x(f_i - f_e) = -\left(n_i + \dfrac{n_e}{\varepsilon}\right)\partial_x\phi, \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Quasi-neutralité} \\ n_i = n_e \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\partial_x\left(\left(n_i + \frac{n_e}{\varepsilon}\right)\partial_x\phi\right) = \partial^2_{xx}(f_i - f_e),$$

  - Equation elliptique pour le potentiel

Limite quasi-neutre formelle

➠ Résumé

$$\begin{tikzcd}
\text{Euler-Poisson} \arrow[r, "\lambda \to 0"] & \text{Euler quasi-neutre} \arrow[d] \\
 & \text{Euler quasi-neutre reformulé}
\end{tikzcd}$$

Limite quasi-neutre formelle

- Où se cache la singularité en $\tau = \sqrt{\varepsilon}\lambda$?

- Est-il possible de compléter le diagramme ?

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Euler-Poisson} & \xrightarrow{\lambda \to 0} & \text{Euler quasi-neutre} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Euler-Poisson Reformulé} & \xrightarrow[\lambda \to 0]{} & \text{Euler quasi-neutre reformulé}
\end{array}
$$

Système Euler-Poisson reformulé

- Mêmes manipulations sur Euler-Poisson $\Rightarrow$ Poisson reformulé

$$\lambda^2 \, \varepsilon \, \partial^2_{tt}(-\partial^2_{xx}\phi) - \partial_x \left(\left(n_i + \frac{n_e}{\varepsilon} \right) \partial_x \phi \right) = \partial^2_{xx}(f_i - f_e),$$

- **Eq. du pendule** sur la charge $\rho = n_i - n_e = -\partial^2_{xx}\phi$

  - Schéma explicite $\Rightarrow$ stabilité **conditionnelle** $\boldsymbol{\Delta t \leq \sqrt{\varepsilon}\lambda}$

    S. Fabre [JCP92]

  - Schéma AP $\Rightarrow$ stabilité **inconditionnelle** $\cancel{\boldsymbol{\Delta t \leq \sqrt{\varepsilon}\lambda}}$

    Crispel, Degond, MHV [JCP07]

Contraintes sur le maillage

- Système hyperbolique $\Rightarrow$ contrainte de C.F.L.

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0,$$

C.F.L. : $\Delta t \leq \dfrac{\Delta x}{\mu(U)}$ avec $\mu(U)$ valeurs propres de $DF(U)$

- Ici : $\mu_e(n_e, q_e) = q_e/n_e \pm \sqrt{p'_e(n_e)/\varepsilon}$

- **Couche limite** $\Rightarrow$ $\Delta x \leq \lambda \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t \leq C\,\sqrt{\varepsilon}\,\lambda}$

On retrouve la contrainte qu'on vient de lever

Plan

Conditions aux limites

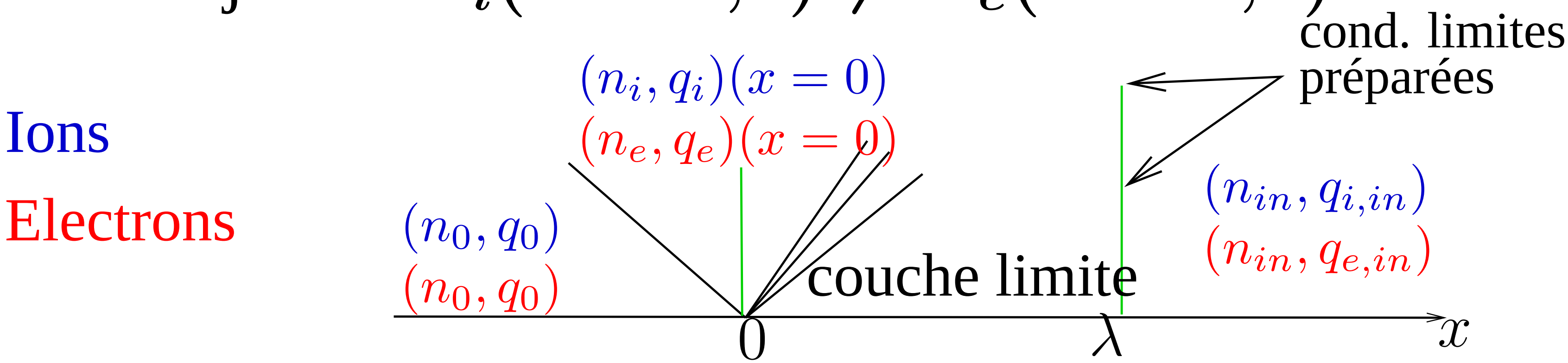
- Euler pour les ions et les électrons, Poisson pour le potentiel

$$\begin{cases} \partial_t n_i + \partial_x q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \partial_x \left[\dfrac{q_i^2}{n_i} + p_i \right] = -n_i \partial_x \phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t n_e + \partial_x q_e = 0, \\ \partial_t q_e + \partial_x \left[\dfrac{q_e^2}{n_e} + \dfrac{p_e}{\varepsilon} \right] = \dfrac{n_e}{\varepsilon} \partial_x \phi \end{cases}$$

$$-\lambda^2 \, \partial_{xx}^2 \phi = n_i - n_e,$$

- Plasma interne : équilibre électrique (quasi-neutre) $\lambda \to 0 \Rightarrow n_i = n_e$

- Plasma injecté : $\boldsymbol{n_i(x=0,t) \neq n_e(x=0,t)}$

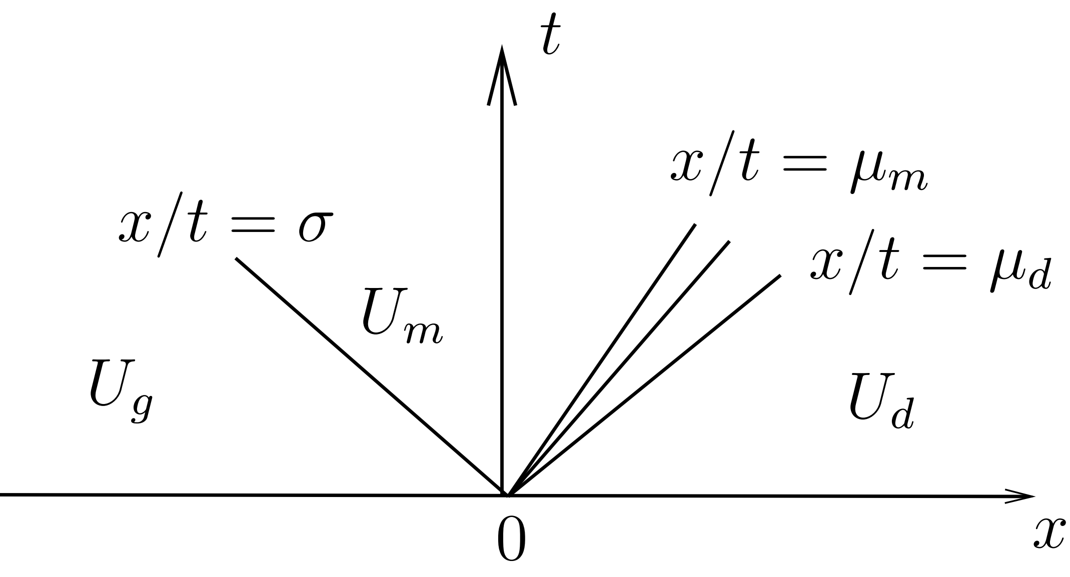


But : Déterminer des cond. aux lim. bien préparées à l'équilibre

- Solution de $\partial_t U + DF(U)\partial_x U = 0,$

$$U(t=0) = \begin{cases} U_g & \text{si } x < 0 \\ U_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- U est auto-similaire $U = U(x/t)$.



- Deux valeurs propres
$$\mu^{\pm} = q/n \pm \sqrt{p'(n)/\varepsilon}$$

- Ici U_g est subsonique

Conditions aux limites

➠ Euler pour les ions et les électrons, Poisson pour le potentiel

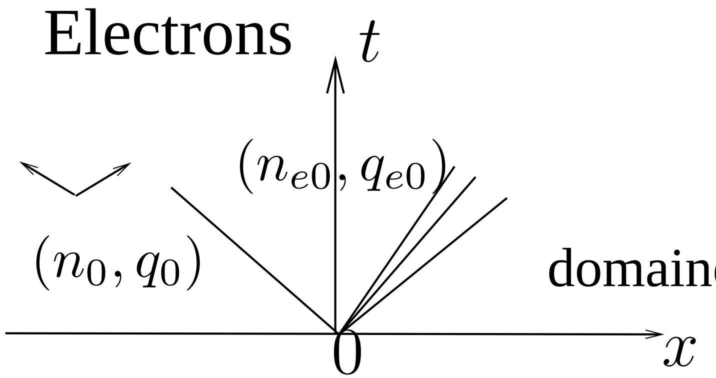
$$\begin{cases} \partial_t n_i + \partial_x q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \partial_x \left[\dfrac{q_i^2}{n_i} + p_i \right] = -n_i \partial_x \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t n_e + \partial_x q_e = 0, \\ \partial_t q_e + \partial_x \left[\dfrac{q_e^2}{n_e} + \dfrac{p_e}{\varepsilon} \right] = \dfrac{n_e}{\varepsilon} \partial_x \phi \end{cases}$$

$$-\lambda^2 \, \partial_{xx}^2 \phi = n_i - n_e,$$

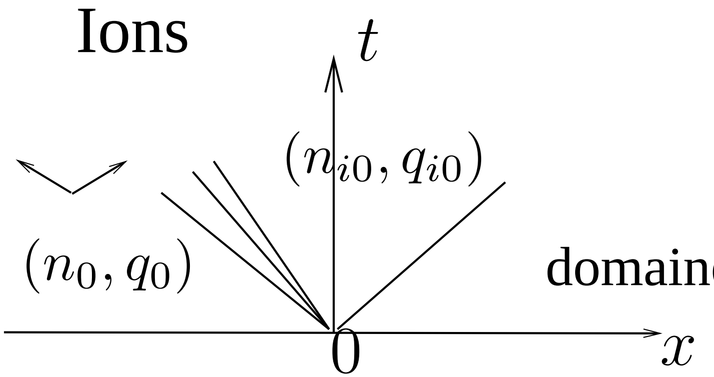
➠ En $x = 0$:

$$\phi = 0, \quad (n_i, q_i) = (n_{i0}, q_{i0}), \quad (n_e, q_e) = (n_{e0}, q_{e0}).$$

Electrons



Ions



Plan

Problème de couche limite

- **Zoom** sur la couche limite : $y = x/\lambda$

Développement asymptotique de la couche limite : pour $f = n_{i,e}, u_{i,e}, \phi$

$$f^\lambda(x,t) = \bar f(x,t) + \tilde f(x/\lambda, t) + \lambda\, \hat f^\lambda(x,t)$$

$\Rightarrow$ $\bar f$ état quasi-neutre et syst. diff. sur $f(y,t) = \bar f(0,t) + \tilde f(y,t)$

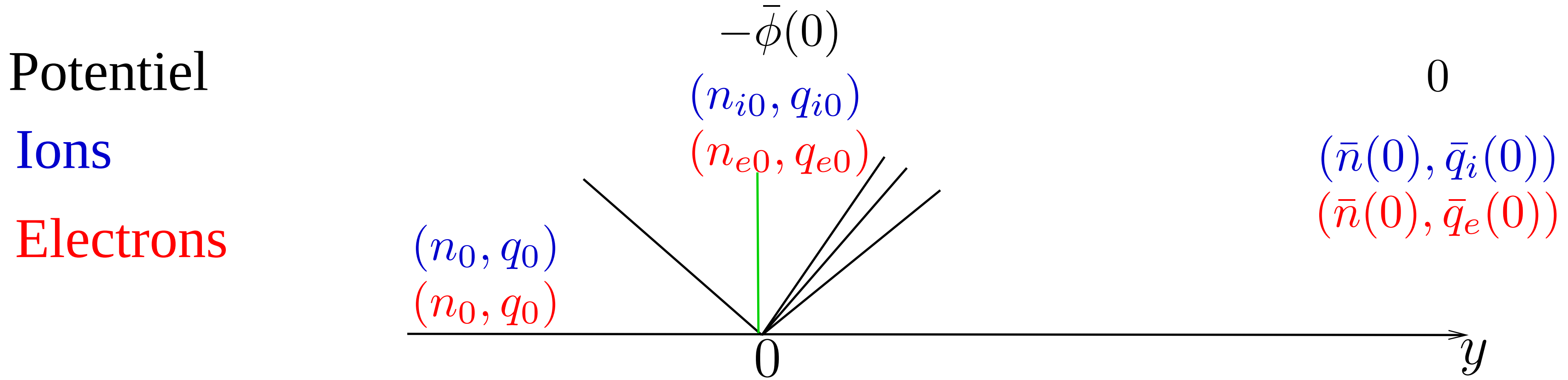
$$\partial_y q_i = \partial_y q_e = 0, \qquad -\partial^2_{yy}\tilde\phi = n_i - n_e,$$

$$\partial_y\left(\frac{\varepsilon\, q_e^2}{n_e} + p_e(n_e)\right) = n_e\,\partial_y\tilde\phi, \qquad \partial_y\left(\frac{q_i^2}{n_i} + p_i(n_i)\right) = -n_i\,\partial_y\tilde\phi,$$

pour tout $y > 0$ et tout $t > 0$.

Conditions aux limites du système différentiel

- En $y = 0$: $\quad f^\lambda(0,t) = \bar{f}(0,t) + \tilde{f}(0,t) + \lambda\,\hat{f}^\lambda(0,t)$
- En $y = \infty$: Cvgence vers la sol. quasi-neutre $\tilde{f}(+\infty,t) = 0$



- On cherche $\bar{n}(0), \bar{q}_e(0), \bar{q}_i(0), \bar{\phi}(0)$ connaissant n_0, q_0
- **Originalité :** On ne connait pas n_{i0}, q_{i0}, q_{e0}

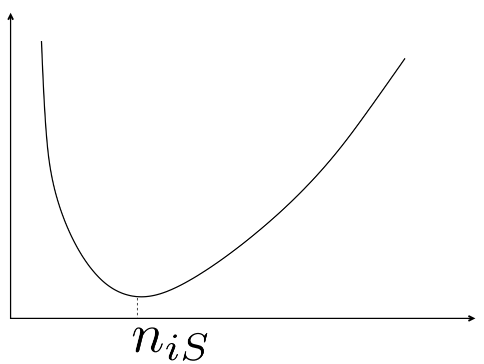
Résolution de couche limite

- Idée pour des solutions régulières

$$\partial_y q_i = 0, \quad \text{et} \quad \partial_y \left(\frac{q_i^2}{n_i} + p_i(n_i) \right) = -n_i \, \partial_y \tilde{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$q_i = cste = q_{i0}, \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(-\frac{q_{i0}^2}{n_i^3} + \frac{p_i'(n_i)}{n_i} \right)}_{k_i'(n_i) \,=\, \text{enthalpie totale}} \partial_y n_i = -\partial_y \tilde{\phi}$$



- On part de l'∞, si $\bar{n}_0 > n_{iS}$

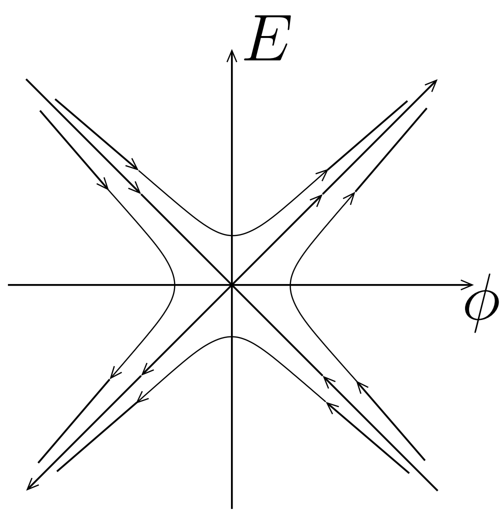
$$n_i(y) = k_{i,+}^{-1}(-\phi(y) + k_i(\bar{n}_0)) = n_i[\phi],$$

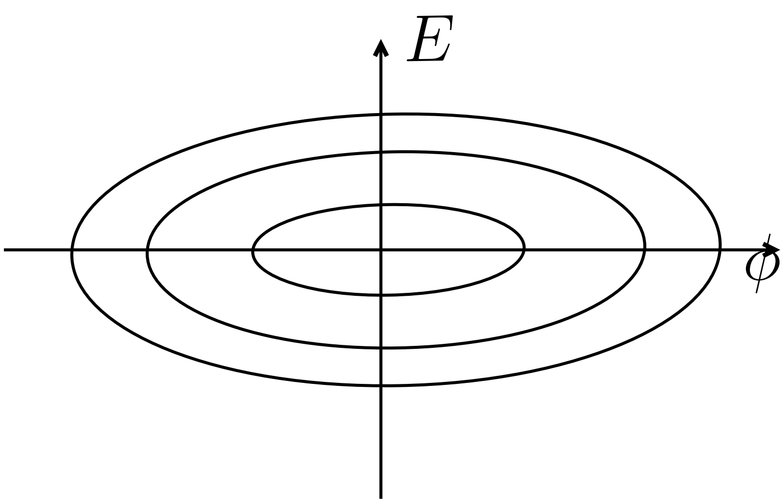
- $n_i[\phi]$ décroissante

Résolution de la couche limite

- On reporte dans Poisson : $\partial_y \phi = E,$
  $\partial_y E = n_e[\phi] - n_i[\phi],$ décroit.

$(\phi, E) = (0, 0)$ est un pt d'équilibre hyperbolique ou elliptique.

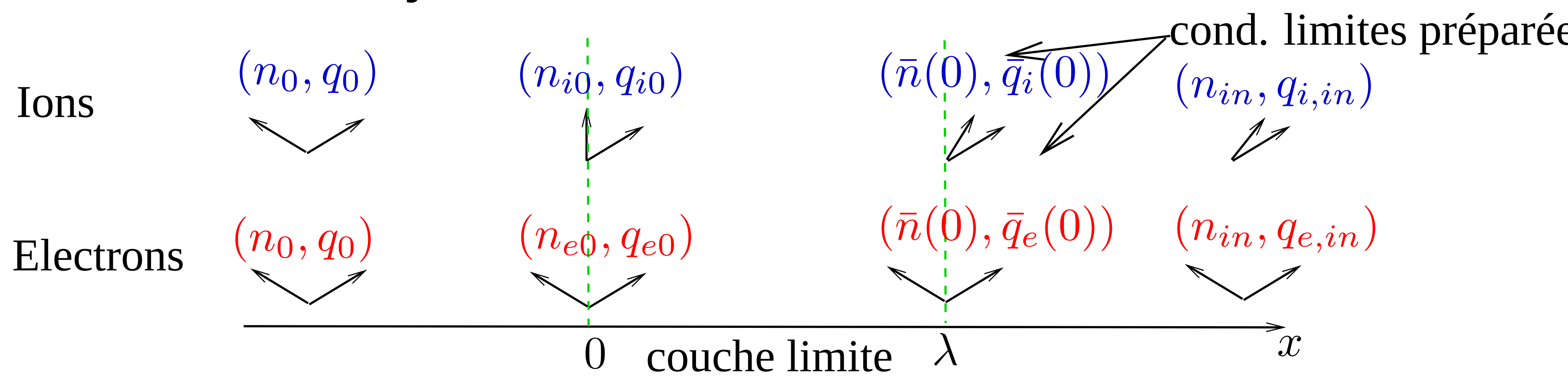




- Plusieurs raccords possibles avec les valeurs en $x = 0$

- Une seule admet des profils décroissants de densités

➠ Résolution du système différentiel



➠ **Critère de Bohm** : Les ions en sortie de gaine sont supersoniques

➠ Approximation : $\varepsilon = 0 \Rightarrow \bar{n}(0)$ explicite

Plan

Paramètres de simulations

- Au départ, domaine vide de plasma
- Conditions aux limites en $x = 0$, la cathode

$$n_i|_{x<0} = n_e|_{x<0} = 1 \quad q_i|_{x<0} = q_e|_{x<0} = 1 \quad \phi|_{x=0} = 0$$

- D.D.P appliquée

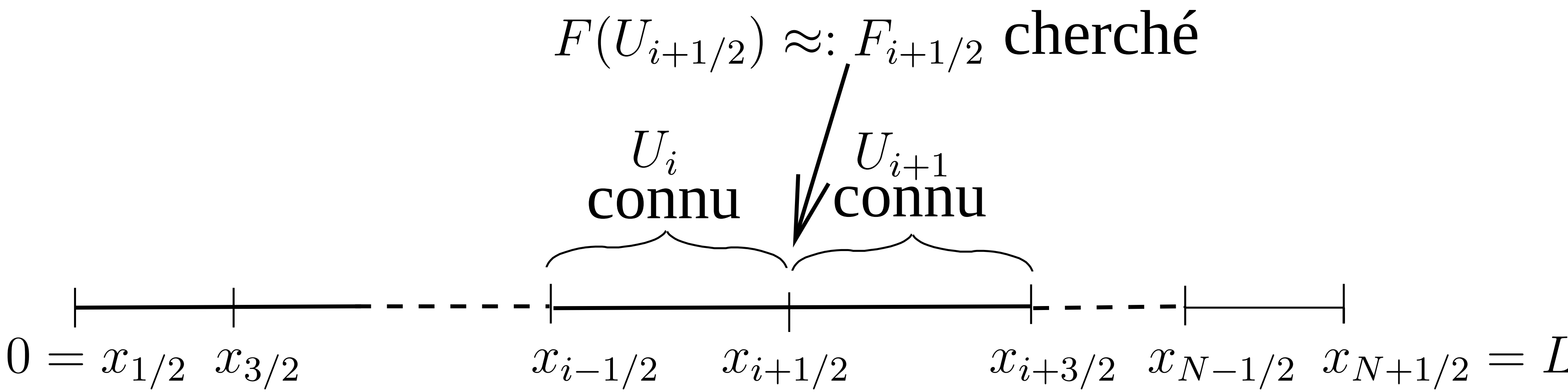
$$\phi|_{x=1} = 100$$

- Paramètres

$$\varepsilon = 10^{-4}, \;\; \lambda = 10^{-4}, \;\; \tau = 10^{-6}.$$

Discrétisation spatiale

- $\partial_t U + \partial_x F(U) = S(n, \phi)$

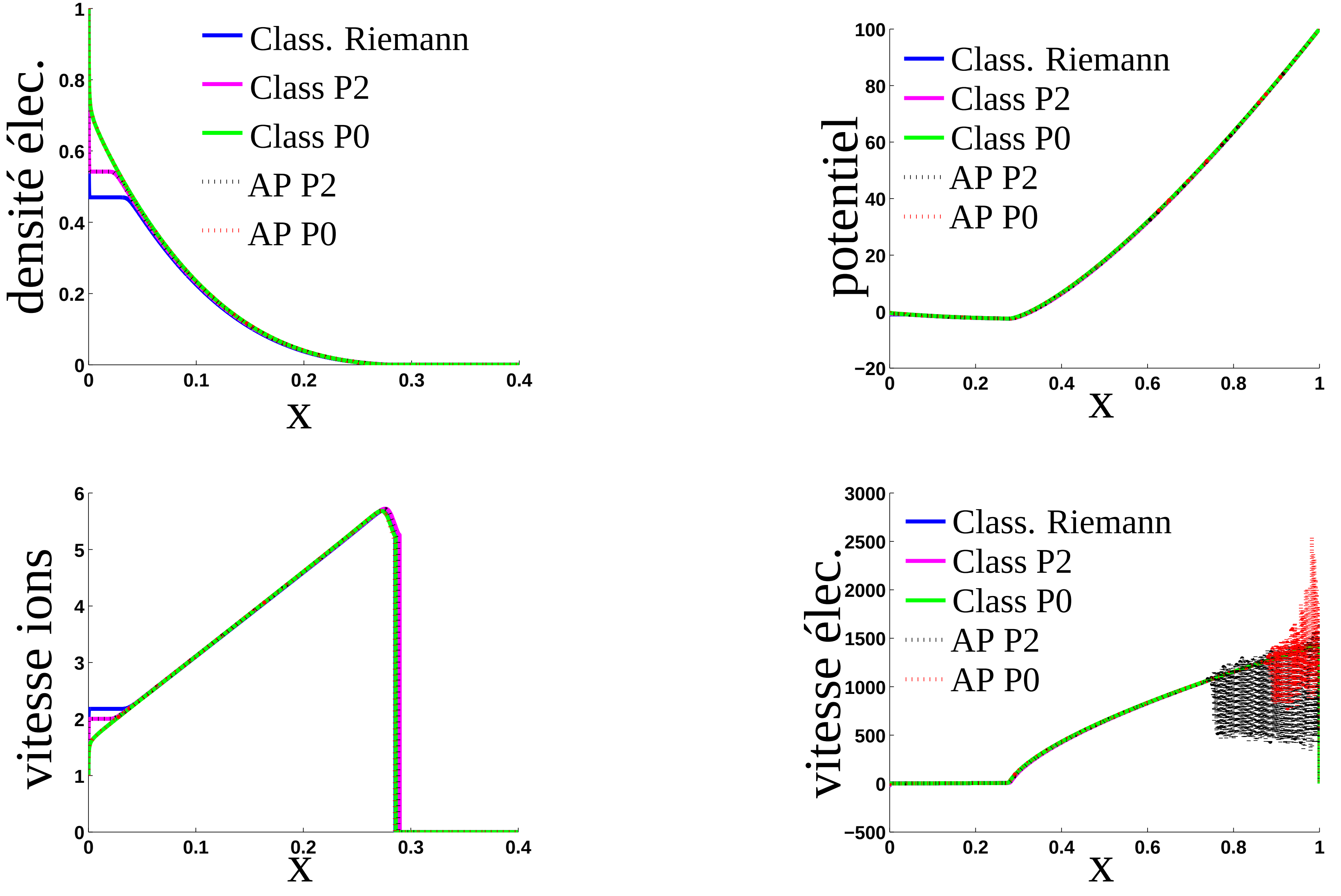


- Flux numérique

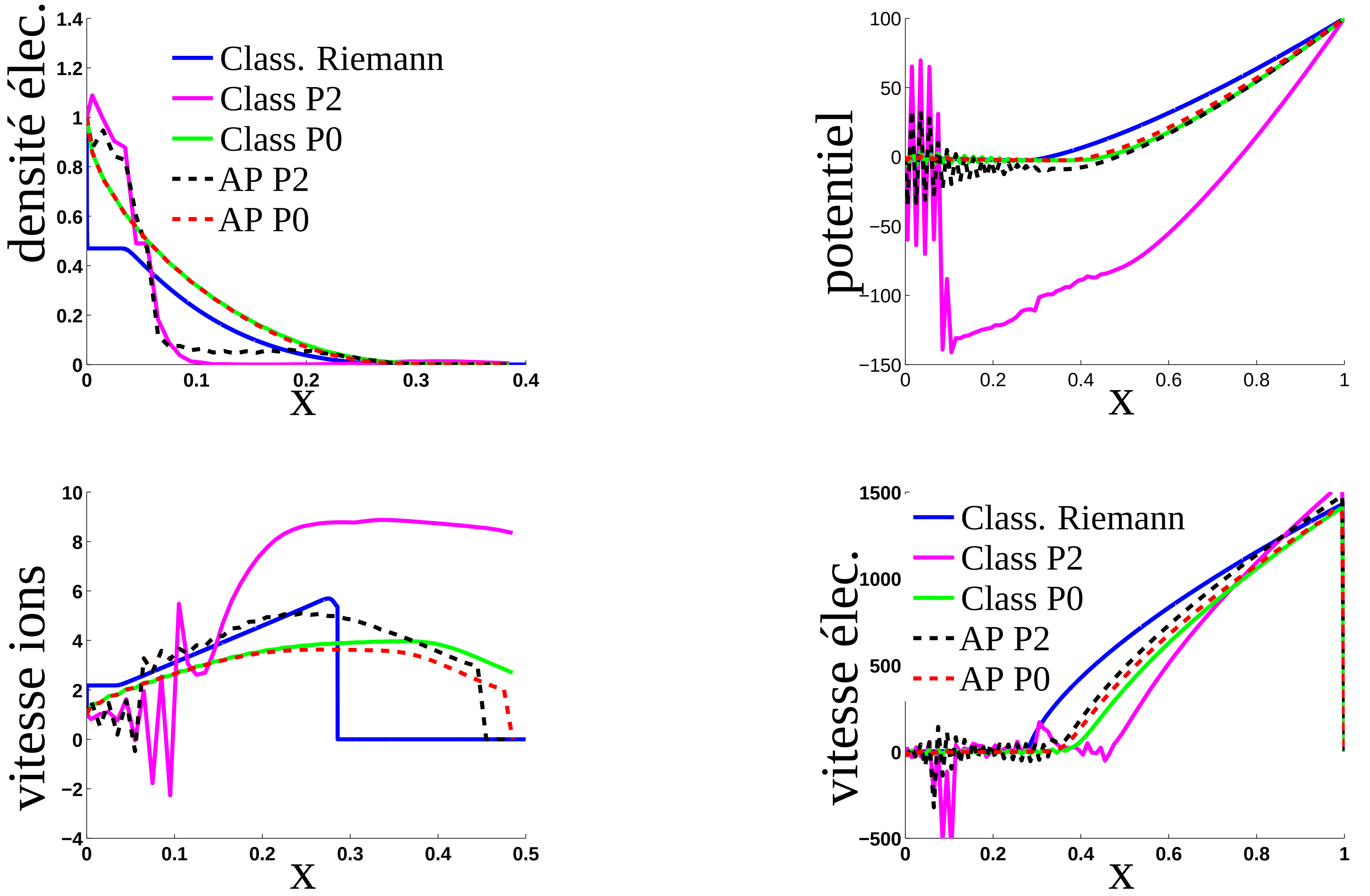
$$F_{i+1/2} = \underbrace{\frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2}}_{\text{flux centré}} + \underbrace{M(U_i, U_{i+1})}_{\text{matrice de viscosité}} (U_i - U_{i+1})$$

- Solveurs de type Roe à **matrice de viscosité diagonale**
  - Lax Friedrichs modifié, Ruzanov,
  - polynomial de degré 0 (P0) (Degond, Peyrard, Villedieu)
- Solveurs généraux à **matrice de viscosité non diagonale**
  - Roe, HLLE, HLLC, polynomial de degré 2, $\cdots$

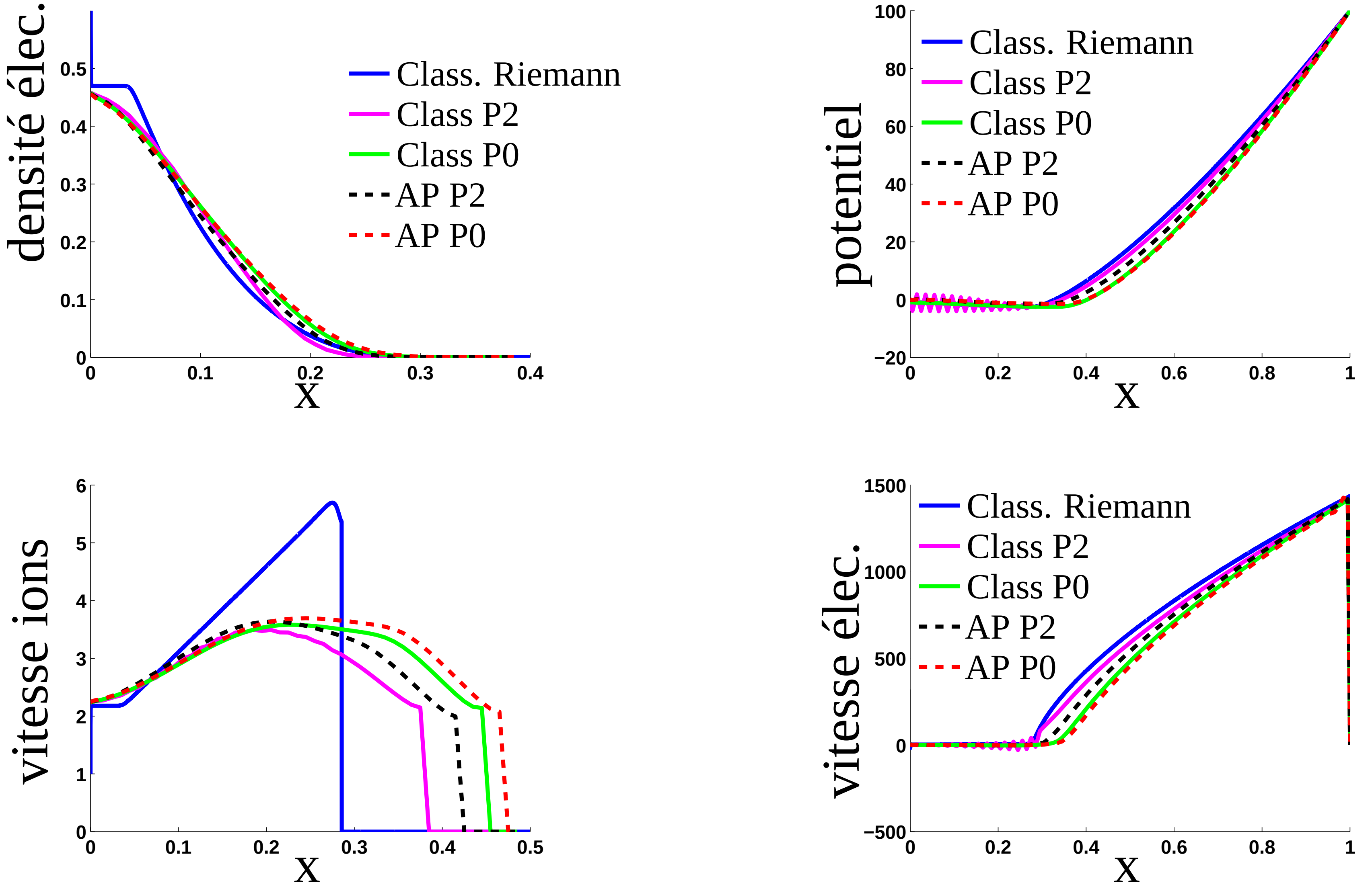
Résolu : $\Delta t \leq \tau = 10^{-6}$, $\Delta x \leq \lambda = 10^{-4}$



non résolu en espace $\Delta x = 10^{-2} > \lambda = 10^{-4}$

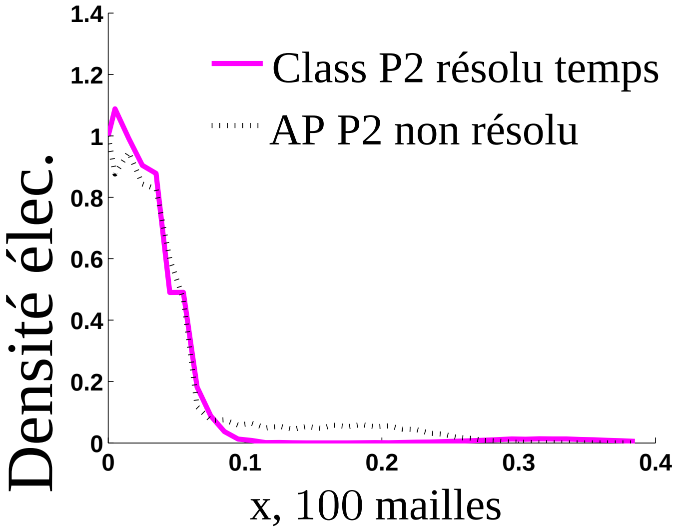


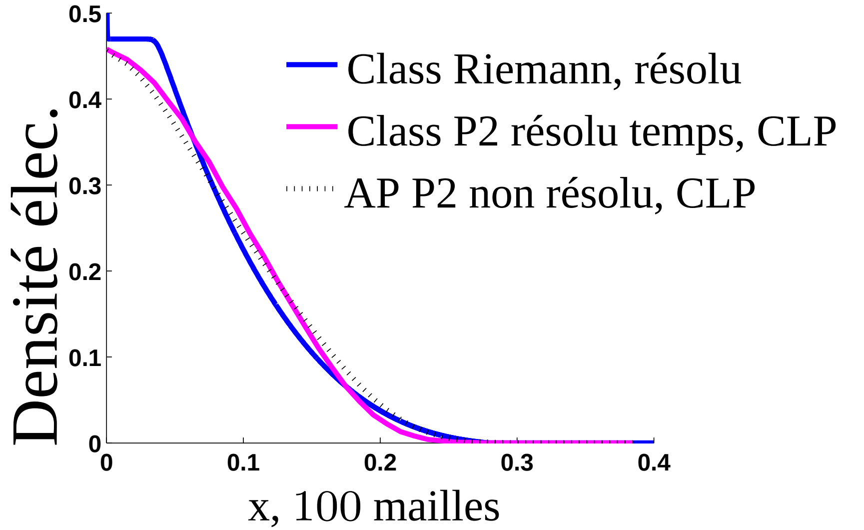
CL préparées, $\Delta x = 10^{-2} > \lambda = 10^{-4}$



Plan

Conditions aux limites préparées



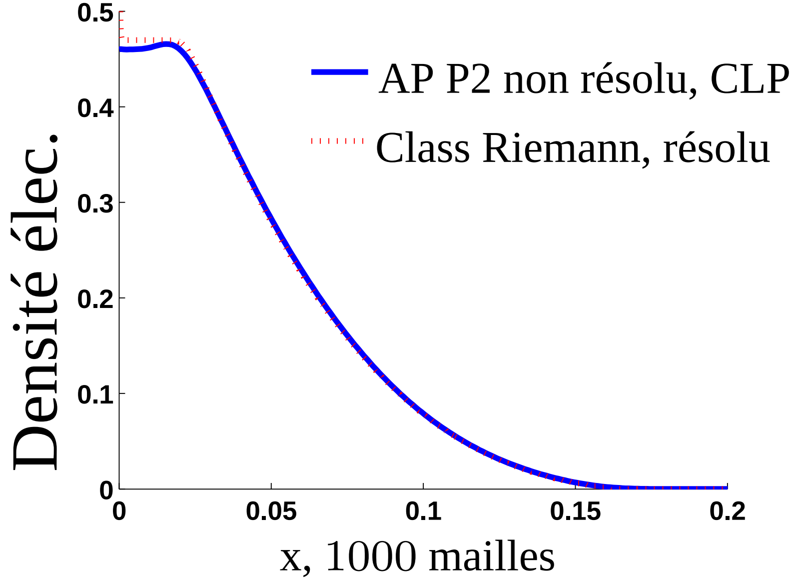


- Les conditions aux limites préparées stabilisent les solveurs généraux

- Erreur $< 20\%$, due à une résolution approchée

Travaux en cours

- Régime transitoire non quasi-neutre et manque de précision



- Pourquoi les solveurs à matrice de viscosité diagonale restent stables sans résoudre la couche limite

- Un schéma AP pour la couche limite ?