
Schémas asymptotiquement stables dans la limite quasi-neutre pour Euler-Poisson

Marie-Hélène Vignal

Lab. **MIP** : **M**athématiques pour l'**I**ndustrie et la **P**hysique

Univ. Paul Sabatier, Toulouse 3

Collaboration avec **P. Crispel** et **P. Degond**

1. Introduction
2. Le modèle d'Euler-Poisson et sa limite quasi-neutre
3. Discrétisation classique pour Euler-Poisson (EP)
4. Nouvelle approche : schéma “AP”
5. Résultats numériques
6. Conclusion

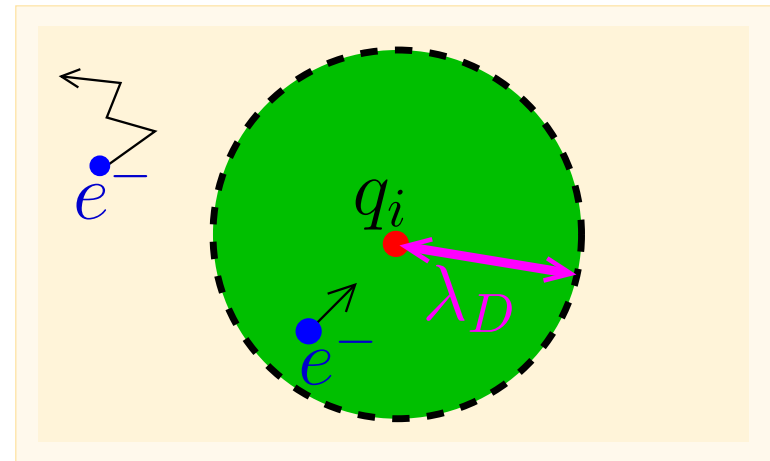
1. Introduction

- Gaz contenant des **particules chargées**
 - Charges < 0 : **électrons**, ions négatifs
 - Charges > 0 : **ions** positifs
 - Charges $= 0$: atomes neutres ou molécules

- **Specificité des plasmas** (comparés aux gaz)
 - interactions **électromagnétiques**

- ➡ Les électrons sont attirés par $q_i > 0$
- ➡ Un nuage de charges < 0 autour de q_i
- ➡ Ecrantage de q_i au delà de la distance λ_D
- ➡ Longueur de Debye :

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{q^2 n} \right)^{1/2}$$



➡ Déséquilibres de charges élec. aux échelles $\leq \lambda_D$

➡ Plasma **quasi-neutre** : (très fréquent)

$$\lambda = \frac{\lambda_D}{L} \ll 1 \quad \Rightarrow$$

Déséq. de charges
négligeables

$$n_+(x, t) \approx n_-(x, t)$$

L = long. caract. du pb.

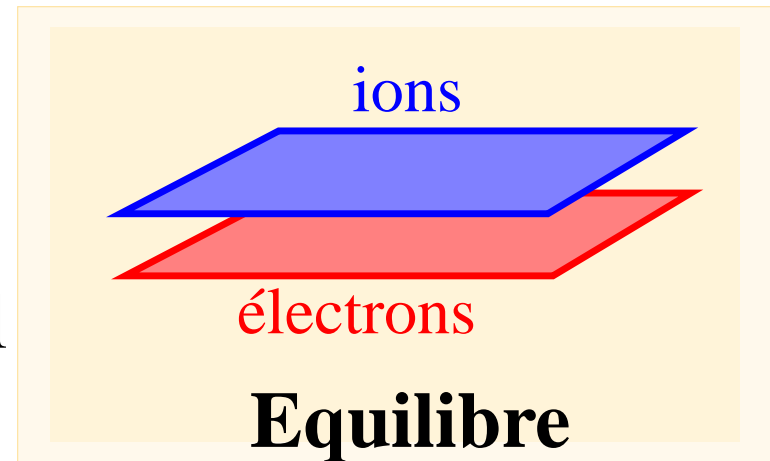
➡ Plasma **non quasi-neutre** : (gaines, faisceaux, ...)

$$\lambda \sim 1 \quad \Rightarrow$$

Déséq. de charges
d'ordre 1

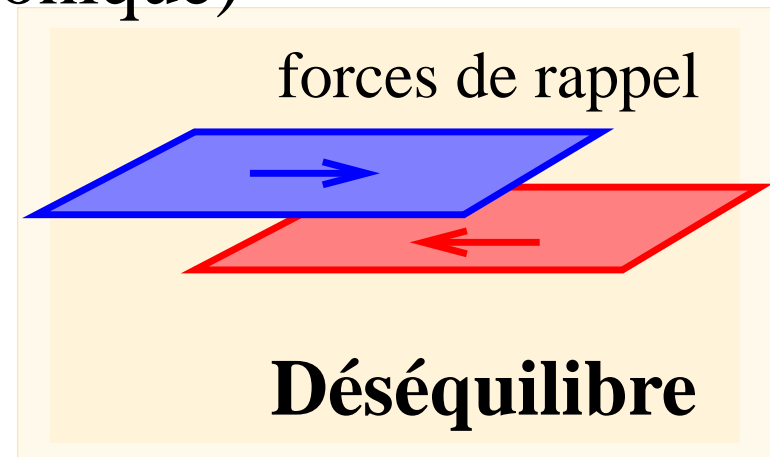
$$n_+(x, t) \neq n_-(x, t)$$

- ➡ Oscillations plasma :
 - ➡ Déséq. de charges
 - ➡ Forces élec. de rappel
 - ➡ Oscillations



- ➡ Fréquence plasma (électronique)

$$\omega_{Pe} = \left(\frac{q^2 n}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}$$



Echelle de temps liée à la quasi-neutralité 8

➡ Dans le régime **quasi-neutre**

$$\omega := \omega_{Pe} t_0 \gg 1$$

t_0 = temps caract. du pb.

➡ Etat quasi-neutre = moyenne d'un très grand nombre de périodes plasma

- ➡ Modèle non quasi-neutre, valide dans tout régime
 - ➡ Schémas classiques

$$\Delta x \leq \lambda_D, \quad \omega_{Pe} \Delta t \leq 1$$

- ➡ Très coûteux en régime quasi-neutre (QN)



Modèle (Non-QN) en régime
quasi-neutre inutilisable en dim. > 1

- ➡ Un modèle (QN) est nécessaire pour décrire les régimes quasi-neutres

Problèmes avec les modèles quasi-neutre 10

⇒ Contrainte de **quasi-neutralité difficile** à traiter **numériquement** quand le courant est non nul.

⇒ Si zones quasi et non quasi-neutres

⇒ **Interface** (mobile) entre modèles **(QN)** et **(Non-QN)**

Dériv. formelle de la dynamique :

[Degond, Parzani, V., SIAM MMS 04]

[Slemrod, Ha, ARMA 05]

⇒ **Interface mobile** : Pb. numérique **difficile** en 2-D et 3-D

Interface tracking [Tryggvason, ...], Level set [Osher, Sethian, ...]

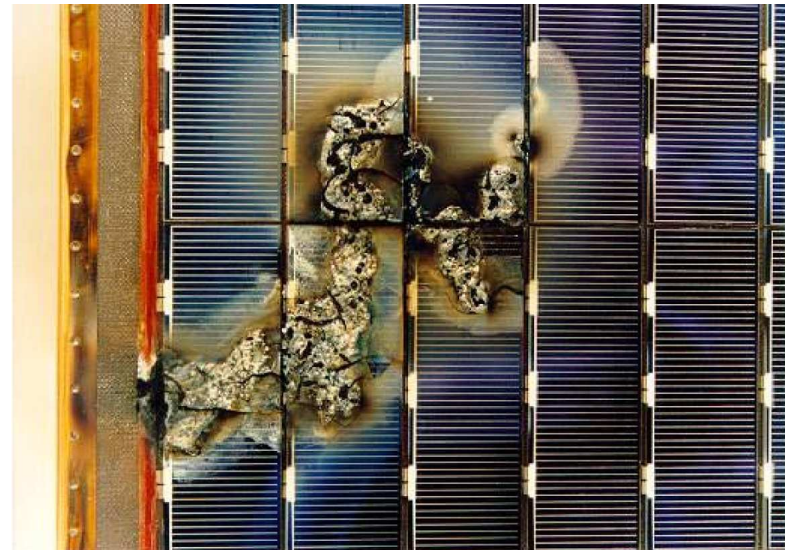
VoF [Youngs, Zaleski, ...], Mélanges fictifs [Karni, Abgrall & Saurel, ...]

Ex 1 : arcs sur les panneaux solaires (I) 11

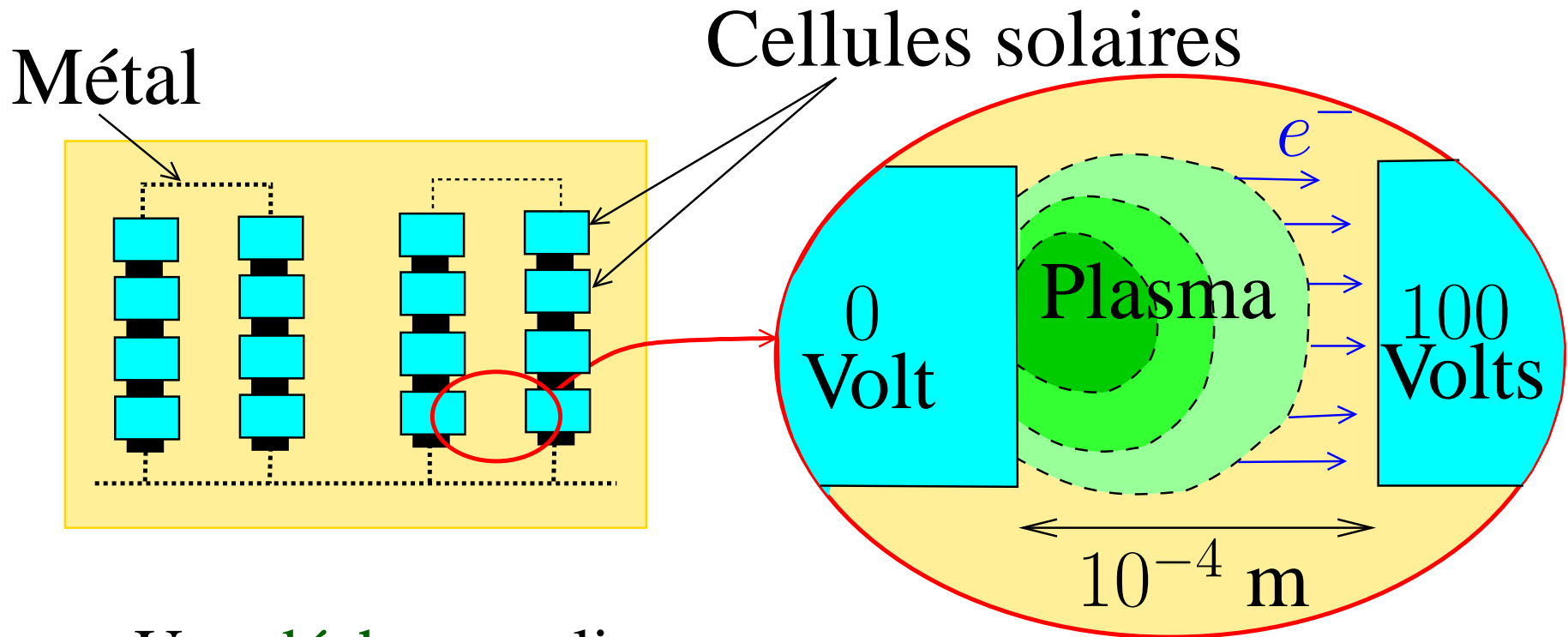


Figure d'un satellite et de ses panneaux solaires

Panneau solaire endommagé par des arcs électriques

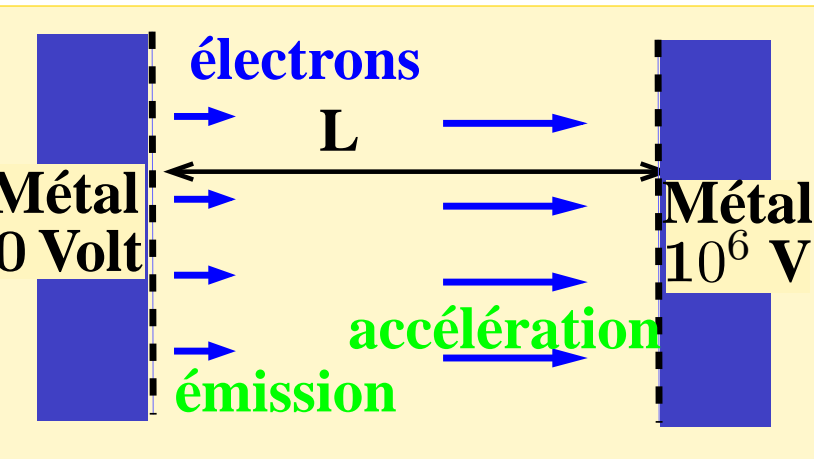


Ex1 : arcs sur les panneaux solaires (II) 12

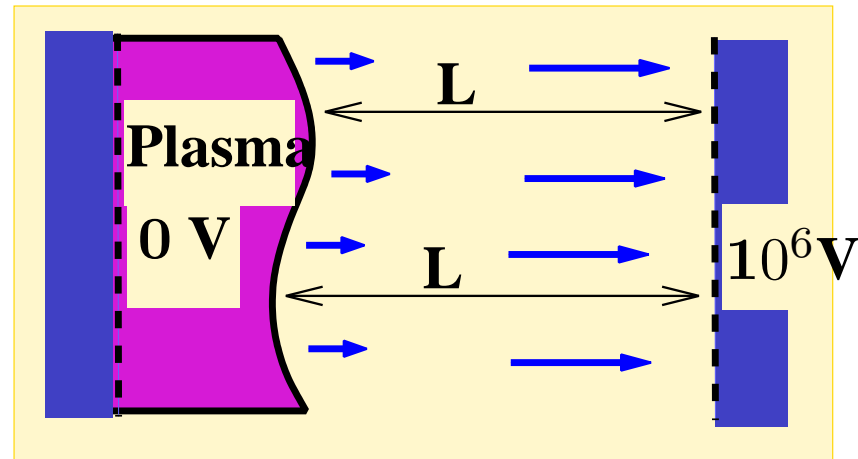


- ➡ Une **décharge** a lieu.
- ➡ Un **plasma haute densité** est créé et se **détend**.
- ➡ Le plasma remplit l'espace, un **arc** apparait.

Diode plane conventionnelle



Diode à fort courant



⇒ Courant **limité**

$$j \leq j_{max} \left(\frac{1}{L^2} \right)$$

⇒ Plasma **se détend**

⇒ Interface **avance**

⇒ Courant extrait **augmente**

- ⇒ **Modèle (Non-QN)** pour toutes les zones
 - ⇒ discrétisation avec un **schéma non contraint** par

$$\Delta x \leq \lambda_D, \quad \omega_{Pe} \Delta t \leq 1$$

- ⇒ Schémas “AP” pour “Asymptotic Preserving”
([Jin] cinétique → Hydro)
- ⇒ Notre contribution : un **schéma AP** pour Euler-Poisson
 - ⇒ qui a un **coût explicite** comme les schémas classiques

➤ Limites quasi-neutre rigoureuses

➤ Euler-Poisson (1D, courant nul): [Cordier & Grenier]

➤ Vlasov-Poisson: [Brenier, Brenier & Grenier, Brenier & Corrias]

➤ Schémas AP, limite quasi-neutre, modèles fluides

➤ [Fabre]

➤ [Choe, Yoon, Kim, Choi]

➤ [Colella, Dorr, Wake]

➤ [Crispel, Degond, V]

2. Le modèle d'Euler-Poisson et sa limite quasi-neutre

➡ Modèle à une espèce pour simplifier

$$(EP) \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot q = 0, \\ \partial_t q + \nabla \cdot \left(\frac{q \otimes q}{n} \right) + \nabla p(n) = n \nabla \phi, \\ \lambda^2 \Delta \phi = n - n_0, \end{cases}$$

➡ $n_0 =$ densité constante des ions,

$n =$ densité élec., $p(n) =$ pression élec.,

$q =$ quantité de mvt élec., $\phi =$ potentiel.

➡
$$\lambda = \frac{\lambda_D}{L} = \frac{\text{longueur de Debye}}{\text{longueur caractéristique}}$$

$$(QN) \begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot q = 0 \\ \partial_t q + \nabla \left(\frac{q \otimes q}{n} \right) + \nabla (p(n)) = n \nabla \phi, \\ n = n_0. \end{cases}$$

⇒ Soit encore :

$$\begin{cases} \nabla \cdot q = 0, \\ \partial_t q + \nabla \left(\frac{q \otimes q}{n_0} \right) = n_0 \nabla \phi, \\ n = n_0. \end{cases}$$

$n_0 = 1 \Rightarrow$ Eqs. d'Euler Incompressible (pression = $-\phi$)

→ ϕ = multiplicateurs de Lagrange de $\nabla \cdot q = 0$

⇒ Eq. explicite pour le potentiel

$$\nabla \cdot \left(\partial_t q + \nabla \left(\frac{q \otimes q}{n_0} \right) = n_0 \nabla \phi \right)$$

$$\Downarrow \nabla \cdot q = 0$$

$$\text{Eq. elliptique : } \nabla^2 : \left(\frac{q \otimes q}{n_0} \right) = \nabla \cdot (n_0 \nabla \phi)$$

⇒ Différentes eqs. pour ϕ

→ (EP) : Poisson $\lambda^2 \Delta \phi = n - 1$

→ (QN) : Eq. $\nabla \cdot (n_0 \nabla \phi) = \nabla^2 : \left(\frac{q \otimes q}{n_0} \right)$

Pas la même homogénéité



Est-il possible de les unifier ?

➡ Dans (EP) : $\nabla \cdot$ de l'eq. de quantité de mvt

$$\nabla \cdot (\partial_t q) + \nabla^2 : f(n, q) = \nabla \cdot (n \nabla \phi)$$

avec $f(n, q) = \frac{q \otimes q}{n} + p(n) \text{Id}$

➡ Dans (EP) : ∂_t de l'eq. de masse

$$\partial_{tt}^2 n + \partial_t (\nabla \cdot q) = 0$$

Différence $\Rightarrow -\partial_{tt}^2 n + \nabla^2 : f(n, q) = \nabla \cdot (n \nabla \phi)$

⇒ On utilise eq. de Poisson $n = n_0 + \lambda^2 \Delta \phi$

$$-\lambda^2 \Delta(\partial_{tt}^2 \phi) + \nabla^2 : f(n, q) = \nabla \cdot (n \nabla \phi)$$

⇒ Eq. de Poisson reformulée

$$\lambda^2 \partial_{tt}^2(-\Delta \phi) - \nabla \cdot (n \nabla \phi) = -\nabla^2 : f(n, q)$$

⇒ $n = cste \Rightarrow \lambda^2 \partial_{tt}^2(-\Delta\phi) - n\Delta\phi = -\nabla^2 : f(n, q)$

Eq. du pendule sur $\Delta\phi$

⇒ Eq. équivalente à eq. Poisson si

$$(\lambda^2 \Delta\phi = n - n_0)|_{t=0} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\lambda^2 \Delta\phi = n - n_0)|_{t=0}.$$

⇒ Ne dégénère pas quand $\lambda \rightarrow 0$.

⇒ $\lambda = 0$: on retrouve l'eq. pour ϕ du modèle (QN).

3. Discrétisation classique pour Euler-Poisson (EP)

⇒ Système (EP) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot q = 0 \\ \partial_t q + \nabla f(n, q) = n \nabla \phi \\ \lambda^2 \Delta \phi = n - n_0 \end{cases}$$

⇒
$$f(n, q) = \frac{q \otimes q}{n} + p(n) \text{Id}$$

⇒ Rmq : fréq. plasma adimensionnée $w \sim \lambda^{-1}$

➡ Schéma classique :

➡ Flux hydro **explicites**

➡ Poisson et terme de force électrique **implicites**

➡ Si n^m, q^m, ϕ^m approx. au temps t^m connues

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \nabla \cdot q^m = 0, \\ \frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t} + \nabla f(n^m, q^m) = n^{m+1} \nabla \phi^{m+1}, \\ \lambda^2 \Delta \phi^{m+1} = n^{m+1} - n_0. \end{array} \right.$$

⇒ Résolution explicite

⇒ Condition de stabilité liée à la quasi-neutralité :

$$w \Delta t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \sim \lambda$$

⇒ Régime QN : $\lambda \ll 1$, contrainte importante

⇒ $\nabla \cdot$ de l’eq. de quantité de mvt

$$\frac{\nabla \cdot q^{m+1} - \nabla \cdot q^m}{\Delta t} + \nabla^2 : f(n^m, q^m) = \nabla \cdot (n^{m+1} \nabla \phi^{m+1}),$$

⇒ ∂_t discrète de l’eq. de masse

$$\frac{n^{m+2} - 2n^{m+1} + n^m}{\Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot q^{m+1} - \nabla \cdot q^m}{\Delta t} = 0,$$

➡ Diff. et utilisation de l’eq. de Poisson discrète



➡ Discrétisation de l’eq. de Poisson reformulée

$$-\lambda^2 \frac{\Delta\phi^{m+2} - 2\Delta\phi^{m+1} + \Delta\phi^m}{\Delta t^2} - \nabla \cdot (n^{m+1} \nabla \phi^{m+1}) = -\nabla^2 : f(n^m, q^m)$$

Discrétisation **explicite conditionnellement stable**

4. Nouvelle approche : schéma “AP”

⇒ Schéma “AP” :

⇒ Poisson et flux masse **implicites**

⇒ Terme de force électrique **semi-implicite**

⇒ Flux quantité de mvt **explicite**

⇒

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} + \nabla \cdot q^{m+1} = 0, \\ \frac{q^{m+1} - q^m}{\Delta t} + \nabla f(n^m, q^m) = n^m \nabla \phi^{m+1}, \\ \lambda^2 \Delta \phi^{m+1} = n^{m+1} - n_0. \end{array} \right.$$

⇒ Coût et comportement dans la limite quasi-neutre ?

Eq. Poisson reformulée discrète associée 32

⇒ $\nabla \cdot$ (conserv. de q) - ∂_t discrète (conserv. n)

⇓ Poisson discret

$$-\lambda^2 \frac{\Delta \phi^{m+1} - 2 \Delta \phi^m + \Delta \phi^{m-1}}{\Delta t^2} - \nabla \cdot (n^m \nabla \phi^{m+1}) = -\nabla^2 : f(n^m, q^m)$$

⇒ On a gagné en implicitation de l'eq. du pendule.

⇒ ϕ^{m+1} explicite en fonction des données aux temps t^m et t^{m-1}

- Contrainte CFL du syst. hydro. toujours présente
 - Peut être pénalisante pour les électrons
- Peut se traiter avec la même méthodologie
 - Eq. de Poisson est remplacée par une eq. elliptique du 4^{ème} ordre
 - Travail en cours avec J-G. Liu
- La même idée peut s’appliquer à la limite faible nombre de Mach d’Euler compressible (en cours)

$$\Delta t^{-1} (n^{m+1} - n^m) + \nabla \cdot q^{m+1} = 0$$

$$\Delta t^{-1} (q^{m+1} - q^m) + \nabla f(n^m, q^m) = n^m \nabla \phi^{m+1}$$

$$\lambda^2 \Delta \phi^{m+1} = n^{m+1} - 1$$

⇒ Elimination de $q \Rightarrow$ Formul. explicite

⇒ Flux de Lax-Friedrichs modifié

Flux num. de masse = $q + \text{viscosité num.}(n)$

⇒ Extension solveurs de type Roe en cours

5. Résultats numériques

▣▣▣ ➔ Deux espèces : ions et électrons

$$\begin{cases} \partial_t n_i + \nabla \cdot q_i = 0, \\ \partial_t q_i + \nabla \left(\frac{q_i \otimes q_i}{n_i} \right) + \nabla p_i(n_i) = -n_i \nabla \phi, \\ \partial_t n_e + \nabla \cdot q_e = 0, \\ \varepsilon \partial_t q_e + \varepsilon \nabla \left(\frac{q_e \otimes q_e}{n_e} \right) + \nabla p_e(n_e) = n_e \nabla \phi \\ \lambda^2 \Delta \phi = n_e - n_i, \end{cases}$$

▣▣▣ ➔ Perturbation autour d'un équilibre

$$n_i = n_e = 1, \quad q_i = 0, \quad q_e = 1.$$

▣▶ Perturbation initiale :

$$n_i = n_e = 1, \quad q_i = 10^{-2} \cos 2\pi x, \quad q_e = 1 + 10^{-2} \cos 2\pi x.$$

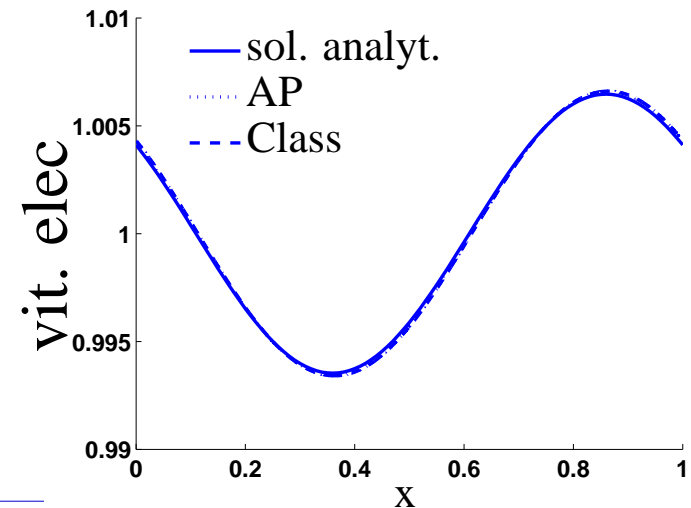
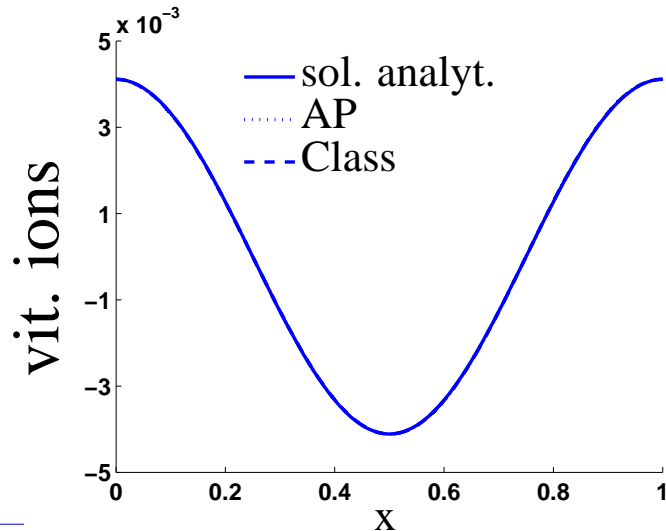
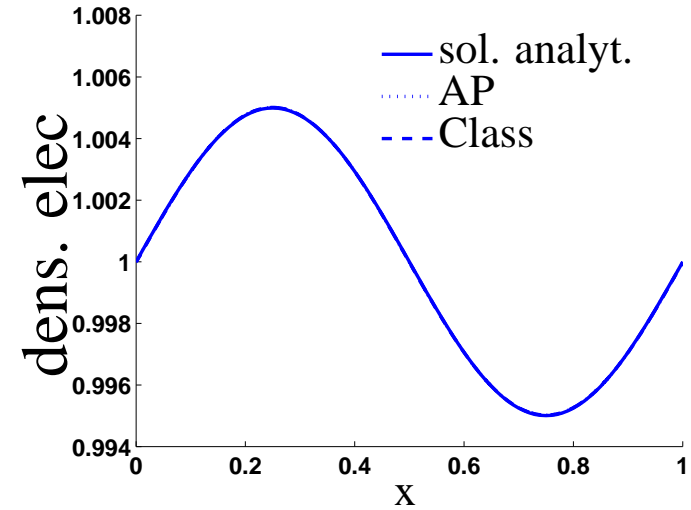
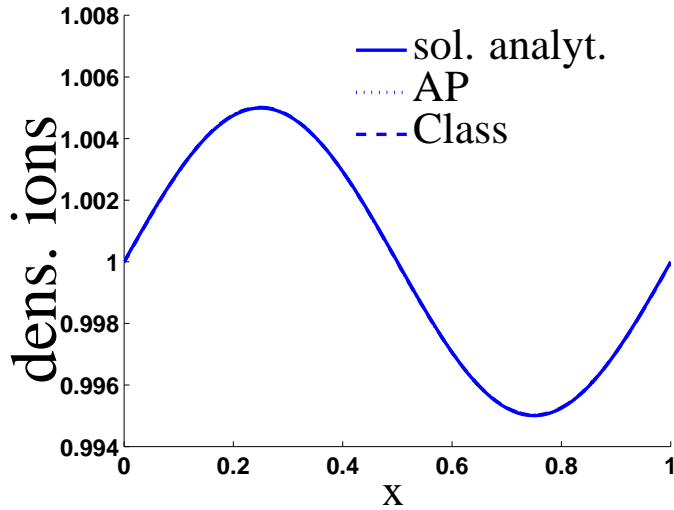
▣▶ Solutions explicites du système linéarisé connues

▣▶ Paramètres du pb

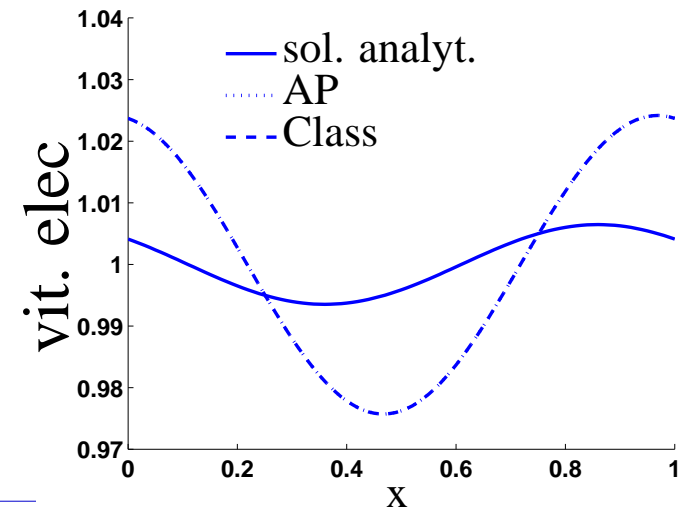
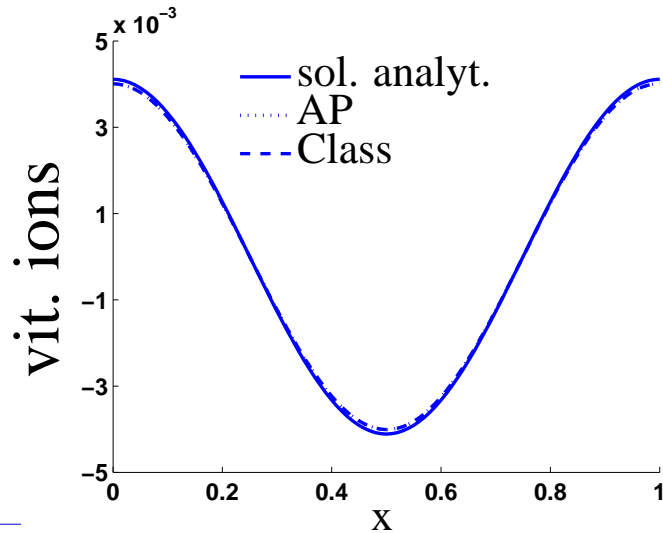
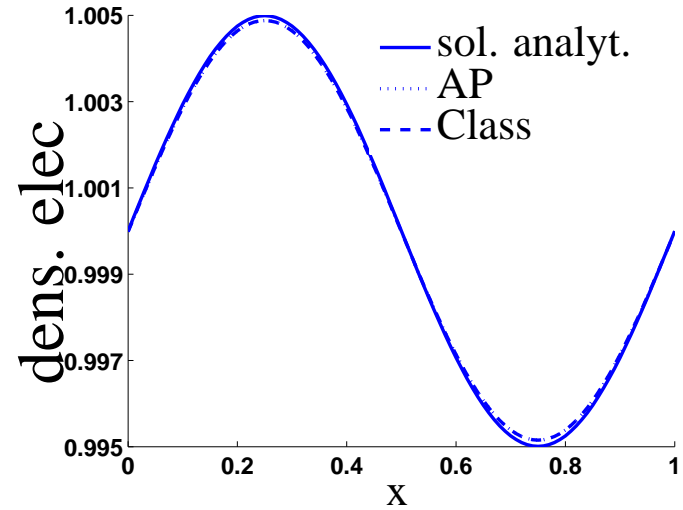
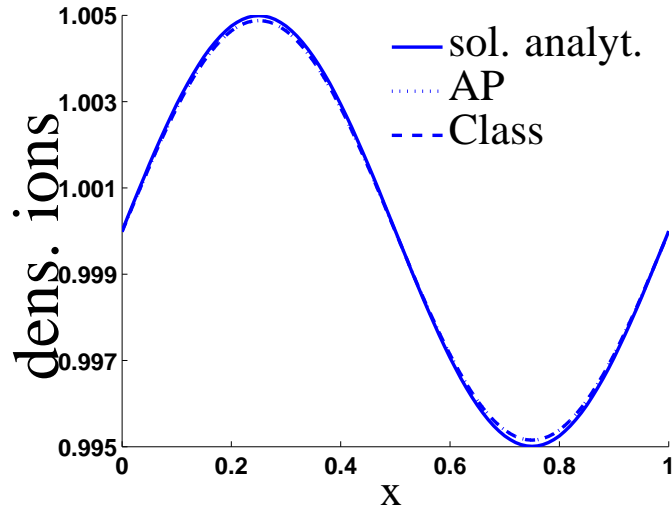
$$\text{rapport masses} = \varepsilon = 10^{-4}, \quad \text{long. Debye} = \lambda = 10^{-4},$$

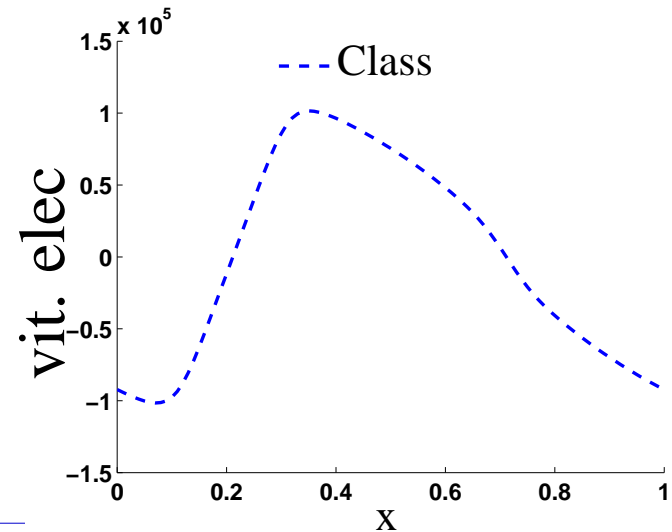
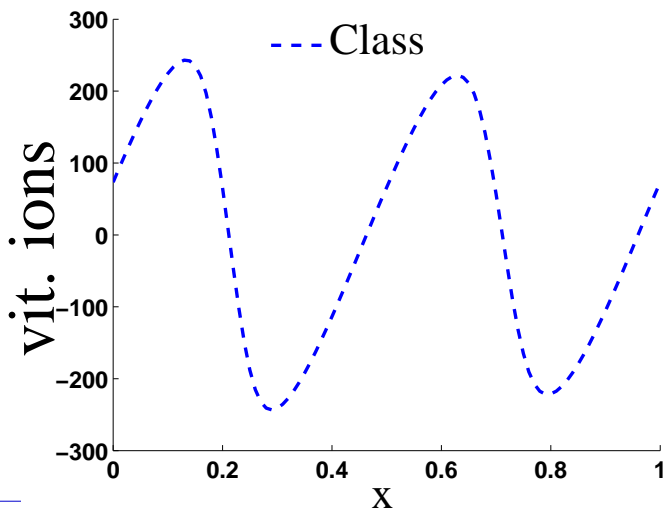
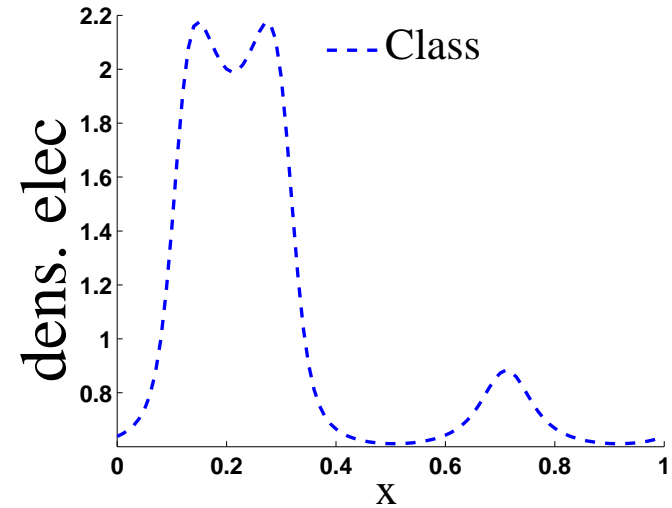
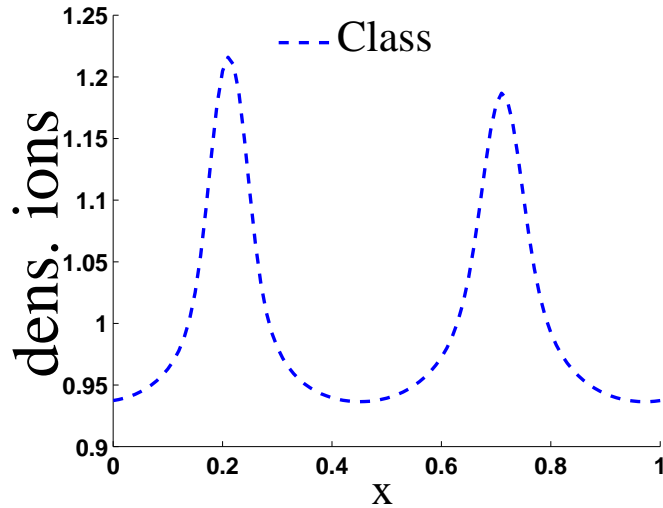
$$\text{freq. plasma} = \omega = (\varepsilon\lambda)^{-1} = 10^6$$

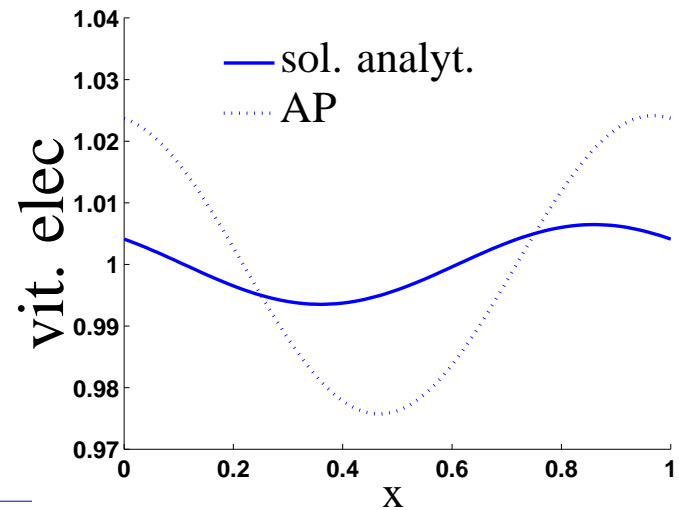
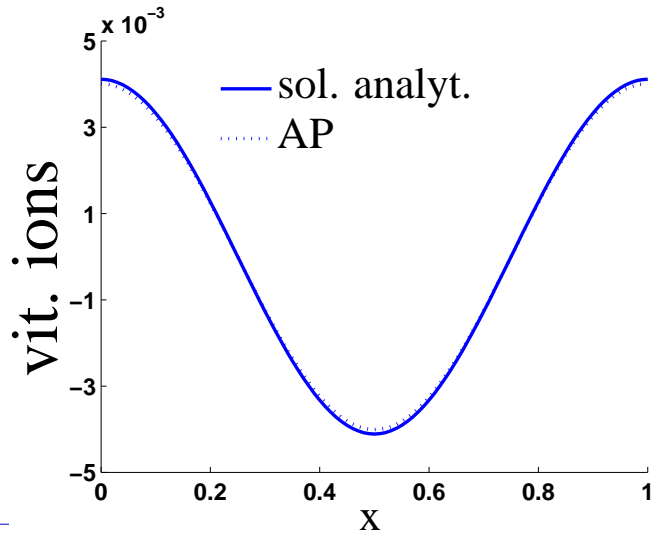
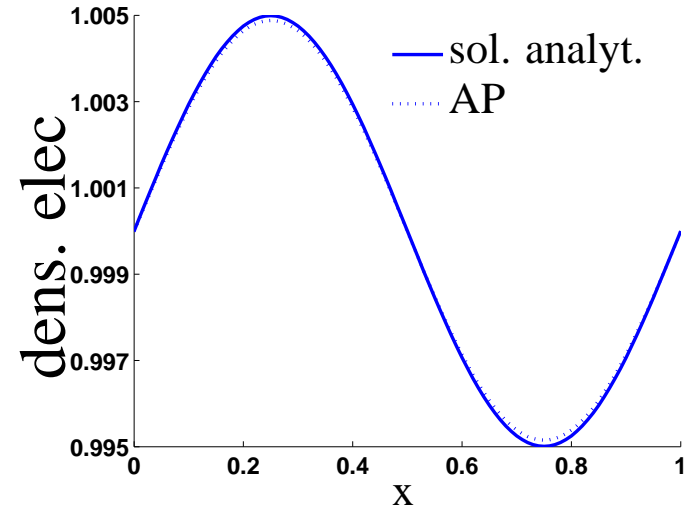
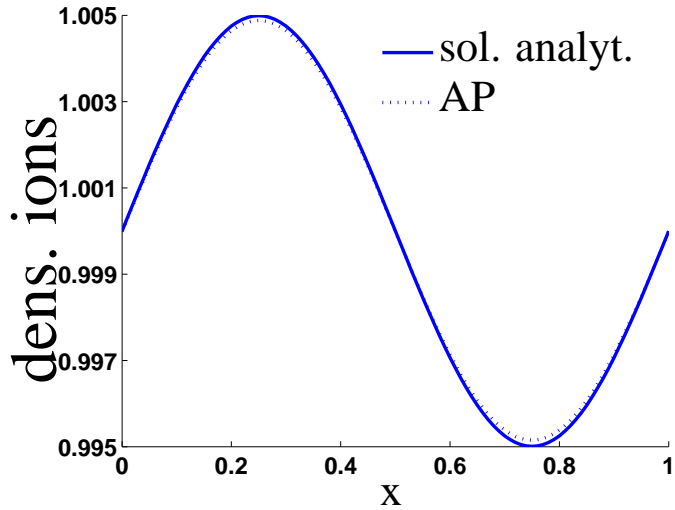
Classique et AP : $\Delta x < \lambda$ $\omega \Delta t < 1$ 39

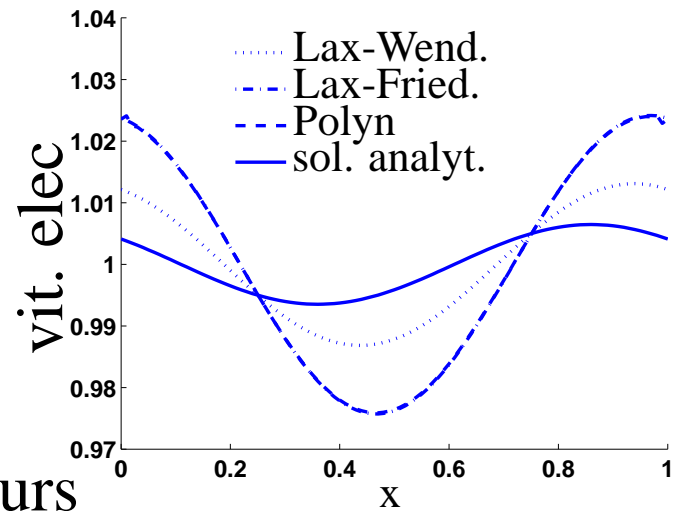
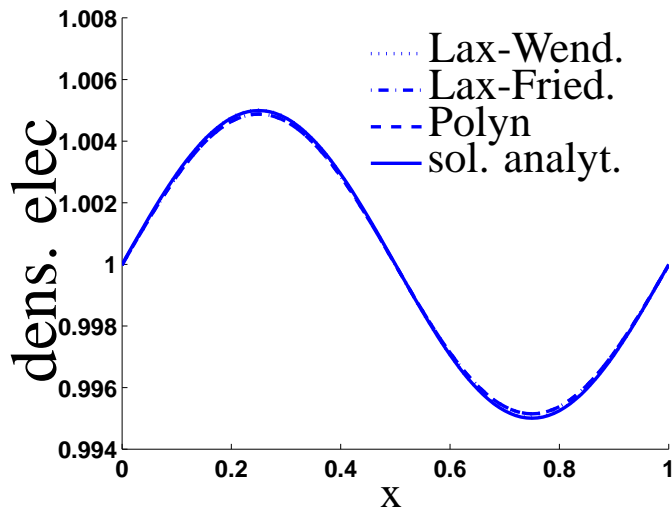


Classique et AP : $\Delta x > \lambda$ $\omega \Delta t < 1$ 40

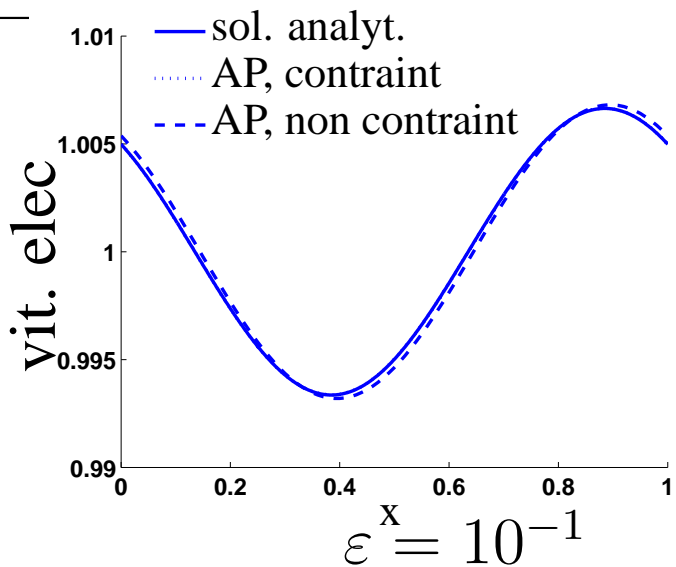
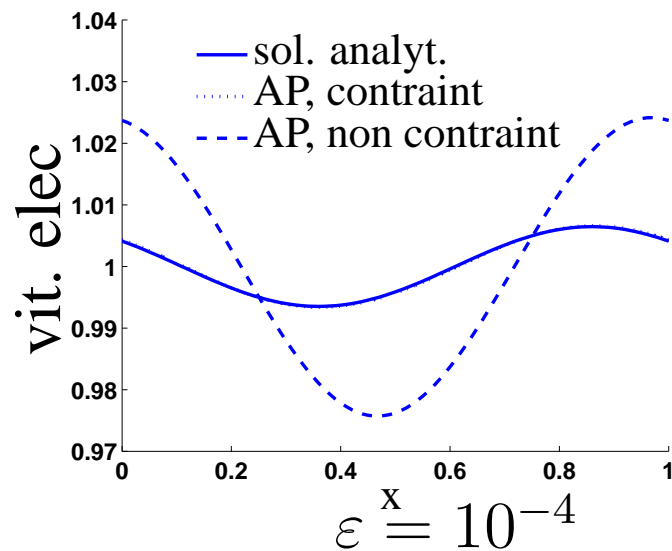








Autres solveurs



Variation ε

Expansion de plasma entre 2 électrodes 44

➡ Au départ, domaine vide de plasma

➡ Injection en $x = 0$, la cathode :

$$n_i = n_e = 1 \quad u_i = u_e = 1 \quad \phi = 0$$

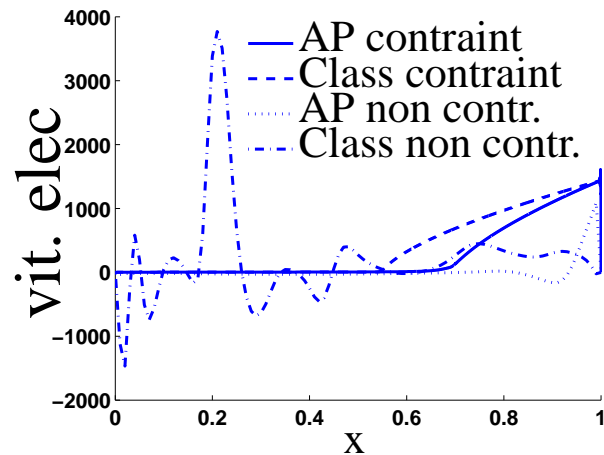
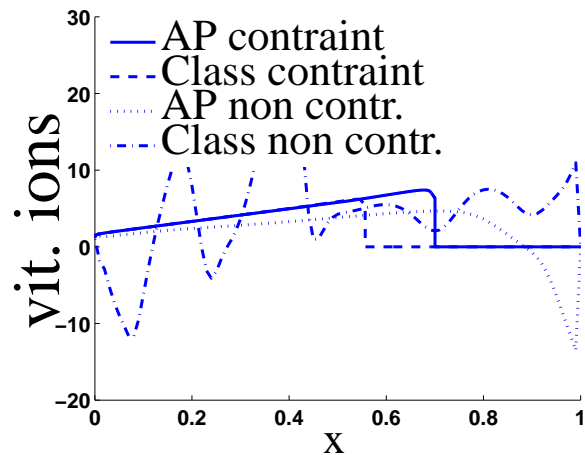
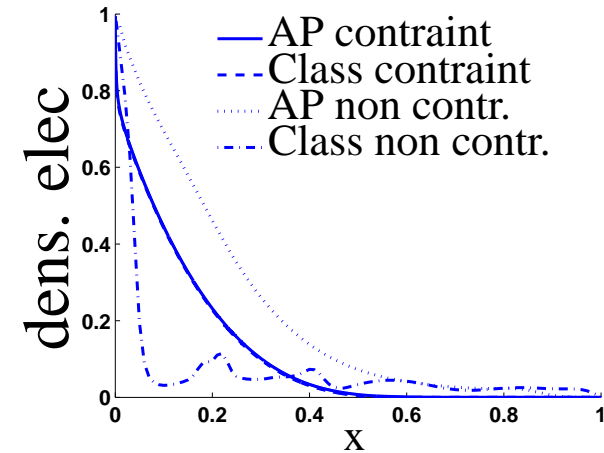
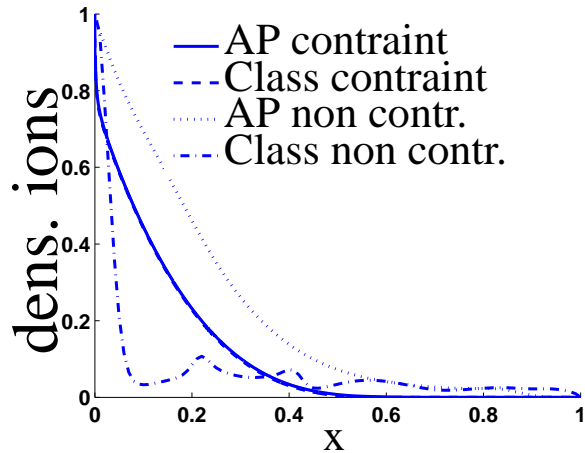
➡ D.D.P. appliquée

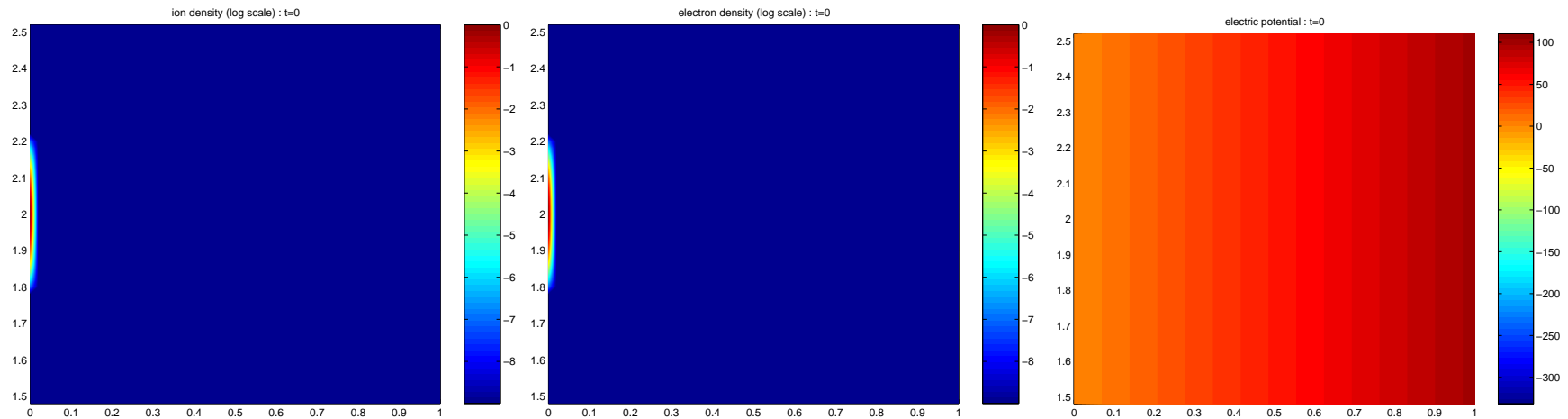
$$\phi(x = 1) = \phi_1$$

➡ Paramètres

$$\varepsilon = 10^{-4} \quad \lambda = 10^{-4} \quad \phi_1 = 100$$

Classique et AP : comparaison $\omega\Delta t \gtrless 1$ 45

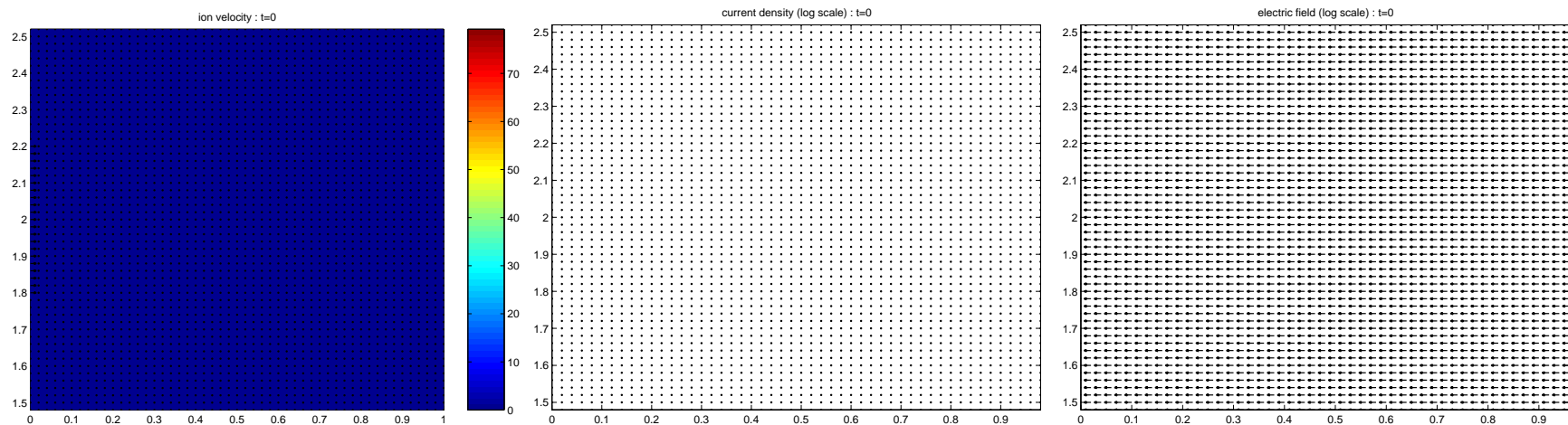




dens. ions

dens. élec.

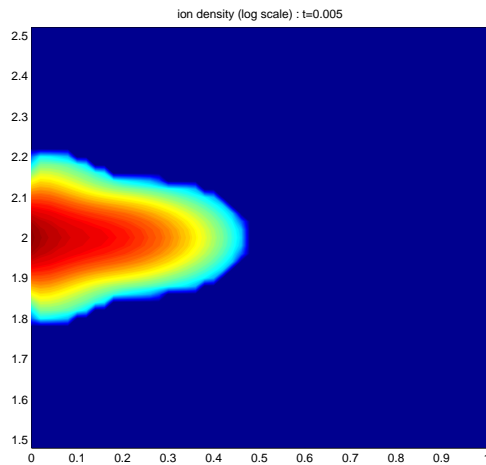
Potentiel



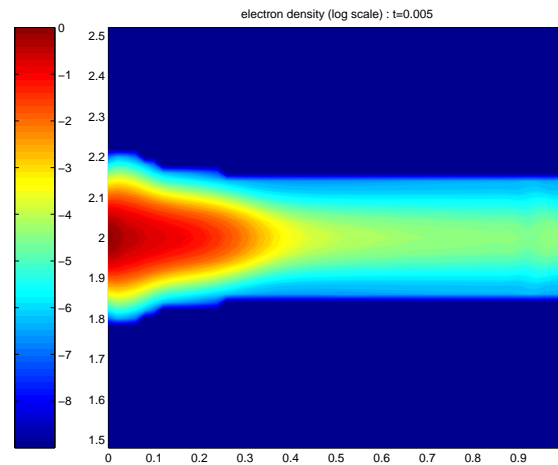
vit. ions

courant

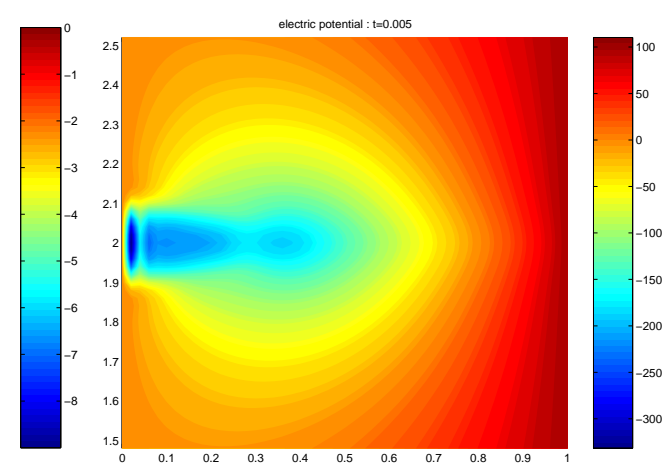
champ élec.



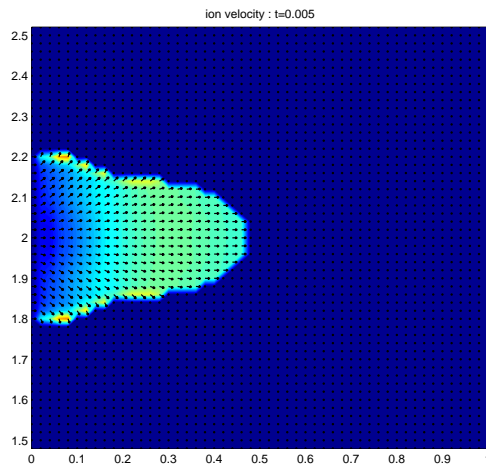
dens. ions



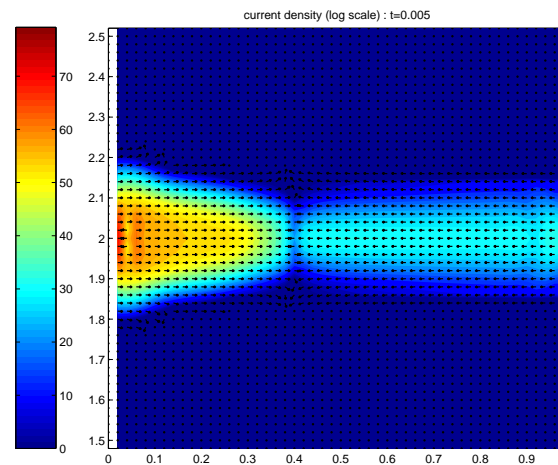
dens. élec.



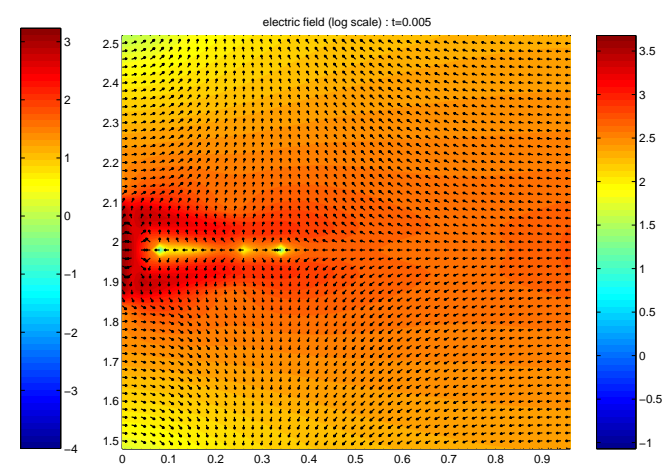
Potentiel



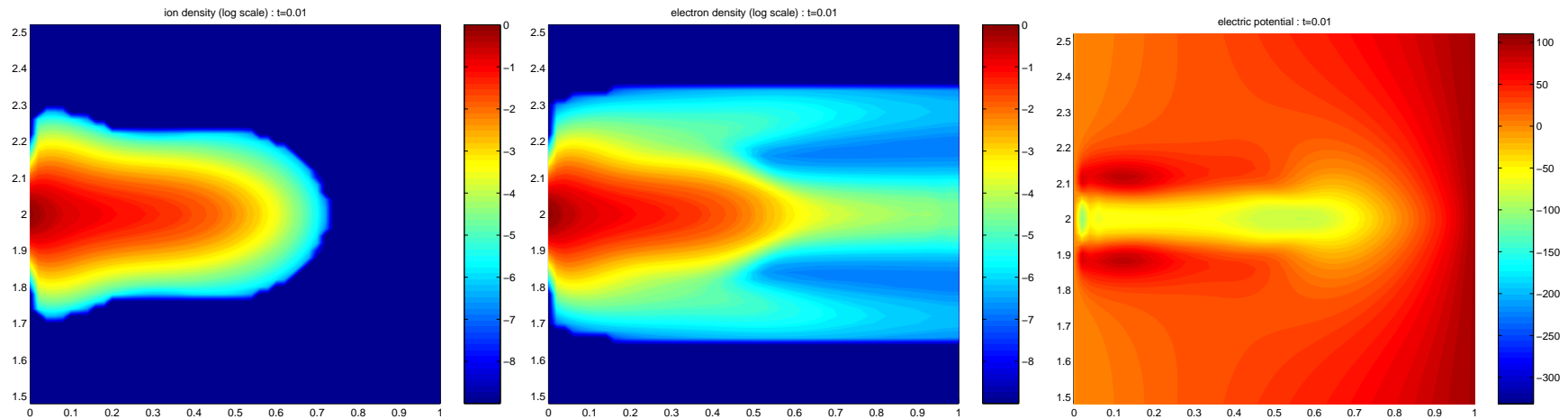
vit. ions



courant



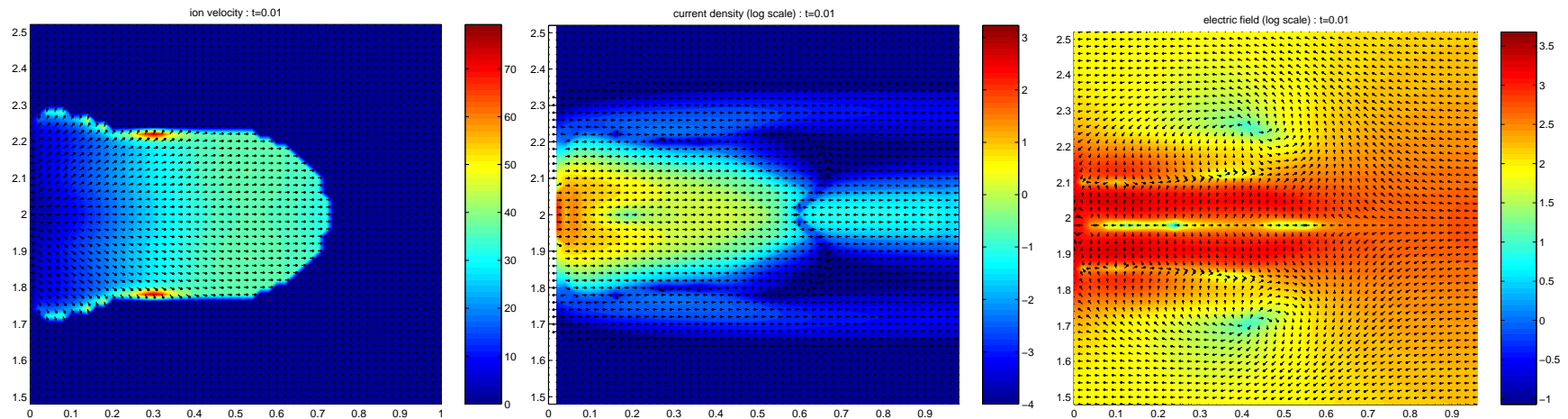
champ élec.



dens. ions

dens. élec.

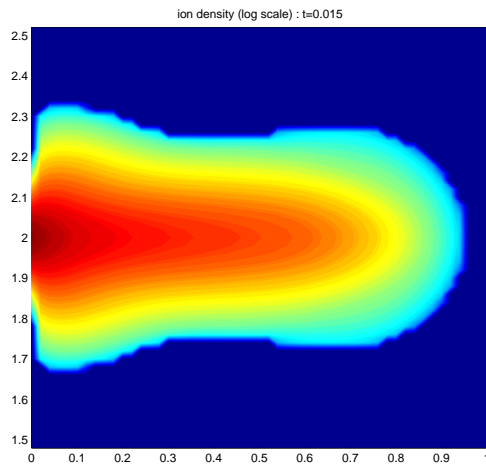
Potential



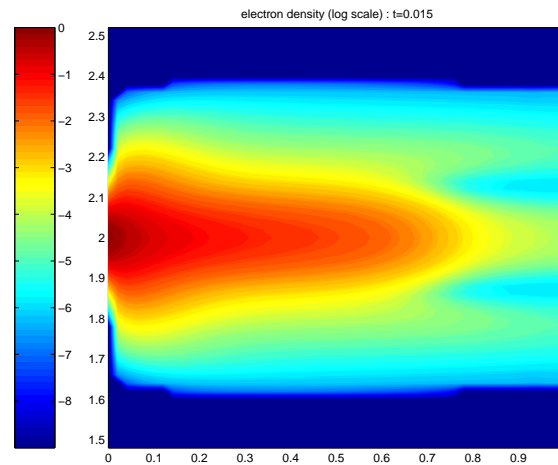
vit. ions

courant

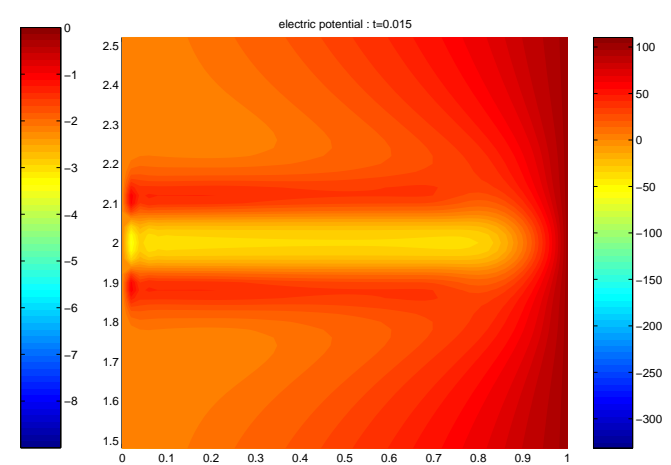
champ élec.



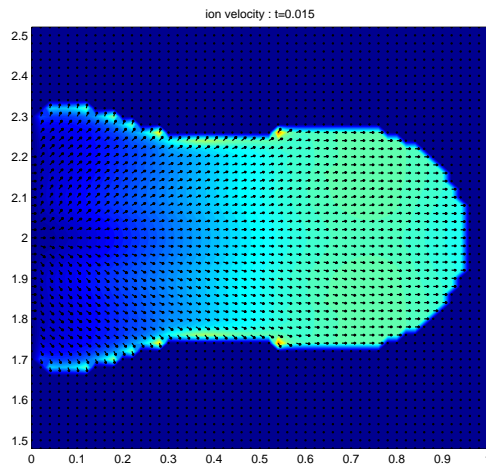
dens. ions



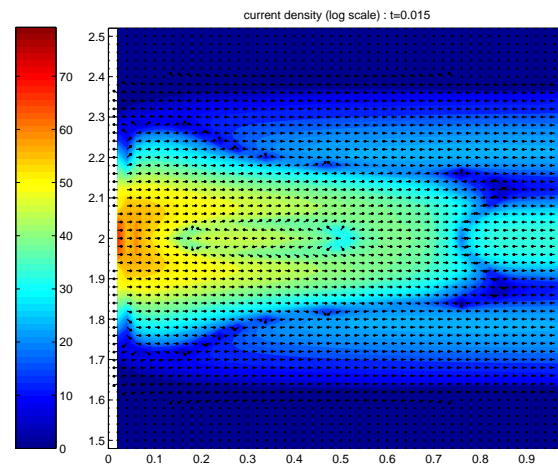
dens. élec.



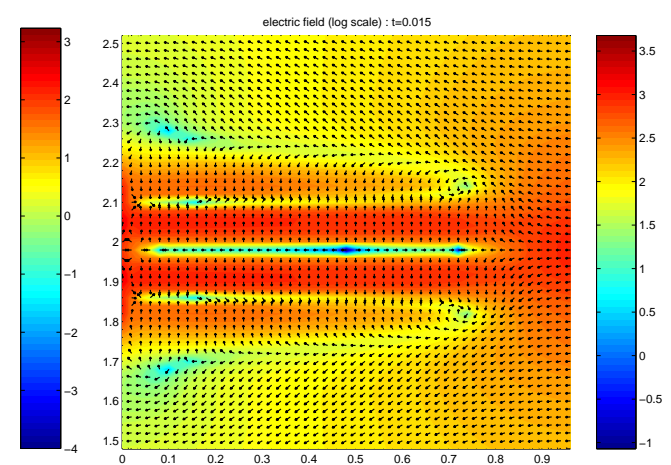
Potentiel



vit. ions



courant

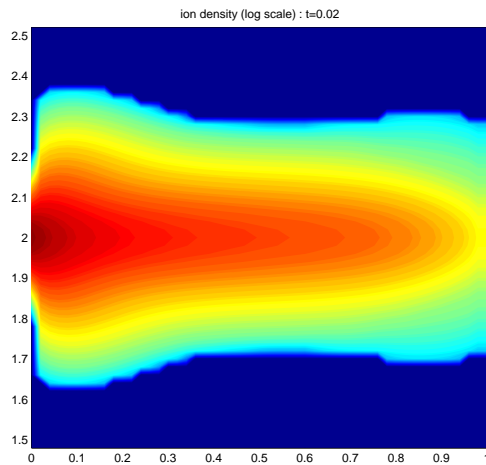


champ élec.

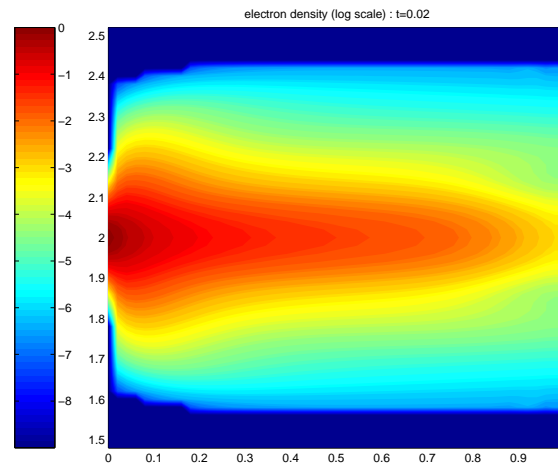
schéma AP : résultats 2D

$t = 0.02$

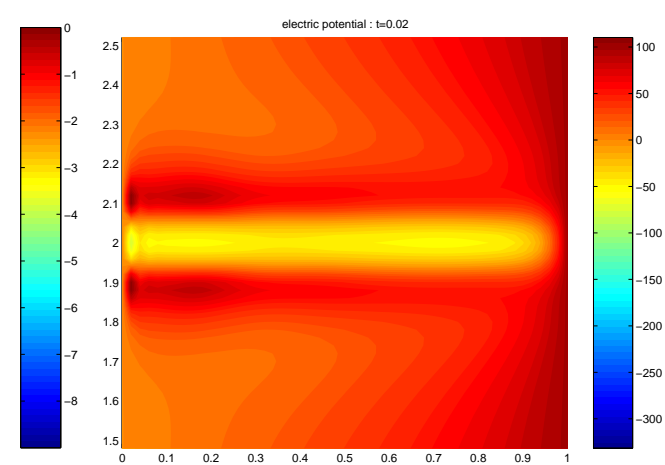
50



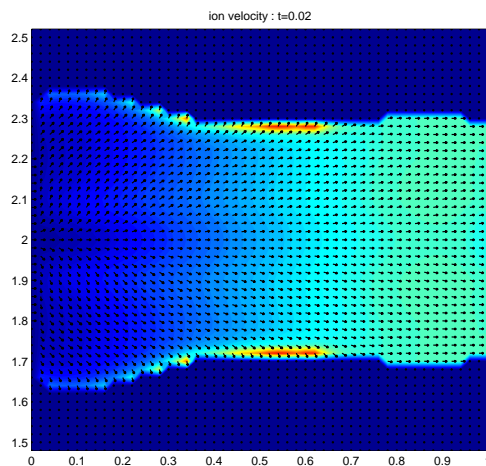
dens. ions



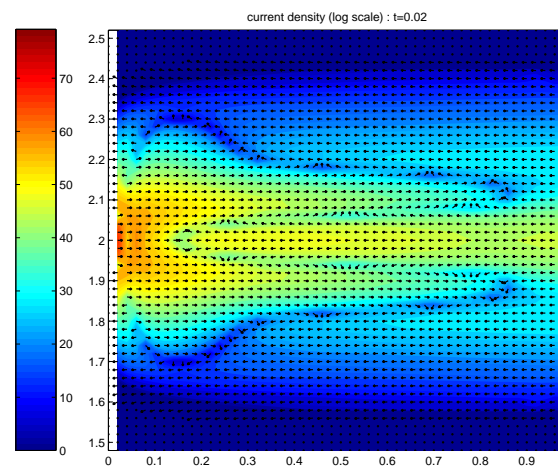
dens. élec.



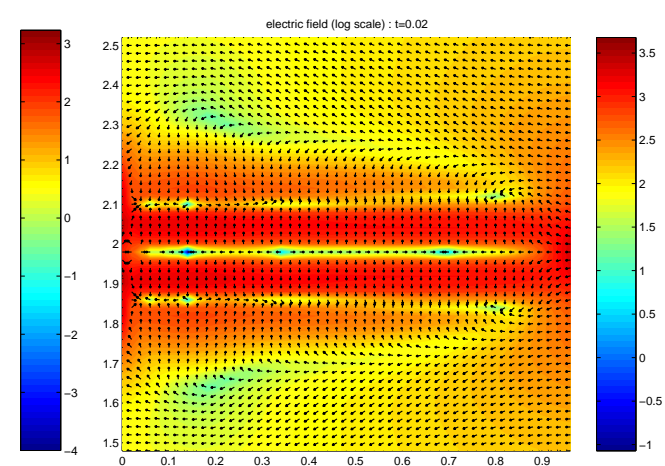
Potentiel



vit. ions



courant



champ élec.

6. Perspectives

- ▣ ➔ Autres solveurs
 - ▣ ➔ Lax-Wendroff
 - ▣ ➔ Solveurs de type Roe

- ▣ ➔ Autres modèles
 - ▣ ➔ Euler complet (eqs. energies)
 - ▣ ➔ Vlasov-Poisson
 - ▣ ➔ Dérive-Diffusion

- ▣ ➔ Euler-Maxwell