

Trois formulations d'un modèle de plasma quasi-neutre avec courant non nul

Pierre Crispel^{†,‡}, Pierre Degond[†], Céline Parzani[†], Marie-Hélène Vignal[†]

[†] MIP, UMR 5640 (CNRS-UPS-INSA), Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 TOULOUSE cedex, FRANCE. E-mail: crispel, degond, parzani, mhvignal@mip.ups-tlse.fr

[‡] Département Environnement SPatial, ONERA Centre de Toulouse 2, avenue Edouard Belin, B.P. 4025, 31055 Toulouse cedex 4, FRANCE.

Résumé – Nous présentons trois formulations d'un modèle de plasma quasi-neutre avec courant non nul. L'objectif de cette note étant d'explorer et de comparer l'efficacité de chaque formulation sur le plan numérique. Nous mettons en œuvre deux cas-tests mono-dimensionnels : un cas-test de perturbation d'un plasma stationnaire uniforme et un cas-test physique d'expansion de plasma entre deux électrodes plongées dans le vide.

Three formulations of a quasi-neutral plasma model with non-vanishing current

Abstract – In this paper, we propose three formulations of a model describing a quasi-neutral plasma with non-vanishing current. In order to study and compare the numerical efficiency of each formulation, two test-problems are implemented in one dimension. The first one is a periodic perturbation of a uniform stationary plasma. The second one is a case of plasma expansion in vacuum between two electrodes .

Abridged English Version.

In this paper, we are interested in the modeling of a quasi-neutral plasma with non-vanishing current. The plasma is considered as fully ionized, collisionless and constituted of only one ion species. Such a plasma can be described by an isentropic Euler system for each species (ions and electrons) coupled with the Poisson equation. Due to the very short length scale associated with the Poisson equation, the discretization of this model requires very fine meshes. Therefore, this model leads to expensive simulations in practical situations. In the present work, we propose a quasi-neutral model which avoids the resolution of the Poisson equation. In spite of being quasi-neutral, the model allows the current to be non-zero. It can be given three different and equivalent formulations respectively called five-equation, four-equation and three-equation formulations, corresponding to (1), (2) and (3). This work is, to our knowledge, the first instance where these equivalent formulations are presented and studied. Even if these systems are formally equivalent they may lead to different numerical approximations with different efficiencies. The aim of this paper is to find the formulation which leads to the best numerical approximation.

All systems are constituted of a set of evolution equations coupled with a divergence free constraint for the current. Among these formulations, the five-equation system (1) which is constituted of isentropic Euler conservation laws for each species seems to be the most natural one. Moreover, the hyperbolic operator of (1) is unconditionally strictly hyperbolic. The four-equation system (2) can easily be solved numerically. However, the hyperbolic operator of (2) is not strictly hyperbolic: in certain cases, two of its eigenvalues may coincide. Finally, the three-equation system (3) is the most reduced expression of the quasi-neutral model and has been studied in [4], [5], [8]. Unfortunately, this formulation is ill-posed in multi-dimensional cases because there are more unknowns than equations. Moreover, its hyperbolic operator is not unconditionally hyperbolic in one dimension.

In order to compare the numerical efficiency of each formulation, two one-dimensional situations are implemented. The first one is a periodic perturbation of a quasi-neutral uniform steady state with non-zero current. This configuration is described in [1] and an analytical solution of the linearized system is known. The second situation is a case of plasma expansion between two electrodes in vacuum. A high density plasma is emitted from the cathode and undergoes a thermal expansion. An electron current is emitted at the plasma-vacuum interface. This current obeys a Child-Langmuir law and generates a non-zero current inside the plasma. This phenomenon has been studied in a series of works [4], [5], [8], in relation with physical applications [9], [2], [3].

For both configurations, the numerical method is based on a time splitting: on the plasma domain, the hyperbolic part of each system is computed by a Godunov scheme [7], [6]. Then the source terms are taken into account by an implicit Euler scheme. For the steady-state perturbation configuration, we can compare the numerical solution with an analytical one and study the accuracy of the numerical scheme for each formulation (see figure 1 on the left side). For the plasma expansion case, the numerical results are compared to two-fluid Euler-Poisson simulations (see figure 1 on the right side).

The main result of this work is that for both configurations, the five-equation formulation is less accurate than the three-equation and four-equation ones. This can be explained by the fact that the hyperbolic part of the five-equation formulation requires the resolution of the fast time scale related to the small electron mass, while the other formulations do not. On the other-hand, the hyperbolicity condition for the three-equation formulation can be too restrictive for certain physical applications such as plasma expansion. We conclude that the four-equation formulation of the quasi-neutral model leads to the best numerical approximations.

1. Introduction

Nous nous intéressons à la modélisation d'un plasma quasi-neutre et parcouru par un courant non nul. Ce plasma est totalement ionisé, constitué d'une seule espèce d'ion et non collisionnel. Le point de départ de la modélisation consiste en un système d'équations d'Euler isentropiques pour chaque espèce (ions et électrons), couplées à l'équation de Poisson. Ce modèle bifluide peut être mis en oeuvre numériquement mais les contraintes liées à la résolution de l'équation de Poisson engendrent un maillage extrêmement fin. Les simulations numériques sont alors très coûteuses dans la pratique. C'est pourquoi, à partir du modèle bifluide, nous dérivons un modèle asymptotique quasi-neutre de courant non nul. Ceci permet d'éviter la résolution de l'équation de Poisson. Ce modèle asymptotique peut prendre trois formes différentes sur le plan de leur formulation mais équivalentes du point de vue mathématique, consistant respectivement en des systèmes à 3, 4 ou 5 équations. Chaque système comporte une partie hyperbolique contrainte par la divergence nulle du courant et des termes sources. Dans le présent travail, nous exposons et étudions, pour la première

fois à notre connaissance, ces différentes formulations.

L'objectif de cet article est d'explorer l'efficacité de chaque formulation sur le plan numérique. Pour une simulation mono-dimensionnelle, la méthode développée pour la résolution des différents systèmes est un splitting en temps : la partie hyperbolique est d'abord résolue par un schéma de type Godunov [7], [6], puis les termes sources sont pris en compte par un schéma Euler implicite. Nous appliquons cette méthode numérique sur deux cas-tests.

Le premier cas-test est une perturbation périodique d'un plasma stationnaire quasi-neutre de courant non nul. Cette situation est décrite dans [1] pour l'étude de l'instabilité double-faisceau. Pour des perturbations de faible amplitude, une solution analytique de chacun des systèmes linéarisés autour de l'état stationnaire est connue. Nous comparons alors la précision des schémas numériques associés à chacune des formulations du modèle asymptotique.

Le second cas-test est un problème physique d'expansion d'un plasma dans le vide entre deux électrodes. Cette situation correspond à certains types de diodes à plasma [9], ainsi qu'à la formation d'arcs électriques sur des générateurs solaires de satellites [2], [3]. Nous considérons deux électrodes entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel et nous supposons qu'un plasma est émis au niveau de la cathode. Au cours de l'expansion du plasma, des électrons sont accélérés à l'interface plasma-vide vers l'anode, constituant ainsi un faisceau électronique. Cette émission électronique crée alors un courant dans le plasma. Cette situation a été étudiée dans une série de travaux [4], [5], [8] dans lesquels le plasma est modélisé en une dimension à l'aide de la formulation à trois équations. Notre but ici est d'explorer l'efficacité des formulations à quatre et cinq équations pour résoudre ce problème.

2. Trois formulations d'un modèle quasi-neutre de courant non nul

Pour l'établissement des différentes formulations du modèle quasi-neutre à partir du modèle Euler-Poisson, nous renvoyons à [4], [5], [8], ainsi qu'à [3]. Les quantités relatives aux ions sont indicées par i et celles relatives aux électrons par e . On note $n = n_i = n_e$ la densité des particules, $m_{i,e}$ leurs masses, $u_{i,e}$ leurs vitesses, $p_{i,e} = k_{i,e} n_{i,e}^{\gamma_{i,e}}$ leurs lois de pression ($\gamma_i, \gamma_e > 1$), et $q > 0$ la charge élémentaire. De plus nous introduisons le courant j tel que $j = q(n_i u_i - n_e u_e)$.

2.1- Formulation à 5 équations : Celle-ci s'écrit pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$,

$$(1) \quad \begin{cases} (n_i)_t + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, & m_i [(n_i u_i)_t + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i)] + \nabla p_i(n_i) = -q n_i \nabla \phi, \\ (n_e)_t + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, & m_e [(n_e u_e)_t + \nabla \cdot (n_e u_e \otimes u_e)] + \nabla p_e(n_e) = q n_e \nabla \phi, \\ \nabla \cdot (n_i u_i - n_e u_e) = 0, & n_i(t=0) = n_e(t=0). \end{cases}$$

Le système constitué des équations de conservation de masse et d'impulsion pour lequel le potentiel ϕ est considéré comme une donnée est inconditionnellement strictement hyperbolique. La contrainte de divergence nulle du courant conduit à une équation elliptique pour le potentiel :

$$-q \nabla \cdot \left(\left(\frac{n_i}{m_i} + \frac{n_e}{m_e} \right) \nabla \phi \right) = \nabla \cdot \nabla (n_i u_i \otimes u_i - n_e u_e \otimes u_e) + \frac{1}{m_i} \Delta p_i(n_i) - \frac{1}{m_e} \Delta p_e(n_e).$$

2.2- Formulation à 4 équations : Celle-ci s'écrit pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$,

$$(2) \quad \begin{cases} n_t + \nabla \cdot (n u_i) = 0, \\ (m_i + m_e) [(n u_i)_t + \nabla \cdot (n u_i \otimes u_i)] + \nabla (p_i + p_e) = \frac{m_e}{q} n \nabla \psi, \\ j_t + \nabla \cdot \left(u_i \otimes j + j \otimes u_i - \frac{j \otimes j}{qn} \right) = n \nabla \psi, \\ \nabla \cdot j = 0. \end{cases}$$

La formulation à quatre équations est une réécriture de (1) où l'on introduit la variable scalaire ψ telle que :

$$\psi = -q \left(\frac{k_i \gamma_i n^{\gamma_i - 1}}{m_i (\gamma_i - 1)} - \frac{k_e \gamma_e n^{\gamma_e - 1}}{m_e (\gamma_e - 1)} \right) - q^2 \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \phi.$$

Le système constitué des trois premières équations (en considérant $n \nabla \psi$ comme une donnée) est inconditionnellement hyperbolique. Toutefois, il n'est pas strictement hyperbolique, c'est à dire que pour certaines valeurs des variables d'état, deux valeurs propres du système peuvent être confondues. La variable ψ est calculée par une équation elliptique :

$$-\nabla \cdot (n \nabla \psi) = -\nabla \cdot \nabla \left(u_i \otimes j + j \otimes u_i - \frac{j \otimes j}{qn} \right)$$

2.3- Formulation à 3 équations : Celle-ci s'écrit pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$,

$$(3) \begin{cases} n_t + \nabla \cdot (n u_i) = 0, \\ (m_i + m_e) [(n u_i)_t + \nabla \cdot (n u_i \otimes u_i)] + \nabla \cdot (p_i + p_e) - \frac{m_e}{q} \nabla \cdot \left(u_i \otimes j + j \otimes u_i - \frac{j \otimes j}{qn} \right) = \frac{m_e}{q} j_t, \\ \nabla \cdot j = 0. \end{cases}$$

La formulation à trois équations a été utilisée dans les études antérieures [4], [5], [8]. Néanmoins, elle n'est bien posée qu'en une dimension. En effet, en dimension supérieure, elle ne compte pas autant d'équations que d'inconnues. Par ailleurs, le système constitué des deux premières équations (en considérant j comme une donnée) est hyperbolique en dimension 1 sous la condition $k_i \gamma_i n^{\gamma_i + 1} + k_e \gamma_e n^{\gamma_e + 1} > j^2 / (q^2 (1/m_i + 1/m_e))$.

2.4- Discussion des différentes formulation du modèle asymptotique

Parmi les différentes formulations présentées, la formulation à 5 équations paraît la plus naturelle et celle qui se prête le mieux au couplage avec d'autres fluides. La formulation à 4 équations est plus simple pour le traitement numérique mais n'est pas strictement hyperbolique. Enfin, la formulation à 3 équations est la forme la plus réduite du modèle quasi-neutre. Cependant, elle ne peut pas être appliquée à des problèmes posés en dimension supérieure à 1. De plus, la perte d'hyperbolicité peut empêcher la simulation numérique dans certains cas.

3. Etude numérique pour deux cas-tests mono-dimensionnels

Nous rappelons que la méthode numérique utilise un splitting en temps. La partie hyperbolique des systèmes asymptotiques est résolue par un schéma de type Godunov avec solveur polynomial de degré 2 (cf. [6], [7]). Puis les termes sources sont pris en compte par un schéma d'Euler implicite, le courant (uniforme) étant connu.

3.1- Perturbation d'un plasma stationnaire uniforme

Nous considérons la configuration d'instabilité double faisceau [1]. Celle ci consiste à perturber une solution stationnaire uniforme $n_i = n_e = n^0$, $u_i = u_i^0$, $u_e = u_e^0$, et $\phi^0 = 0$ sur un intervalle $[0, L]$. Pour une perturbation initiale de faible amplitude respectant la quasi-neutralité et l'uniformité du courant, la solution perturbée est alors proche de la solution du système linéarisé. Notons que toutes les formulations du modèle quasi-neutre conduisent au même système linéarisé. Suivant les paramètres choisis, la perturbation est stable ou instable ; nous comparons dans cette note les modèles dans une configuration stable.

Les valeurs numériques choisies pour la simulation sont typiques du problème d'établissement d'un arc électrique sur un générateur solaire de satellite (cf [2], [3]) : $m_i = 10^4 m_e$, $L = 10^{-3} m$, $\gamma_i = \gamma_e = 2$ et $k_i = k_e = 1.6 \cdot 10^{-39} J.m^{3(\gamma-1)}$. L'état stationnaire considéré est le suivant $u_i^0 = 4190 m.s^{-1}$, $u_e^0 = 8380 m.s^{-1}$, $n^0 = 5.53 \cdot 10^{19} m^{-3}$ et $\phi^0 = 0 V$. A l'état initial, la perturbation imposée sur les vitesses est sinusoïdale d'amplitude $\delta = 41.9 m.s^{-1}$ et de longueur d'onde L . Les conditions aux limites sont périodiques.

La figure 1 (gauche) présente une étude numérique des différentes formulations en fonction du maillage. Etant donné que nous choisissons la solution du système linéarisé comme référence, il est normal d'observer que l'erreur ne tende pas vers 0 quand on augmente le nombre de mailles. Cependant, cette approche est suffisante pour constater la faible précision du schéma numérique associé à la formulation à 5 équations.

3.2- Expansion d'un plasma entre deux électrodes

Un plasma chaud et dense injecté à la cathode subit une détente thermique vers l'anode. Pour ce problème, le domaine inter-électrodes $[0, L]$ est divisé en deux sous-domaines : le domaine $[0, X(t)]$ est la zone de plasma quasi-neutre (décrit par le modèle asymptotique), et le domaine $]X(t), L]$ est la zone de faisceau électronique (décrit par un modèle de Child Langmuir analytique). Le courant qui traverse le plasma est égal au courant engendré par l'émission électronique à l'interface plasma/faisceau dans le régime de Child-Langmuir[4], [5], [8].

Pour la simulation numérique, nous travaillons avec le même rapport de masse et les mêmes lois de pression qu'au paragraphe précédent. Les conditions aux limites sont $n(0, t) = 5.53 \cdot 10^{19} m^{-3}$, $u_i(0, t) = u_e(0, t) = 4190 m.s^{-1}$, $\phi(0, t) = 0 V$ et $\phi(L, t) = 100 V$. Le domaine est vide de plasma à l'état initial.

Comme le domaine de définition $[0, X(t)]$ du plasma quasi-neutre évolue au cours du temps, une méthode de suivi d'interface est implémentée où la valeur des flux à l'interface est donnée par la résolution d'un problème de Riemann entre le plasma et le faisceau (cf. [5]).

La figure 1 (droite) présente à différents instants de l'expansion les profils numériques de la densité ionique du plasma pour les formulations à 4 et 5 équations, et pour le modèle Euler-Poisson (solution de référence). On constate que la formulation à 5 équations donne des résultats peu satisfaisants. La formulation à 4 équations donne de bons résultats, hormis une couche limite à la cathode déjà notée dans [4], [5], [8]. La formulation à 3 équations (non représentée) donne des résultats identiques à la formulation à 4 équations tant que la condition d'hyperbolicité est satisfaite. Cette condition étant en défaut à partir d'un certain temps (inférieur à 71.6ns), il n'est pas possible d'utiliser cette formulation jusqu'au terme de l'expansion.

4. Conclusion

Nous avons étudié trois formulations équivalentes d'un même modèle de plasma quasi-neutre parcouru par un courant non nul, et nous avons mis en évidence que la formulation la plus performante sur le plan numérique est la formulation à 4 équations. La formulation à 5 équations souffre d'un défaut de précision qui est peut-être dû au fait que la partie hyperbolique du modèle retient des échelles de temps rapides associées à la très faible inertie des électrons, ce qui n'est pas le cas des autres formulations. La formulation à trois équations elle, cesse d'être hyperbolique après un certain temps.

Remerciements. Ce travail a reçu le soutien du Commissariat à l'Energie Atomique (Centre de Bruyères-le-Châtel) et du Centre National des Etudes Spatiales (Centre de Toulouse). Les auteurs remercient J. Segré, F. Assous et K-C Le Thanh (CEA), D. Payan (CNES) et J-F. Roussel (ONERA) pour leur intérêt et leurs conseils. Support by the European network HYKE, funded by the EC as contract HPRN-CT-2002-00282, is also acknowledged.

References

- [1] Chen F.F. Introduction to plasma physics and controlled fusion. Tome1, PLENUM PRESS 1974.
- [2] Cho M. Arcing on Hight Voltage Solar Arrays in Low Earth Orbit: Theory and Computer Particle Simulation, Phd thesis, Massachussets Institute of Technology, February 1992.
- [3] Crispel P., Degond P., Vignal M. H., Quasi-neutral plasma model with non-vanishing current. Article en préparation.
- [4] Degond P., Parzani C., Vignal M. H., Un modèle d'expansion de plasma dans le vide (French English, French summary), C. R. Acad. Sci. Paris 335 (2002), no. 4, 399-404.
- [5] Degond P., Parzani C., Vignal M. H., Plasma expansion in vacuum: modeling the breakdown of quasineutrality, article à paraître dans SIAM Multistate modeling and simulation.
- [6] Degond P., Peyrard P. F., Russo G., Villedieu Ph., Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems, C. R. Acad. Sci. Paris 328 (1999) 479-483.
- [7] Godlewski E., Raviart P. A., Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Springer, 1996.
- [8] Parzani C., Modélisation Mathématiques d'Expansion de Plasma et de Décharges Electriques, thèse de doctorat, INSA de Toulouse.
- [9] Sze H., Benford J., Woo W., Harteneck B., Dynamics of a virtual cathode oscillator driven by a pinched diode, Phys. Fluids 29 no 11 (1986) 3873-3880.

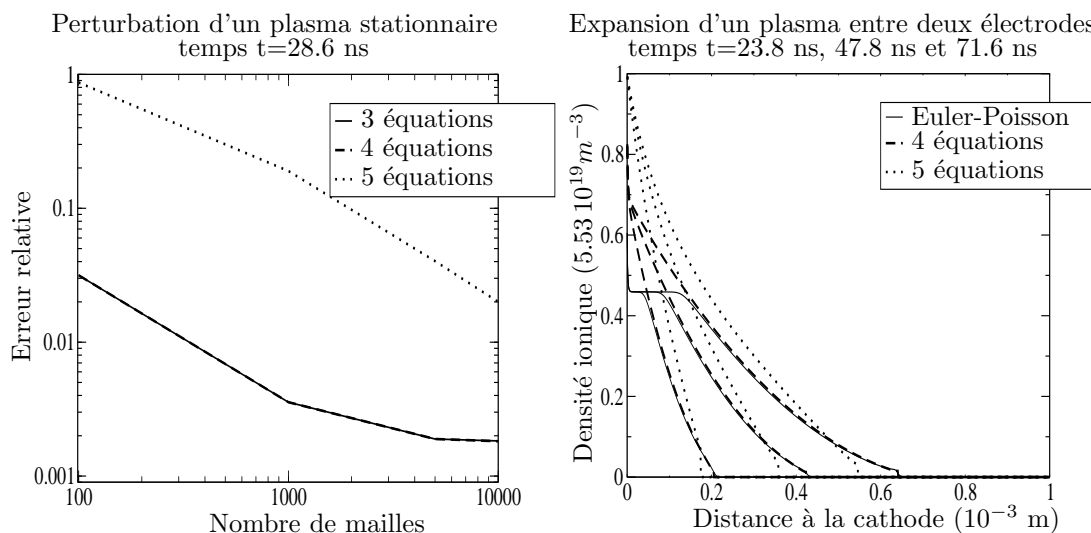


Figure 1: A gauche: cas-test de perturbation : écart relatif en norme l^2 entre la densité numérique et la densité analytique au temps $t = 28.6 ns$ (amplitude maximale de la perturbation). A droite: cas-test d'expansion de plasma : densité ionique en fonction de la distance à la cathode aux temps $t = 23.8 ns$, $47.8 ns$ et $71.6 ns$ via les formulations quasi-neutres à 4 et 5 équations (tirés et pointillés respectivement) et via Euler-Poisson (trait plein). Nombre de mailles: $N = 1000$ (pour le quasi-neutre), et $N = 2000$ (pour Euler-Poisson). La formulation à 3 équations donne des résultats identiques à la formulation à 4 équations pour $t = 23.8 ns$ et $t = 47.8 ns$, mais l'hyperbolicité est perdue avant l'instant $t = 71.6 ns$.