Problèmes mathématiques de la mécanique/Mathematical Problems in Mechanics

Existence et unicité de solutions entropiques pour un système de type Fokker-Planck-Burgers modélisant un écoulement diphasique dispersé unidimensionnel

Komla DOMELEVO et Marie-Hélène VIGNAL

Université Paul Sabatier, Laboratoire MIP. UMR CNRS 5674.
118 route de Narbonne. 31064 Toulouse cedex 4. FRANCE.

Résumé. On s'intéresse ici aux solutions d'une modélisation cinétique simple d'un écoulement diphasique unidimensionnel. Le gaz est décrit par une équation de conservation à flux $\mathcal{C}^1$ avec viscosité. La phase dispersée obéit à une équation cinétique de transport-diffusion de type Fokker-Planck linéaire. Le problème comporte donc deux paramètres de viscosités cinématiques - la viscosité cinématique classique du gaz et celle traduisant la dispersion turbulente des particules. On montre l'existence et l'unicité de solutions faibles lorsque les deux viscosités ne sont pas toutes deux nulles. On étudie ensuite les problèmes limites obtenus lorsque les deux viscosités tendent vers zéro. On montre que ce problème limite admet une formulation entropique assurant l'unicité des solutions faibles correspondantes que l'on appellera donc solutions entropiques pour le système.

Existence and uniqueness of entropic solutions for a Fokker-Planck-Burgers system modelling a one-dimensional disperse two-phase flow.

Abstract. We study here the solutions to a simple kinetic modelling of one-dimensionnal two-phase flows. The gas obeys a conservation law with smooth $\mathcal{C}^1$ flux and diffusion term. The dispersed phase obeys a linear transport-diffusion kinetic equation of Fokker-Planck type. Therefore, the problem involves two kinematic viscosities. On the one hand, the usual kinematic viscosity of the gas flow, on the other hand that of the disperse phase accounting for the turbulent dispersion of the particles. The existence and uniqueness of solutions to that problem is first proved in the case where at least one of the two viscosity coefficients is positive. The vanishing viscosity limit for the problem obtained when the two viscosity coefficients tend to zero is studied. We prove that this limiting problem admits an entropic formulation which ensures the uniqueness of the corresponding solutions therefore called entropic solutions to the system.

Abridged English Version

1.- INTRODUCTION and MOTIVATION.

We are interested here in a simplified one-dimensional model of disperse two-phase flow. We consider a gas with constant density normalized to 1 and whose velocity $u(x,t)$ obeys in order to simplify the viscous Burgers' equation. All the results stated below are valid in the case of a general conservation law with smooth $\mathcal{C}^1$ flux. Then, the particles are described by a transport équation of Fokker-Planck type modelling the motion of particles in a turbulent gas flow. The unknown for the disperse phase is therefore the density $f(x,v,t)$ of particles in the phase space $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$. The problem for the system writes:

$$
(\mathcal{P}^{\epsilon,\eta}) \quad
\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t u^{\epsilon,\eta} + u^{\epsilon,\eta}\partial_x u^{\epsilon,\eta} - \epsilon \partial_{xx} u^{\epsilon,\eta} = \displaystyle\int_v f^{\epsilon,\eta}(v - u^{\epsilon,\eta})dv \\
u^{\epsilon,\eta}(x,0) = u_0(x)
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t f^{\epsilon,\eta} + v\partial_x f^{\epsilon,\eta} + \partial_v(f^{\epsilon,\eta}(u^{\epsilon,\eta} - v)) - \eta \partial_{vv} f^{\epsilon,\eta} = 0 \\
f^{\epsilon,\eta}(x,v,0) = f_0(x,v), \quad f_0 \geq 0 \text{ à support compact,}
\end{array} \right.
\end{array}
\tag{1}
$$

with $\epsilon > 0$ and $\eta > 0$. The diffusion term in the kinetic equation $f^{\epsilon,\eta}$ models the dispersion of particles due to the turbulent component of the gas flow field (voir [8, 2]). The source term in the equation for the gas u couples the latter equation to the particles dynamics and accounts for the local conservation of the momentum of the system.

This is therefore a toy model. In the papaer [5] a more general viscous flow for the gas is considered. Some mathematical models taking into account more general physical phenomenon are in [1]. The study of smooth solutions to the problem with only a gas viscosity is proposed in [4].

We study here the solutions to $(\mathcal{P}^{\epsilon,\eta})$ in the limits whereϵ and/or η tend to zero. We prove that in all the cases the vanishing viscosity limit for the problem is well defined in the sense that there exist a solution to these limiting problems. In the case where at least one of the two viscosities is positive, we obtain uniqueness by using classical regularizing properties of the heat kernel. Finally, we prove that the limiting problem where both viscotities tend to zero admits an entropic formulation, which allows us to prove the uniqueness of the solution to this limiting problem.

This study is therefore a first step towards the study of the convergence of classical numerical schemes involving particle methods for the disperse phase and for example finite volume schemes for the gas. Indeed, these numerical schemes naturally tackle the limiting problem with $\epsilon = \eta = 0$.

To summarize, we want to study the properties of the following diagram:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}^{\epsilon,\eta} & \xrightarrow{\epsilon\to 0} & \mathcal{P}^{0,\eta} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \eta\to 0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \eta\to 0} \\
\mathcal{P}^{\epsilon,0} & \xrightarrow{\epsilon\to 0} & \mathcal{P}^{0,0}
\end{array}$$

in which the entropic problems in the case $\epsilon = 0$ should be read as

$$(\mathcal{P}^{0,\eta}) \quad \begin{cases} \forall \phi \geq 0 \ \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[\times \mathbb{R}_x), \forall k \in \mathbb{R}, \\ \displaystyle\iint |u^{0,\eta} - k|(\partial_t \phi + \frac{1}{2}(u^{0,\eta}+k)\partial_x\phi)dxdt \geq \iiint sgn(u^{0,\eta}-k) f^{0,\eta}(v-u^{0,\eta})dxdvdt \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \|u^{0,\eta}(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t f^{0,\eta} + v\partial_x f^{0,\eta} + \partial_v(f^{0,\eta}(u^{0,\eta}-v)) - \eta\partial_{vv} f^{0,\eta} = 0 \\ f^{0,\eta}(x,v,0) = f_0(x,v), \quad f_0 \geq 0, \end{cases}$$

Problem $(\mathcal{P}^{\epsilon,0})$ is studied in [3].

1.- STATEMENT OF THE MAIN RESULTS.

Theorem 1 (Case $(\epsilon,\eta) > (0,0)$). Let $T > 0$ be given. Let u_0 in $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ and f_0 in $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ with compact support be given. For all $(\epsilon,\eta) > (0,0)$, problem $(\mathcal{P}^{\epsilon,\eta})$ has a unique solution $(u^{\epsilon,\eta}, f^{\epsilon,\eta})$ in $\mathcal{C}([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}_x) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x)) \times L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$

Theorem 2 (Existence in the case $(\epsilon,\eta) = (0,0)$). Let $(\epsilon_n,\eta_n) > (0,0)$ be a sequence tending to $(0,0)$ when n tends to infinity. Let u_0 in $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ and f_0 with compact support in $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ be given. Let $(u,f)^{\epsilon_n,\eta_n}$ be the corresponding solutions to problem $(\mathcal{P}^{\epsilon_n,\eta_n})$. Then there exists a subsequence still denoted $(u,f)^{\epsilon_n,\eta_n}$ converging weakly to a couple $(\tilde{u},\tilde{f})$ in $\mathcal{C}([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}_x) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x)) \times L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, and $(\tilde{u},\tilde{f})$ is a solution to problem $(\mathcal{P}^{0,0})$.

roof. We distinguish the two cases:

Case $\eta = 0$. In that case, it is possible to prove that the velocities of the particles are bounded. The essential remark is that the source term in the equation for $u^{\epsilon_n,0}$ involves only some moments of $f^{\epsilon_n,0}$ - the density $\int_v f^{\epsilon_n,0}dv$ and the momentum $\int_v f^{\epsilon_n,0}vdv$. But since the velocities of the particles are bounded and f_0 is compactly supported, then f has the same property so that its moment can be rewritten in the form $\int_v f^{\epsilon_n,0}\phi(v)dv$ where ϕ is a suitable smooth function with compact support. Thanks to the averaging lemmas (see e.g. [7]) it is therefore possible to extract a subsequence such that the corresponding first two moments converge strongly in $L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}_x))$. This ensures the strong convergence in the same space of the subsequence of $u^{\epsilon_n,0}$. This allows us to obtain the desired result.

Case $\eta > 0$. In that case, the support of f^n is no longer bounded. However, the total mass and momentum $\int_{|v|>V} f^n(v)\phi(v)dv$ of the tails of the subsequence f^n is exponentially small for large V uniformely with respect to ϵ_n and $\eta_n < 1$. As a consequence, up to a diagonal extraction of subsequences involving tail-truncated $f^n(v)$ approximate solutions it is possible to exhibit again a subsequence of moments converging strongly in $L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}_x))$. We then conclude as previously.

Theorem 3 (Uniqueness). The solution to problem $(\mathcal{P}^{0,0})$ is unique and depends continuously on the initial data. Namely, let (u,f) and (w,g) be two solutions of $(\mathcal{P}^{0,0})$ with initial conditions (u_0,f_0) and (w_0,g_0) respectively. We have

$$\begin{aligned}\forall t>0,\quad &\|(u-v)(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} + \left\|(f-g)(v-\tfrac{u+w}{2})\right\|_{L^1(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v)}\\ &\le \|u_0-v_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} + \left\|(f_0-g_0)(v-\tfrac{u_0+w_0}{2})\right\|_{L^1(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v)}\end{aligned}$$

Preuve. The above inequality obtains by using the classical Kruskov techniques (voir [6]) whose consequence is the estimate

$$\frac{d}{dt}\|(u-v)(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} + \frac{d}{dt}\left\|(f-g)(v-\frac{u+w}{2})\right\|_{L^1(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v)} \le 0$$

of which the result follows.

1.- INTRODUCTION et MOTIVATION.

Nous nous intéressons ici à une modélisation cinétique simplifiée d'écoulements diphasiques en une dimension d'espace. Nous considérons pour cela un gaz de densité massique constante normalisée à 1 et dont la vitesse $u(x,t)$ est décrite ici pour simplifier par l'équation de Burgers avec viscosité. D'autre part les particules sont décrites par une équation de transport de type Fokker-Planck modélisant le transport de gouttes soumises à la trainée de Stokes dans un écoulement gazeux turbulent. L'inconnue pour les particules est la densité de particules $f(x,v,t)$ dans l'espace des phases $\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v$. Le problème est posé sur $\mathbb{R}$ et prend la forme:

$$(\mathcal{P}^{\epsilon,\eta})\quad \begin{cases}\partial_t u^{\epsilon,\eta} + u^{\epsilon,\eta}\partial_x u^{\epsilon,\eta} - \epsilon\partial_{xx}u^{\epsilon,\eta} = \displaystyle\int_v f^{\epsilon,\eta}(v-u^{\epsilon,\eta})dv\\ u^{\epsilon,\eta}(x,0)=u_0(x)\end{cases}$$
$$\begin{cases}\partial_t f^{\epsilon,\eta} + v\partial_x f^{\epsilon,\eta} + \partial_v(f^{\epsilon,\eta}(u^{\epsilon,\eta}-v)) - \eta\partial_{vv}f^{\epsilon,\eta} = 0\\ f^{\epsilon,\eta}(x,v,0)=f_0(x,v),\quad f_0\ge 0 \text{ à support compact,}\end{cases} \tag{2}$$

avec $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$. Le terme de diffusion dans l'équation cinétique sur $f^{\epsilon,\eta}$ modélise la dispersion des particules due à la turbulence gazeuse (voir [8, 2]). Le terme source dans l'équation de Burgers réalise le couplage entre les deux phases et assure la conservation locale de la quantité de mouvement.

Il s'agit d'un modèle mathématique très simplifié. Tous les résultats qui suivent sont valables pour une loi de conservation pour le gaz à flux régulier. On trouvera dans l'article de K. Hamdache [5] une modélisation plus générale pour un gaz visqueux. Des modèles mathématiques prenant en compte des phénomènes physiques plus généraux que la trainée et la turbulence sont dans [1]. L'étude de solutions régulières pour le système avec diffusion uniquement dans l'équation de u est faite dans [4].

Nous étudions ici les solutions de $(\mathcal{P}^{\epsilon,\eta})$ dans les limites où ϵ et/ou η tendent vers zéro. Nous montrons dans tous les cas considérés que les limites visqueuses du problème sont bien définies dans le sens où nous avons existence de solutions faibles pour ces différents problèmes limites. Dans le cas où l'une au moins des viscosités est non nulle, l'unicité s'obtient de manière classique en utilisant les propriétés régularisantes de l'opérateur de la chaleur. Finalement, nous montrons que le problème limite avec deux viscosités nulles admet une formulation entropique ce qui assure l'unicité des solutions faibles correspondantes.

Cette étude est donc une première étape vers l'étude de la convergence des schémas numériques utilisant des méthodes particulaires pour la phase dispersée f et des méthodes de type volumes finis par exemple pour le gaz non visqueux puisque ces méthodes sont naturellement écrites dans la limite $\epsilon = \eta = 0$.

En résumé, il s'agit d'étudier les propriétés du diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}^{\epsilon,\eta} \arrow[r, "\epsilon\to 0"] \arrow[d, "\eta\to 0"'] & \mathcal{P}^{0,\eta} \arrow[d, "\eta\to 0"] \\ \mathcal{P}^{\epsilon,0} \arrow[r, "\epsilon\to 0"] & \mathcal{P}^{0,0} \end{tikzcd}$$

dans lequel les problèmes entropiques $\mathcal{P}^{\epsilon,\eta}$ pour $\epsilon = 0$ doivent être lus:

$$(\mathcal{P}^{0,\eta}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \phi \geq 0 \ \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[\times \mathbb{R}_x), \forall k \in \mathbb{R}, \\ \displaystyle\iint |u^{0,\eta} - k|(\partial_t \phi + \frac{1}{2}(u^{0,\eta} + k)\partial_x \phi) dxdt \geq \iiint sgn(u^{0,\eta} - k) f^{0,\eta}(v - u^{0,\eta}) dxdvdt \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \|u^{0,\eta}(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^{0,\eta} + v\partial_x f^{0,\eta} + \partial_v (f^{0,\eta}(u^{0,\eta} - v)) - \eta \partial_{vv} f^{0,\eta} = 0 \\ f^{0,\eta}(x,v,0) = f_0(x,v), \quad f_0 \geq 0, \end{array} \right.$$

Le problème $(\mathcal{P}^{\epsilon,0})$ est étudié dans [3].

2.- RESULTATS PRELIMINAIRES.

On a les estimations *a priori*

Lemme 1 (Cas $\eta = 0$) (Principe du maximum sur les vitesses).
Soient $T > 0$ donné, $V(f) \equiv \sup_{v\in suppf}\{|v|\}$, $V_{max} = max(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)}, V(f_0))$. Alors pour tout $0 \leq t \leq T$ on a

$$max(\|u^{\epsilon,0}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)}, V(f^{\epsilon,0}(t))) \leq V_{max}$$

Lemme 2 (Cas $\eta > 0$) (Principe du maximum sur les vitesses).
Soient $T > 0$ et $\eta_0 > 0$ donnés, $V(f) \equiv \sup_{v\in suppf}\{|v|\}$, $V_{max} = max(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)}, V(f_0))$. Alors pour tout $0 \leq t \leq T$ et tout $0 < \eta < \eta_0$ on a

$$\|u^{\epsilon,\eta}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq e^{K_0 t} V_{max}$$
$$\rho_p^{\epsilon,\eta}|u_p^{\epsilon,\eta}| \leq \rho_p^{\epsilon,\eta} e^{K_0 t} V_{max}$$

où K_0 est indépendante de $\eta < \eta_0$. D'autre part, on a pour tout $0 \leq t \leq T$ et tout $0 < \eta < \eta_0$ l'estimation sur les positions et vitesses des particules

$$\forall (x,v), \quad f(x,v,t) \leq C_0 e^{-\alpha_0(|x|+|v|)}$$

Lemme 3 (Principe du maximum sur $f^{\epsilon,\eta}$).
Si $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, alors pour tout $t \geq 0$ on a $\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v)} \leq e^t \|f_0\|_{L(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v)}$

3.- RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DANS LE CAS D'UNE VISCOSITE NON NULLE.

Nous donnons ici les résultats dans le cas où au moins l'une des deux viscosités ϵ ou η n'est pas nulle.

Théorème 1 (Cas $\epsilon > 0$, $\eta = 0$) (voir [3]). Soit $T > 0$ donné. Soient u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ et f_0 dans $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ une mesure bornée à support compact données. Pour tout $\epsilon > 0$, le problème $(\mathcal{P}^{\epsilon,0})$ admet une unique solution faible entropique $(u^{\epsilon,0}, f^{\epsilon,0})$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}_x)) \cap L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x)) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathcal{M}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$.

Preuve. La démonstration utilise une technique classique de point fixe utilisant le noyau de la chaleur pour traiter l'équation du gaz. La solution f est définie de manière unique dans $\mathcal{C}([0,T]; \mathcal{M}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ dès que les trajectoires des particules sont elle-mêmes bien définies. Pour cela, il suffit d'assurer que u est dans $L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x))$. Ceci s'obtient en utilisant les propriétés régularisantes du noyau de la chaleur.

Théorème 2 (Cas $\epsilon > 0$, $\eta > 0$). Soit $T > 0$ donné. Soient u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ et f_0 dans $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ une mesure bornée à support compact données. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\eta > 0$, le problème $(\mathcal{P}^{\epsilon,\eta})$ admet une unique solution faible $(u^{\epsilon,\eta}, f^{\epsilon,\eta})$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}_x)) \cap L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x)) \times \mathcal{C}([0,T]; \mathcal{M}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$.

Preuve. On utilise ici le Lemme 2 permettant de borner la vitesse u du gaz ainsi que la vitesse moyenne u_p des particules. Ceci permet de contrôler les termes non-linéaires du systême.

Finalement, dans le cas $\epsilon = 0$, on prend des fonctions f mesurables. Plus précisément:

Théorème 3 (Cas $\epsilon = 0$, $\eta > 0$). Soit $T > 0$ donné. Soient u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ et f_0 dans $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ à support compact données. Pour tout $\eta > 0$, le problème $(\mathcal{P}^{0,\eta})$ admet une unique solution faible entropique $(u^{0,\eta}, f^{0,\eta})$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}_x)) \cap L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x)) \times \mathcal{C}([0,T]; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$.

Preuve. La démonstration est en tout point semblable à la démonstration précédente à ceci près que l'on considère pour u la solution de la formulation entropique donnée en introduction.

4.- PASSAGE A LA LIMITE DES DEUX VISCOSITES NULLES.

Nous nous intéressons ici à l'existence et l'unicité de solutions pour le problème $(\mathcal{P}^{0,0})$ dans la limite où les deux paramètres ϵ et η tendent vers 0. Dans toute cette partie on se restreint au cas f_0 dans $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ à support compact.

Théorème 4 (Existence). Soient $(\epsilon_n, \eta_n) > (0,0)$ une suite tendant vers $(0,0)$ lorsque n tend vers l'infini. Soient u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ et f_0 dans $L^1_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ à support compact données. Soient $(u,f)^{\epsilon_n,\eta_n}$, les solutions correspondantes du problème $(\mathcal{P}^{\epsilon_n,\eta_n})$. Alors on peut extraire de cette famille de solutions un sous-suite renommée $(u,f)^{\epsilon_n,\eta_n}$ tendant faiblement vers $(\tilde{u}, \tilde{f})$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}_x) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x)) \times L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, et $(\tilde{u}, \tilde{f})$ est une solution faible de $(\mathcal{P}^{0,0})$.

Preuve. On distingue les deux cas:

Cas $\eta = 0$. Dans ce cas, on sait d'après le Lemme 1 que les vitesses des particules sont bornées. Le point essentiel est de remarquer que le terme de couplage dans l'équation pour $u^{\epsilon_n,0}$ ne fait intervenir que des moments de $f^{\epsilon_n,0}$ - la densité $\int_v f^{\epsilon_n,0} dv$ et la quantité de mouvement $\int_v f^{\epsilon_n,0} v dv$. Mais du fait que les vitesses des particules sont bornées, on peut borner le support de f de sorte que les moments de f sont de la forme $\int_v f^{\epsilon_n,0}\phi(v) dv$ avec ϕ une fonction appropriée régulière et à support compact. On en déduit à l'aide des lemmes de compacité (voir e.g. [7]) que l'on peut extraire une sous-suite pour laquelle les deux premiers moments de la suite f^n convergent fortement dans $L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}_x))$. Ceci assure alors la convergence forte dans le même espace de la suite extraite $u^{\epsilon_n,0}$. Ceci permet d'obtenir le résultat annoncé.

Cas $\eta > 0$. Dans ce cas, le support des f^n n'est plus borné. Toutefois, d'aprés le Lemme 2, la masse et la quantité de mouvement $\int_{|v|>V} f^n(v)\phi(v) dv$ des queues des fonctions $f^n(v)$ décroît exponentiellement vite lorsque V croît, uniformément par rapport aux paramètres ϵ_n et $\eta_n < 1$. Par conséquent, à une extraction diagonale près utilisant des troncatures de f on peut encore extraire une sous-suite de moments de f convergeant fortement dans $L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}_x))$. Et on conclut comme précédemment.

Théorème 5 (Unicité). La solution du problème ($\mathcal{P}^{0,0}$) est unique et dépend continûment de la consition initial. Plus précisément, soient (u, f) et (w, g) deux solutions de ($\mathcal{P}^{0,0}$) avec conditions initiales (u_0, f_0) and (w_0, g_0) respectivement. Nous avons l'estimation

$$\begin{aligned}\forall t > 0, \quad & \|(u-v)(t)\|_{L^1(\mathbf{R}_x)} + \left\|(f-g)(v - \tfrac{u+w}{2})\right\|_{L^1(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_v)} \\ & \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbf{R}_x)} + \left\|(f_0 - g_0)(v - \tfrac{u_0+w_0}{2})\right\|_{L^1(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_v)}\end{aligned}$$

Preuve. L'inégalité ci-dessus s'obtient en utilisant les techniques classiques de Kruskov (voir [6]) qui permettent de montrer que

$$\frac{d}{dt}\|(u-v)(t)\|_{L^1(\mathbf{R}_x)} + \frac{d}{dt}\left\|(f-g)(v - \frac{u+w}{2})\right\|_{L^1(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_v)} \leq 0$$

Le résultat s'ensuit.

Références

[1] P. Berthonnaud. Thèse de l'Université Paul Sabatier. En préparation.

[2] J.-F. Clouet et K. Domelevo. Solution of a kinetic stochastic equation modeling a spray in a turbulent gas flow. *Math. Mod. Meth. Applied Sciences*, 2(7) 1997.

[3] K. Domelevo. Long time behaviour for a kinetic modelling of two-phase flows with thin polydisperse sprays. *Rapport Interne n°99-21.* Laboratoire MIP. Université Paul Sabatier. Toulouse. FRANCE. (1999).

[4] K. Domelevo et J.-M. Roquejoffre. Existence and Stability of Travelling Waves solutions in a kinetic modelling of two-phase flow. *Comm. Part. Diff. Eq., 24(1&2)*, 61-108 (1999).

[5] K. Hamdache. Global Existence and Large time Behaviour of Solutions for the Vlasov-Stokes Equations. *Prépublications de l'Université Paris-Nord.* Mars 1997.

[6] L. Hörmander. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations* Collection Mathématiques et Applications. Springer (1997).

[7] R.J. Diperna, P.-L. Lions and Y. Meyer. L^p regularity of velocity averages. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 8, n°3-4, 1991, p. 271-287. Analyse non linéaire.

[8] M.W. Reeks. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Phys. Fluids A*, 3(3), March 1991.