Chapitre 2 : Théorie spectrale des problèmes elliptiques linéaires d'ordre 2.

I Introduction.

1°) Qu'est ce que la théorie spectrale des problèmes elliptiques

En dimension finie, $E = \mathbb{R}^n$, on considère une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Le problème spectral consiste à déterminer les valeurs et vecteurs propres de la matrice A, c'est à dire.

Trouver $(\lambda, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que $V \neq 0$ et
$$AV = \lambda V$$

En dimension infinie $E = H_0^1(\Omega)$, Ω borné, c'est la même chose, on considère un opérateur elliptique linéaire d'ordre 2. général donné par (1.1) et noté $\mathcal{L}$. Le problème spectral consiste à déterminer les valeurs et vecteurs propres de $\mathcal{L}$, c'est à dire.

$$(2.0) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que } u \neq 0 \text{ et} \\ \mathcal{L}u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

2°) Pourquoi la théorie spectrale des problèmes elliptiques.

Ici, on s'interesse à cette théorie pour résoudre les problèmes paraboliques linéaires. Nous allons voir sur un exemple simple pourquoi cette théorie va nous être utile.

On considère l'équation de chaleur en une dimension d'espace mais cette fois sur un domaine borné. On doit donc rajouter des conditions aux limites à la condition initiale pour que le problème soit bien posé, par exemple des conditions de Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0, \ \forall (x,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}^+ & (2.1) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0,1[. & (2.2) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t > 0. & (2.3) \end{cases}$$

où u_0 est une fonction donnée dont on ne précise pas la régularité.

On cherche des solutions de ce problème sous la forme.

$$u(x,t) = w(x)\varphi(t).$$

En injectant dans (2.1), on obtient.

$$\varphi'(t)\, w(x) - w''(x)\,\varphi(t) = 0 \quad , \forall x \in]0,1[, \forall t > 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} \quad (\text{si } u > 0), \ \forall x \in]0,1[, \forall t > 0.$$

et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que.

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)} \quad \forall x \in]0,1[, \ \forall t > 0.$$

On introduit alors le problème spectral.

Trouver (λ, w) tel que.

$$-w''(x) = \lambda\, w(x) \quad , \forall x \in]0,1[.$$
$$w(0) = w(1) = 0$$

Si ce problème admet une solution alors φ est solution de

$$\varphi'(t) = -\lambda \varphi(t) \iff \varphi(t) = C e^{-\lambda t}.$$

Nous verrons par la suite comment construire la solution pour qu'elle vérifie la condition initiale (2.2).

II Théorie spectrale des opérateurs compacts

Dans ce paragraphe, H désigne un espace de Hilbert réel et on note $(\cdot,\cdot)_H$ son produit scalaire et $\|\cdot\|_H$ la norme associée.

1°) Rappel sur les espaces de Hilbert

Je rappelle tout d'abord quelques notions de base importantes sur les espaces de Hilbert.

Définition 2.1: Soit $K \subset H$ alors on dit

1) K est compact si de toute suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset K$, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.
2) K est relativement compact (dans H) si de toute suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset K$ on peut extraire une sous-suite convergente dans H.

Définition 2.2: Soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire et continu, on notera $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est un opérateur compact si l'image par T de la boule unité de H est relativement compacte dans H, c'est à dire si

$T(B_H(0,1))$ est relativement compacte dans H,

avec $B_H(0,1) = \{u \in H;\ \|u\|_H \leq 1\}$.

Exemple: On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, borné et régulier

On définit $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$
$$f \longmapsto u$$
où u est la solution variationnelle (ou faible) du problème.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (2.4)$$

où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω. T est clairement linéaire et d'après la première partie du cours on sait que $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{et} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \qquad (2.5)$$

où C ne dépend que de Ω.

Ainsi $\quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|Tf\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2}$

donc T est continue.

De plus si $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^2(\Omega)$ est telle que

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 1, \quad \forall n \geq 0,$$

alors $\forall n \geq 0$.

$$\|Tf_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \quad \text{d'après } (2.5).$$

D'après le théorème de Rellich, on sait qu'il existe une sous-suite $(Tf_{n_k})_{k\geq 0}$ et $u \in L^2(\Omega)$ tel que

$$Tf_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u.$$

donc (f_n) bornée dans $L^2(\Omega) \Rightarrow (Tf_n)$ relativement compacte dans $L^2(\Omega)$.

Donc T est compact.

<u>Remarque</u>: 1) $T : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ est encore compact, d'après les
$f \longmapsto u$ solution de (2.4) résultats de régularité

2) En dimension finie, toute application linéaire est continue et compacte mais ce résultat est faux en dimension infinie.
En effet, on considère $I : H \longrightarrow H$, $u \longmapsto u$. I est clairement linéaire

et continue, par contre I n'est pas compact comme le montre le résultat suivant.

<u>Théorème 2.1</u>: Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas compacte.

<u>Preuve:</u> (Riesz) voir livre de H. Brezis, "Analyse fonctionnelle Théorie et applications", Masson. (Théorème VI.5 page 92).

<u>Définition 2.3</u>: Soit $T : H \longrightarrow H$ linéaire et continue, on dit que T est un opérateur symétrique ou que T est un opérateur auto-adjoint si

$$\forall u, v \in H, \quad (Tu, v)_H = (u, Tv)_H.$$

<u>Définition 2.4</u>: On appelle base Hilbertienne de H une suite $(e_n)_{n \geq 0} \subset H$ telle que.

1°) $\|e_n\|_H = 1$, $\forall n \geq 0$ et $(e_m, e_n) = 0$, $\forall m, n \geq 0$ avec $m \neq n$

2°) L'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n \geq 0}$, noté $\mathrm{Vect}\{(e_n)_{n\geq 0}\}$, est dense dans H.

C'est à dire que $\forall u \in H$, $\exists (u_k)_{k \geq 0}$ telle que. $u_k \in \mathrm{Vect}\{(e_n)_{n \geq 0}\}$ $\forall k \geq 0$ et $u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} u$ dans H.

On rappelle que

$$\mathrm{Vect}\{(e_n)_{n \geq 0}\} = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \; ; \; I \subset \mathbb{N}, \text{cardinal}(I) < +\infty \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R} \; \forall i \in I \right\}$$

On a le résultat suivant

Lemme 2.1: Si $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base Hilbertienne de H alors $\forall u \in H$, on a

$$u = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} (u, e_n)_H \, e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (u, e_n)_H \, e_n.$$

Preuve: voir Brézis pages 85, 86.

2°) Notations et définitions:

Dans ce paragraphe T désigne un opérateur de $\mathcal{L}(H)$.

Définition 2.5: On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T s'il existe $u \in H$, $u \neq 0$, tel que $Tu = \lambda u$, le vecteur u est alors appelé vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.

Définition 2.6: On appelle spectre de T, noté $sp(T)$, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \rho(T)$, où $\rho(T)$ est l'ensemble résolvant de T défini par

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} ;\ T - \lambda I \text{ est bijectif}\}.$$

où $$I : \begin{array}{l} H \longrightarrow H \\ u \longmapsto u. \end{array}$$

Remarque: Si on note $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T alors on a $VP(T) \subset sp(T)$, en effet si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T alors il existe $u \neq 0$, tel que $Tu = \lambda u$ $\iff (T - \lambda I)u = 0$ et donc le noyau de $T - \lambda I$, noté $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$ et donc $T - \lambda I$ n'est pas injectif donc pas bijectif $\Rightarrow \lambda \in sp(T)$.

En dimension finie, on a égalité; En effet

(dim $H < +\infty$) $T - \lambda I$ pas bijectif $\Leftrightarrow$ $T - \lambda I$ pas injectif $\Leftrightarrow$ $T - \lambda I$ pas surjectif.

et donc si $\lambda \in sp(T)$ alors $T - \lambda I$ pas injectif $\Rightarrow$ $\lambda \in VP(T)$.

En dimension infinie ce n'est pas vrai en général il peut exister $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que.

$$\ker(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}(T - \lambda I) \neq H.$$

où $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ est l'image de $T - \lambda I$.

On a donc $T - \lambda I$ injectif et $T - \lambda I$ pas surjectif.

3°) Décomposition spectrale d'un opérateur compact symétrique.

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant:

Théorème 2.2: Soit H un espace de Hilbert séparable. (i.e il existe un sous ensemble $D \subset H$ dénombrable et dense) de dimension infinie, on considère $T : H \to H$ linéaire, continu, compact, symétrique et positif, c'est à dire tel que

$$(Tu, u)_H > 0, \quad \forall u \in H \setminus \{0\}.$$

Alors les valeurs propres de T forment une suite décroissante $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs, qui tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini; De plus il existe une base Hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de H formée de vecteurs propres de T, avec

$$T e_k = \lambda_k e_k, \quad \forall k > 0.$$

Remarque: Ce résultat généralise un résultat bien connu en dimension finie: une matrice symétrique définie positive est diagonalisable dans une base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Preuve: à écrire .....

III Valeurs propres d'un opérateur elliptique

Nous allons utiliser les résultats généraux du paragraphe II pour résoudre des problèmes du type (2.0), c'est à dire trouver les valeurs propres d'un opérateur elliptique.

Je commence, comme d'habitude, par un exemple simple qui va nous permettre de fixer un cadre général.

1°) Un exemple simple:

On considère le problème suivant; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ouvert borné régulier, et on s'intéresse à

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mu, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\Omega) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ -\Delta u = \mu u \text{ dans } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (\mu, u) \in \mathbb{R} \times H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ a(u, v) = (\mu u, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

avec $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et

$$(2.6) \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx, \quad \forall u, v \in H^1_0(\Omega)$$

On définit

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$f \longmapsto u \text{ solution de } (2.7)$$

où (2.7) est le problème

$$(2.7) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

$a(\cdot,\cdot)$ étant définie par (2.6).

Nous avons déjà vu dans la partie I que a est bilinéaire, continue et coercive (et même symétrique) et que donc d'après le théorème de Lax - Milgram, il existe une unique solution à (2.7). Puisque de plus $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, T définit bien un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

On a vu également dans la partie I que la solution de (2.7) vérifie.

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω.

Ainsi

$$\|Tf\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Tf\|_{H^1(\Omega)} \leq C.\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et T est continue, T est clairement linéaire.

Nous avons déjà vu dans cette partie que parce que $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega)$, T est un opérateur compact.

En posant $H = L^2(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert séparable, T est symétrique car $a(\cdot,\cdot)$ l'est et T est positif, en effet.

$$a(Tf, v) = \int_\Omega f \cdot v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit $v = Tf$, on obtient

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f\,Tf = a(Tf, Tf) > 0$$ d'après la coercivité de a.

Ainsi, on peut appliquer le Théorème 2.2. et on sait qu'il existe $((\lambda_k, e_k))_{k>0}$ telle que (entre autre) $Te_k = \lambda_k e_k$. $\forall k > 0$

Mais Te_k est la solution faible de

$$-\Delta(Te_k) = e_k \quad \Longleftrightarrow \quad a(Te_k, v) = (e_k, v)_{L^2(\Omega)} \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donc.

$$-\Delta(Te_k) = e_k = -\Delta(\lambda_k e_k) \quad \Longleftrightarrow \quad a(Te_k, v) = a(\lambda_k e_k, v) = (e_k, v)_{L^2}$$
$$= \lambda_k(-\Delta e_k) \qquad\qquad = \lambda_k a(e_k, v).$$

et ainsi puisque $\lambda_k > 0$

$$-\Delta e_k = \frac{1}{\lambda_k} e_k \quad \Longleftrightarrow \quad a(e_k, v) = \frac{1}{\lambda_k}(e_k, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Les valeurs propres du laplacien sont donc les $\frac{1}{\lambda_k}$, $k > 0$.

2°) Cadre général.

On démontre dans ce paragraphe le résultat général suivant:

Théorème 2.3: Soient V et H deux espaces de Hilbert réels de dimension infinie, on suppose que V s'injecte dans H de manière compacte et que V est dense dans H. On considère a une forme bilinéaire, continue, symétrique et coercive sur V et le problème aux valeurs propres suivants.

$$(2.8)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } u \in V \setminus \{0\} \text{ tel que.} \\ a(u, v) = \mu\,(u, v)_H, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Alors les valeurs propres solutions de (2.8) forment une suite croissante $(\mu_k)_{k>0}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ et il existe une base Hilbertienne $(e_k)_{k>0}$ de H telle que

$$a(e_k, v) = \mu_k (e_k, v)_H, \ \forall v \in V, \ \forall k > 0$$

De plus, $(\mu_k^{-1/2} e_k)_{k>0}$ est une base Hilbertienne orthonormée de

$\lfloor$ V pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$..

<u>Preuve:</u>

$\forall f \in H$, on introduit le problème variationnel.

$$(2.9)\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = (f,v)_H, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

$$L : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto (f,v)_H$$
est linéaire et continue car.

$$(f,v)_H \leq \|f\|_H \; \|v\|_H \leq C_0 \|f\|_H \; \|v\|_V \quad \text{car } V \subset H.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, la solution de (2.9) existe et est unique dans V et donc dans H puisque $V \subset H$.

De plus.

$$(2.10) \quad \|u\|_V \leq C_1 \|f\|_H$$

où C_1 ne dépend que de V et H.

On introduit $T : H \longrightarrow H$.

$$f \longmapsto u \text{ solution de } (2.9).$$

T est linéaire, continue car.

$$\|Tf\|_H \leq C_0 \|Tf\|_V \leq C_0 C_1 \|f\|_H.$$

$\forall f, g \in H$, on a

$$a(Tf,v) = (f,v)_H \quad \text{et} \quad a(Tg,v) = (g,v)_H \quad \forall v \in H.$$

en particulier.

$$a(Tf,Tg) = (f,Tg)_H \quad \text{et} \quad a(Tg,Tf) = (g,Tf)_H.$$

a étant symétrique, on obtient.

$(f,Tg) = (g,Tf)$. et donc T est symétrique.

T est positif, $\forall f \in H$.

$$(Tf, f)_H = a(Tf, Tf) > 0 \text{ car } a \text{ est coercif.}$$

Enfin T est compact., en effet soit une suite $(f_n)_{n \geq 0} \subset H$. telle que $\|f_n\|_H \leq 1 \quad \forall n \geq 0$, alors.

d'après (2.10) on a.

$$\|Tf_n\|_V \leq C_1. \quad \forall n \geq 0.$$

Mais $V \subset H$ de manière compacte, donc une sous suite $(Tf_{n_k})_{k \geq 0}$ et il existe $u \in H$ tel que. $Tf_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u$ dans H.

Ce qui montre que T est compact.

Alors d'après le théorème 2.2., il existe une suite $(\lambda_k)_{k>0}$. de réels strictement positifs et il existe une base Hilbertienne $(e_k)_{k>0}$ de H telle que.

$$T e_k = \lambda_k e_k, \quad \forall k > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} \lambda_k = 0.$$

On obtient alors.

$$a(Te_k, v) = a(\lambda_k e_k, v) = \lambda_k\, a(e_k, v), \quad \forall v \in V.$$

et par définition de T.

$$a(Te_k, v) = (e_k, v)_H, \quad \forall v \in V.$$

Ainsi

$$\lambda_k\, a(e_k, v) = (e_k, v)_H, \quad \forall v \in V, \quad \forall k > 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad a(e_k, v) = \frac{1}{\lambda_k}(e_k, v)_H, \quad \forall v \in V, \ \forall k > 0.$$

On pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k} > 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu_k = +\infty$.

Il reste à montrer que $(\mu_k^{-1/2} e_k)_{k>0}$ est une base Hilbertienne orthonormée de V pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$

a est bilinéaire, symétrique et coercive donc définie positive, ainsi a est clairement un produit scalaire sur V.

De plus, $\forall u \in V$.

$$C_2 \|u\|_V \leq \sqrt{a(u,u)} \leq C_3 \|u\|_V$$ car a est coercive et continue

donc la norme associée à a est équivalente à $\|\cdot\|_V$, ainsi V muni de a est un espace de Hilbert.

Puisque (e_k) est une base Hilbertienne de V, on a.

$$\forall u \in V, \quad u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k)_V \, e_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_k} a(e_k, u) e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a\left(\frac{e_k}{\sqrt{\mu_k}}, u\right) \frac{e_k}{\sqrt{\mu_k}}.$$

Ce qui montre bien le résultat attendu.