Partie II : Equations paraboliques linéaires. M H Vignal (1)

Chapitre 1 : Introduction et exemple simple.

I Forme générale

On considère Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et $\mathcal{L}$ un opérateur elliptique linéaire d'ordre 2 symétrique donné par

$$(1.1) \quad \mathcal{L}u(x) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u(x)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $a_0, a_{ij} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\forall i,j = 1$ à n. vérifient :

$$(1.2) \quad \cdot\ a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i,j = 1 \text{ à } n.$$

$$(1.3) \begin{cases} \cdot\ \exists\ \alpha > 0 \text{ telle que} \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 . \end{cases}$$

pour presque tout $x \in \Omega$ et $\forall\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors, la forme générale des équations paraboliques que nous allons étudier est

$$(1.4) \begin{cases} u_t(x,t) + \mathcal{L}u(x,t) = f(x,t), & \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \Omega . \end{cases}$$

Généralement, t est le temps et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est la variable d'espace. Les fonctions f et u_0 sont données et la condition $u(x,0) = u_0(x)$ s'appelle la condition initiale.

Remarque : 1°) La condition (1.3) est la condition d'ellipticité ou de coercivité et la condition (1.2) est la condition de symétrie.

2°) Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, on doit spécifier des conditions aux limites sur le bord de Ω, $\partial\Omega$, pour tout temps $t \geq 0$ afin que le problème soit bien posé. Par exemple, on peut fixer des conditions de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$, c'est à dire.

$$u(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ .$$

L'exemple le plus classique d'équation parabolique linéaire est l'équation de la chaleur donnée par :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(t=0) = u_0, & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Ces équations décrivent l'évolution au cours du temps t, de la température u d'un milieu Ω homogène soumis à une source de chaleur f lorsque les constantes physiques sont prises égales à 1 et lorsque la température initiale est donnée par u_0. Ceci explique l'appellation équation de la chaleur.

II Un exemple simple

Comme pour les équations elliptiques, on commence par étudier un exemple très simple en dimension une afin de comprendre les propriétés caractéristiques des équations paraboliques linéaires.

On considère l'équation.

$$(1.5) \begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

où u_0 est une fonction donnée de $L^1(\mathbb{R})$.
Nous allons résoudre explicitement le problème (1.5), en utilisant la transformée de Fourier.

1°) Propriétés élémentaires de la transformée de Fourier.

$\forall u \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de u, notée $\mathcal{F}u$, par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx \, , \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{F}$ s'étend par densité en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ (application linéaire bijective) dans lui même dont l'inverse est donné par.

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(\xi) \, e^{ix\xi} d\xi, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On utilisera de plus les propriétés suivantes

$$\mathcal{F}(u') = i\xi \mathcal{F}(u),$$

$$(1.6) \quad \mathcal{F}^{-1}(\xi \longmapsto e^{-|\xi|^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \ \forall t > 0,$$

$$(1.7) \quad \mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) \times \mathcal{F}(v),$$

où $u*v$ est la convolution de u et v définie par

$$u*v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y) v(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} u(y) v(x-y) \, dy,$$

$\forall u \in L^1(\mathbb{R})$ et v dans $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.

Pour plus de détails sur la transformée de Fourier, consultez : W. Rudin, "Analyse réelle et complexe", Masson.

2°) Résolution explicite de (1.5)

Théorème 1.1: Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ alors il existe une unique solution $u \in C^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (1.5) donnée par

$$u(x,t) = \big(E(\cdot,t) * u_0\big)(x), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \qquad (1.8)$$

où

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}\times]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Preuve:

On applique la transformée de Fourier à l'équation (1.5), attention c'est une transformée de Fourier partielle n'agissant que sur la variable d'espace x et pas sur le temps t.

On obtient alors.

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{F}_1(u)(\xi,t) + |\xi|^2 \mathcal{F}_1(u)(\xi,t) = 0, \\ \mathcal{F}_1(u)(\xi,0) = \mathcal{F}_1(u_0)(\xi). \end{cases}$$

On est donc ramené à résoudre une équation différentielle en t dont la solution est

$$\mathcal{F}_1(u)(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t}\, \mathcal{F}_1(u_0)(\xi).$$

Il reste à prendre la transformée de Fourier inverse.

Tout d'abord remarquons que d'après (1.5).

$$\begin{aligned} e^{-|\xi|^2 t}\, \mathcal{F}_1(u_0)(\xi) &= \mathcal{F}_1\left(x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}}\right)(\xi)\, \mathcal{F}_1(u_0)(\xi), \\ &= \mathcal{F}\big(x \longmapsto E(x,t) * u_0(x)\big), \end{aligned}$$

d'après (1.7) et où E est donné par (1.9).

Alors en appliquant $\mathcal{F}_1^{-1}$, on obtient (1.8)

$E \in C^\infty(]0,+\infty\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in C^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$.

<u>Remarque :</u> On peut remarquer que u n'est pas défini en 0, et donc on ne sait pas en quel sens est vérifié la condition initiale

$$\text{"} u(x,0) = u_0(x) \text{"}$$

On va montrer que $\lim_{t \to 0} u(\cdot,t) = u_0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

<u>Lemme 1.1 :</u> Soit u la fonction donnée par (1.8), (1.9) alors on définit, $\forall t > 0$.

$$u(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto u(x,t)$$

alors $u(t) \xrightarrow[t \to 0]{} u_0$ dans $L^1(\mathbb{R})$

<u>Preuve :</u> $\forall t > 0$

$$\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |E(x,t) * u_0(x) - u_0(x)| \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} E(y,t) \, u_0(x-y) \, dy - u_0(x) \right| dx$$

Mais $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} E(y,t) \, dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$

en utilisant le changement de variables $y \longmapsto u = \dfrac{y}{\sqrt{4t}}$

$$\text{Mais} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \right)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

$$\overset{\text{polaire}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \, d\theta = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} E(y,t) \, dy = 1$.

donc

$$\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} E(y,t) \, (u_0(x-y) - u_0(x)) \, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E(y,t) \, |u_0(x-y) - u_0(x)| \, dy \, dx$$

3°) Propriétés caractéristiques des solutions d'équations paraboliques

De l'expression analytique (1.8) de la solution de l'équation de la chaleur en dimension une : (1.5), on tire plusieurs propriétés qui sont caractéristiques des solutions d'équations paraboliques.

On a déjà démontré en établissant le théorème 1.1 que :

<u>Propriété 1</u>: Les équations paraboliques sont régularisantes, en effet $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall t>0$.

<u>Propriété 2</u>: Si $u_0 \leq 0$ p.p. dans $\mathbb{R}$ alors $u(x,t) \leq 0, \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

On retrouve le principe du maximum faible comme dans le cas des équations elliptiques.

<u>Propriété 3</u>: Si u_0 est telle que $\operatorname{supp}(u_0) \subset [x_0, x_0+\varepsilon]$ et $u_0<0$ sur $]x_0, x_0+\varepsilon[$ alors $u(x,t)<0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall t>0$.

<u>Remarque</u>: On parle de propagation à vitesse infinie du support puisque dès que $t>0$, les bornes du support de u_0 sont instantanément envoyées à l'infini $\longrightarrow$

<u>Preuve</u>: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t>0, \ u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} E(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$

$$= \int_{x_0}^{x_0-\varepsilon} E(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$$

Mais $\forall z \in \mathbb{R}, \ E(z)>0$, donc $u(x,t)>0$.

<u>Propriété 3</u>: Il y a conservation de la masse au cours du temps, c'est à dire que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx, \quad \forall t>0.$$

<u>Preuve</u>:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} E(y,t)\,u_0(x-y)\,dy\,dx.$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} E(y,t)\int_{\mathbb{R}} u_0(x-y)\,dx\,dy.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} E(y,t)\int_{\mathbb{R}} u_0(z)\,dz\,dy.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} E(y,t)\int_{\mathbb{R}} u_0(z)\,dz.$$

Mais on a déjà vu dans la démonstration du lemme 1.1 que $\int_{\mathbb{R}} E(y,t) = 1,\ \forall t>0$.

<u>Bilan</u>: On retiendra qu'une équation parabolique linéaire.

- admet une unique solution.
- est régularisante.
- vérifie un principe du maximum.
- propage l'information à vitesse infinie
- conserve la masse de la quantité transportée

Le but de cette partie est d'étendre ces résultats pour des équations paraboliques linéaires générales.

Je termine ce paragraphe avec quelques remarques sur E qui est aussi appelé solution élémentaire de l'équation de la chaleur. pour la culture générale....

4°) Solution élémentaire de l'équation de la chaleur.

Il n'est pas nécessaire que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ pour donner un sens à $E(\cdot,t) * u_0$ pour tout $t>0$, puisque. $E(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R})$

En effet si u_0 est une distribution à support compact, c'est à on pose $u = \dfrac{y}{\sqrt{4t}} \Rightarrow y = \sqrt{4t}\, u$, alors.

$$\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \left| u_0(x - \sqrt{4t}\,u) - u_0(x) \right| du\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| u_0(x - \sqrt{4t}\,u) - u_0(x) \right| dx\, du.$$

$u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\exists\, (\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u_0 \text{ dans } L^1(\mathbb{R}).$$

donc

$x \mapsto y = x - \sqrt{4t}\,u$.

$$\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| u_0(x - \sqrt{4t}\,u) - \varphi_n(x - \sqrt{4t}\,u) \right| dx\, du$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi_n(x - \sqrt{4t}\,u) - \varphi_n(x) \right| dx\, du.$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi_n(x) - u_0(x) \right| dx\, du.$$

$$= 2\, \|\varphi_n - u_0\|_{L^1} \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}\, du}^{=1}$$

$$+ \|\varphi_n'\| \sqrt{4t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} |u|\, du}_{M < +\infty}.$$

On passe à la limite d'abord sur t puis sur n, on obtient

$$\lim_{t \to 0} \|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 1.1.

dire s'il existe Ω borné tel que $u_{/\mathbb{R}^d \setminus \Omega} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$.

C'est le cas, par exemple, pour la masse de Dirac $u_0 = \delta_0$.

On a alors, $\forall t > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\left(E(\cdot, t) * u_0\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} E(x-y, t)\, \delta_0(y)\, dy$$
$$= E(x, t).$$

E est donc la solution de $\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(t=0) = \delta_0 \end{cases}$.

C'est pour cela que E est appelé la solution élémentaire de l'équation de la chaleur.
On montre alors que la condition initiale est vérifiée de la manière suivante

Lemme 1.2:

$$\lim_{t \to 0^+} E(\cdot, t) = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Preuve: On doit montrer que $\forall \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} E(x,t)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Soit $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, et $t > 0$,

$$I = \left| \int_{\mathbb{R}} E(x,t)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} E(x,t)\, (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx \right|$$

car $\int_{\mathbb{R}} E(x,t)\, dx = 1$, $\forall t > 0$ (voir preuve du Lemme 1.1).

et donc, en utilisant Taylor-Lagrange, $\exists\, c(x) \in]0, x[$ tel que.

$$0 \leq I = \left| \int_{\mathbb{R}} E(x,t) \left(\varphi'(0)\, x + \varphi''(c_x) \frac{x^2}{2}\right) dx \right|$$

Mais $\int_{\mathbb{R}} E(x,t)\, \varphi'(0)\, x\, dx = 0$ car $\forall t>0$, $x \longmapsto x\, E(x,t)$ est impaire.

donc

$$0 \leq I \leq \int_{\mathbb{R}} E(x,t)\, \frac{x^2}{2}\, |\varphi''(c_x)|\, dx$$

$$\leq \|\varphi''\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\, \frac{x^2}{2}\, dx$$

on utilise le changement de variables $x \longmapsto u = \frac{x}{\sqrt{4t}}$, on a

$$0 \leq I \leq \|\varphi''\|_\infty \int_{\mathbb{R}} 2t\, u^2\, e^{-u^2}\, du$$

$$= \|\varphi''\|_\infty\, 2t \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2}\, du}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

exercice. (il faut intégrer par partie pour se ramener à $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du$).

<u>Remarque</u>: On peut généraliser ces résultats en dimension supérieur à un, nous le ferons en exercice.