Chapitre 4: Approximation des problèmes elliptiques.

Dans tout ce chapitre, on considère le problème suivant :

$$(4.1)\quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(A(x)\ \nabla u(x)\right) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$ est donnée et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in (L^\infty(\Omega))^{n^2}$ est symétrique définie positive, c'est à dire

$\exists\, \alpha > 0$ telle que $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$A(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_j\, \xi_i \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Remarque: D'après le chapitre 3, on sait qu'il existe une unique solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$. Elle satisfait

$$(4.2)\qquad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

avec

$$(4.3)\quad a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

$$(4.4)\ \text{et}\quad L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

Le but de ce chapitre est de trouver une approximation de la solution u.

I Introduction : un exemple simple

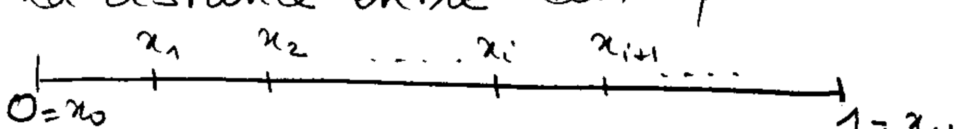
On se place dans le cas où $\Omega =]0,1[$ et $A(x) \equiv 1$, le problème (4.1) devient :

$$(4.5) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir une approximation de u, on commence par chercher une collection finie et pertinente de valeurs (ou d'approximations de valeurs) de la solution exacte.

Ici par exemple, on se donne un maillage uniforme de $]0,1[$, c'est à dire une collection de $N+1$ points $\{x_i,\ i = 0, \dots, N\}$ avec

$x_i = i\,\Delta x = \frac{i}{N}$, $\Delta x = \frac{1}{N}$ est appelé le pas d'espace, c'est la distance entre deux points consécutifs.



On cherche alors à obtenir une approximation de u aux points x_i que l'on note $u_i \simeq u(x_i)$.

Remarquons que puisque $u(0) = u(1) = 0$, on connait déjà. $u_0 = u_N = 0$.

Il reste à déterminer $(u_1, \dots, u_{N-1})$ valeurs "proches" de $\left(u\left(\frac{1}{N}\right), u\left(\frac{2}{N}\right), \dots, u\left(\frac{N-1}{N}\right)\right)$ sans connaître u bien sûr !

Il existe trois grandes catégories de méthodes : les méthodes de type

- différences finies.
- volumes finis
- éléments finis.

Nous allons voir sur cet exemple simple, le principe de base de ces méthodes

1°) <u>Méthode de type différences finies.</u>

Supposons u et f régulières, alors on va approcher l'équation

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1 \text{ à } N-1.$$

à l'aide des valeurs $u(x_j)$, $j = 0$ à N.

Pour cela, on utilise un développement de Taylor.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x\, u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + O(\Delta x^4)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x\, u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + O(\Delta x^4)$$

$$\Rightarrow u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + \Delta x^2 u''(x_i) + O(\Delta x^4)$$

et donc $-u''(x_i) = \dfrac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$

Si u_i est une valeur approchée de $u(x_i)$ $\forall i = 1$ à N

alors

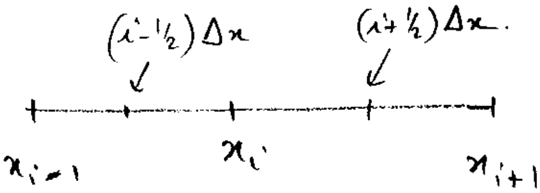
$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \text{ sera une valeur approchée de } -u''(x_i)$$

On aura donc le problème approché suivant.

$$(4.6) \quad \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta x^2} A_{N-1} U = F_{N-1}.$$

où f_i est une approximation, connue puisque f est connue, de $f(x_i)$. Si f est continue on pourra choisir $f_i = f(x_i)$; si $f \in L^?(]0,1[)$ on peut choisir $f_i = \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} f(x)\,dx$.



Remarque 1: Le problème (4.6) est de dimension finie alors que (4.5) est de dimension infinie. On a donc un problème bien plus simple à

résoudre

2. Il faut s'assurer que (4.6) admet une unique solution, c'est à dire que A_{N-1} est inversible.

cf TD.

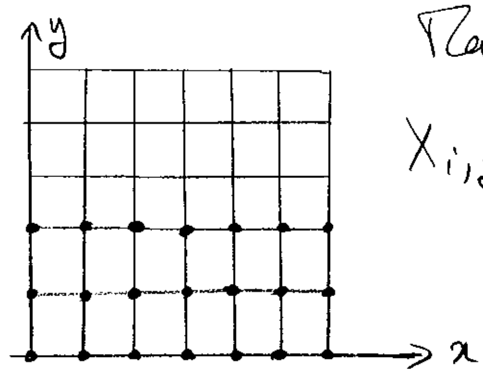
3. Il faut s'assurer également que la méthode converge lorsque $N \to +\infty$. C'est à dire, ici que

$$\lim_{N \to +\infty} |u(x_i) - u_i| = 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } N-1.$$

cf TD.

4. Cette méthode se généralise (aisément) en 2-D (et multi-D). avec des maillages cartésiens.

ex : $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.



Maillage

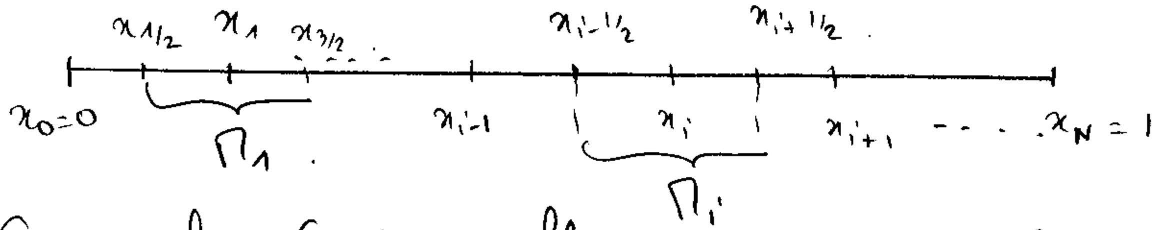
$X_{i,j} = (i\Delta x, j\Delta y)$.

Les maillages non cartésiens sont possibles mais c'est beaucoup plus compliqué...

2°) Méthode de type volumes finis

Là encore on cherche les valeurs approchées u_i, $i = 1$ à $N-1$. Pour cela à chaque valeur approchée, on associe une maille

$$M_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[= [(i-\tfrac{1}{2})\Delta x, (i+\tfrac{1}{2})\Delta x[.$$



On a alors $(N-1)$ mailles associées aux $(N-1)$ inconnues $(u_1, \dots, u_{N-1})$. Pour les déterminer, il nous faut $(N-1)$ équations que l'on obtient en intégrant l'équation $-u'' = f$ sur chaque maille Π_i.

On obtient :

$$-\int_{\Pi_i} u''(x)\,dx = -u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i+1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx = \Delta x f_i$$

Il reste alors à approcher $u'(x_{i+1/2})$ (appelé flux entre les mailles Π_i et Π_{i+1}) pour cela, on utilise un développement de Taylor.

$$u'(x_{i+1/2}) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

(exo).

On a alors.

$$-\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x^2) = \Delta x f_i$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x) = f_i$$

On écrit alors le schéma numérique.

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_i}{\Delta x^2} = f_i \quad \forall i = 1 \text{ à } N-1$$

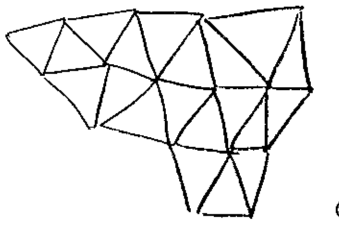
On retrouve le système linéaire (4.6).

Remarque:

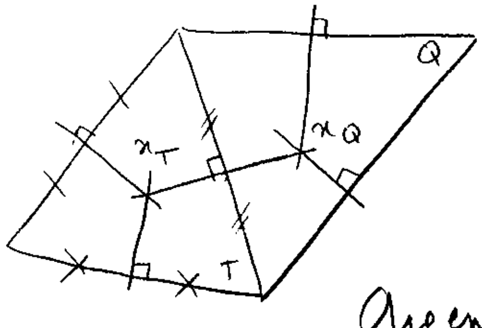
1- En règle général, différences finies $\neq$ volumes finis. par exemple si pas d'espace non constant, i.e. $x_{i+1} - x_i \neq x_{j+1} - x_j$ si $i \neq j$, alors les schémas obtenus par les deux méthodes sont différents.

2- Cette méthode se généralise plus aisément en dimensions supérieures que les différences finies par contre le cas $A \neq Id$ est plus compliqué.

Soit par exemple un maillage triangulaire en dimension 2.



On note T un triangle. et u_T la valeur approchée de u sur celui ci, x_T est le point de concours des médiatrices de T



On intègre l'équation $-\Delta u = f$ sur T. En utilisant la formule de Green, il vient:

$$-\int_T \Delta u(x)\, dx = \sum_{Q \text{ voisins de } T} \int_{\partial Q \cap \partial T} \nabla u(x) \cdot n_T(x)\, d\sigma(x) = \int_T f(x)\, dx$$

On approche alors

$$\nabla u(x) \cdot n_T(x) \text{ par } \frac{u(x_Q) - u(x_T)}{\|x_Q - x_T\|_2}.$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Le schéma est alors donné par

$$\sum_{\substack{Q \text{ voisins} \\ \text{de } T}} \underbrace{\ell(\partial Q \cap \partial T)}_{\substack{\text{longueur de l'arête} \\ \text{entre } Q \text{ et } T}} \frac{u_Q - u_T}{\|x_Q - x_T\|_2} = \int_T f(x)\,dx.$$

$\forall T$ triangle du maillage.

3°) Méthode de type éléments finis.

C'est la méthode la plus utilisée pour les problèmes elliptiques dans les milieux industriels.
Elle est basée sur la formulation variationnelle du problème :

Trouver $u \in V$ (ici $V = H_0^1(\Omega)$) tel que.

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

V est un espace de dimension infinie.
On remplace ce problème par un problème de dimension finie.

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

où $V_h \subset V$ est un espace de dimension finie.

Il faut alors choisir convenablement V_h, pour cela, nous verrons que l'on se sert de la théorie de l'interpolation de Lagrange.

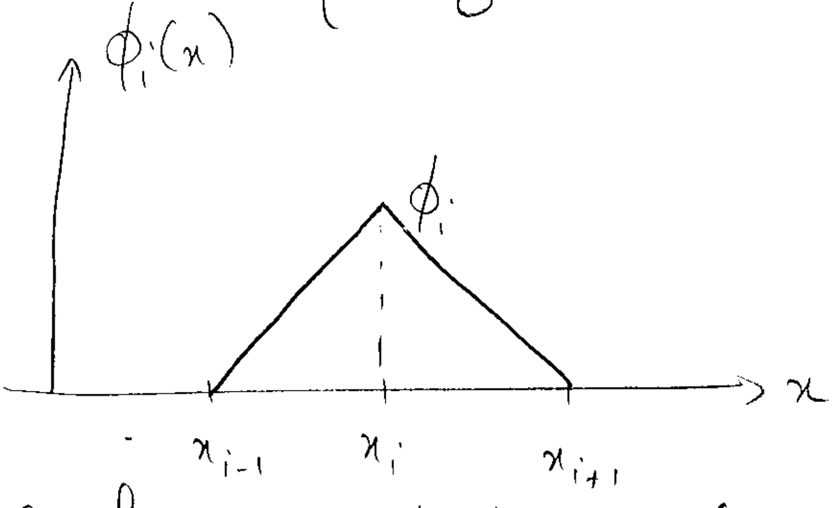
Ici, on pose.

$$V_h = \left\{ v \in C([0,1]) ; v(0) = v(1) = 0 \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^1(x). \quad \forall i = 0 \text{ à } N-1. \right\}.$$

c'est l'ensemble des fonctions affines par mailles.

Nous verrons en TD qu'une base de V_h est donnée par $(\phi_1, \dots, \phi_{N-1})$ où ϕ_i est donnée par.

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}(x - x_i) + 1. & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{1}{\Delta x}(x_i - x) + 1 & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$



Ces fonctions sont dans $H_0^1(]0,1[)$ puisque

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\dfrac{1}{\Delta x} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ <u>eno</u>.

Ainsi u est approchée par $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x)$.
et on remplace la formulation variationnelle par
Trouver $u_h \in V_h$ (donc $(u_1, \dots, u_{N-1}) \subset \mathbb{R}^{N-1}$) tel que

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i \, a(\phi_i, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Puisque $(\phi_1, \dots, \phi_{N-1})$ est une base de V_h, on obtient
Trouver $(u_1, \dots, u_{N-1}) \subset \mathbb{R}^{N-1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i \, a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \quad \forall j = 1 \text{ à } N-1$$

Nous verrons en TD que ce système linéaire est en fait le système (4.6).

II <u>Principes généraux d'approximation variationnelle :</u>

Soit V un Hilbert et a une forme bilinéaire, continue et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ et $L \in V'$, on considère V_h un espace vectoriel de dimension finie tel que $V_h \subset V$. et on introduit les problèmes variationnels

(FV) Trouver $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$

$(FV)_h$ Trouver $u_h \in V_h$ ——— $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v \in V_h$

Lax-Milgram $\Rightarrow$ (FV) admet une unique solut° faible.
de même. V_h est un e.v. de dim fini inclu dans V donc V_h est un hilbert et Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité de la solution de $(FV)_h$. On va quand même voir une démonstrat° directe qui nous sera plus utile pour la suite.

Proposition 1: Le problème $(FV)_h$ admet une unique solution.

Preuve: $\dim V_h = N_h < +\infty \Rightarrow \exists$ une base $(\phi_1, \dots, \phi_{N_h})$ de V_h.

On a bien-sûr $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \cdot \phi_j$.

et $(FV)_h \Leftrightarrow$ Trouver $(u_1, \dots, u_{N_h})$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \cdot a(\phi_j ; v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$\Leftrightarrow$ Trouver $(u_1, \dots, u_{N_h})$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \cdot a(\phi_j ; \phi_i) = L(\phi_i) \quad \forall i = 1 \text{ à } N_h.$$

Problème en dimension finie $\Rightarrow$ bijecti° $\Leftrightarrow$ injecti° $\Leftrightarrow$ surjecti°.
Montrons l'injection, où pb linéaire, il suffit de montrer que la seule solut° pour $L \equiv 0$ est $(0, \dots, 0)$

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \cdot a(\phi_j ; \phi_i) = 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } N_h$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} u_i \cdot u_j \cdot a(\phi_j ; \phi_i) = 0.$$

coercivité

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i,j=1}^{N_h} a(u_j \cdot \phi_j ; u_i \cdot \phi_i) \geqslant \alpha \left(\sum_{i=1}^{N_h} (u_i \cdot \phi_i)^2 \right).$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_h} (u_i \phi_i)^2 = 0 \quad \text{car } \alpha > 0 .$$

$$\Rightarrow \quad u_i \phi_i = 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } N_h \Rightarrow u_i = 0 \quad \forall i \text{ car } \phi_i \neq 0$$

On va maintenant évaluer l'erreur commise quand on approche u par u_h grace au résultat suivant.

<u>Théorème 4.1:</u> Soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$, $L \in V'$, on note u la solution de (FV) et u_h celle de $(FV)_h$ alors.

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\Pi}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \qquad (4.3)$$

où Π et α sont respectivement la constante de continuité de a et de coercivité de a.

<u>Preuve:</u> Soit $v_h \in V_h$ on pose $w_h = v_h - u_h \in V_h \subset V$

$\Rightarrow$

$$a(u, w_h) - a(u_h, w_h) = L(w_h) - L(w_h) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(u - u_h, w_h) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(u - u_h, v_h - u + u - u_h) = 0$$

$$\Rightarrow a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$$

$\Rightarrow$

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$$

$$\leq \Pi \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

$$\Rightarrow \quad \|u - u_h\|_V \leq \frac{\Pi}{\alpha} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h \Rightarrow (4.3)$$

Remarque : 1. Afin d'avoir une bonne approximation il faudra choisir V_h de sorte que

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0 .$$

2. L'infimum est atteint, i.e $\exists\, w_h \in V_h$ tel que $\|u - w_h\|_V = \operatorname{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ et $w_h = \Pi_h u$ est appelé la projection de u sur V_h.

On note $J : V_h \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v_h \longmapsto \|u - v_h\|_V^2$$

alors $\forall v, w \in V_h$.

$$J(w+v) = (u-(v+w), u-(v+w))_V$$

$$= \|u-w\|_V^2 - 2(u-w, v)_V + \underbrace{\|v\|_V^2}_{\geq 0}$$

$$\geq J(w) + DJ(w).v$$

$\Rightarrow$ équation d'Euler est ici (nécessaire et) suffisante

$DJ(w).v = 0 \quad \forall v \in V_h \Rightarrow w$ est un minimum global de J.

et $DJ(w).v = 0 \quad \forall v \in V_h$

Trouver $w \in V_h$ tel que

$\Leftrightarrow \quad (w, v)_V = (u, v)_V \quad \forall v \in V_h$.

c'est $(FV)_h$ avec $a(w,v) = (w,v)_V$ linéaire $\forall w, v \in V_h$ continue $M = 1$ coercive $\alpha = 1$

et $L(v) = (u,v)_V \quad \forall v \in V_h$

$\Rightarrow \exists !\, w \in V_h$ tq $DJ(w).v = 0 \quad \forall v \in V_h$.

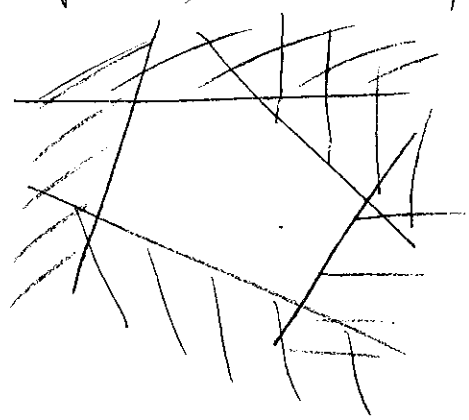
III Éléments finis et interpolation de Lagrange.

1°) Introduction :

On considère dans ce paragraphe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3. un ouvert polyédrique.

Définition : Un polyèdre de $\mathbb{R}^d$ est une intersection finie de demi-espaces fermés ; Un ouvert polyédrique est l'intérieur d'une union finie de polyèdre.

ex : $d = 2$



Soit $f \in L^2(\Omega)$, on considère la solution faible du problème.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega & \text{ou } \nabla u . \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On rappelle que $u \in V$ (avec $V = H^1_0(\Omega)$ pour Dirichlet homogène et $V = H^1(\Omega)$ pour Neumann homogène) et est tel que

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V. \\ a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

avec $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega u(x) v(x)\, dx$$

$\forall u, v \in V$.

On a alors le résultat de régularité suivant (difficile et admis)

Théorème : Si Ω est convexe (donc Ω intérieur d'un polyèdre) alors $u \in H^2(\Omega)$

Le but de ce paragraphe est de construire une approximation de u par la méthode des éléments finis.

On commence donc par décomposer Ω en "petits sous domaines"

Définition : Soit $\mathcal{T}$ un ensemble fini de polyèdres de $\mathbb{R}^d$
on dit que $\mathcal{T}$ est une triangulation de Ω ssi :

1. $\forall T \in \mathcal{T}, \quad T \subset \overline{\Omega}$
2. $\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ ($\mathcal{T}$ est un maillage de Ω)
3. $\forall (T, T') \in \mathcal{T}^2, \quad \mathring{T} \cap \mathring{T}' = \emptyset$.

On note $h = \max_{T \in \mathcal{T}} (\mathrm{diam}(T))$ où $\mathrm{diam}(T)$ est le diamètre de T et est défini par $\mathrm{diam}(T) = \max_{x,y \in T^2} |x-y|$ où $|.|$ = norme Euclidienne.

Bien-sûr, h va tendre vers 0, à partir de maintenant on indexe $\mathcal{T}$ par h, on note donc $\mathcal{T}_h$.

2°) Éléments finis de Lagrange.

Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) polyèdre (donc compact, connexe, convexe et d'intérieur non vide), on considère $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de n points distincts de K.

On se donne P un espace vectoriel de dimension finie composé de fonctions définies de K dans $\mathbb{R}$.

<u>Définition:</u> On dit que l'ensemble Σ est P-unisolvant ssi étant donnés n scalaires réels quelconques α_j, $j = 1$ à n il existe une unique fonction p de P telle que

$$p(a_j) = \alpha_j \quad \forall j = 1 \text{ à } n \qquad (4.4)$$

On dit dans ce cas que le triplet (T, P, Σ) est un élément fini de Lagrange.

<u>exemples:</u>

1) $d = 1$, $T = [x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$.

$$\Sigma = \{x_i, x_{i+1}\}, \quad P = \mathbb{R}^1[x].$$

2) $d = 1$, $T = [x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$.

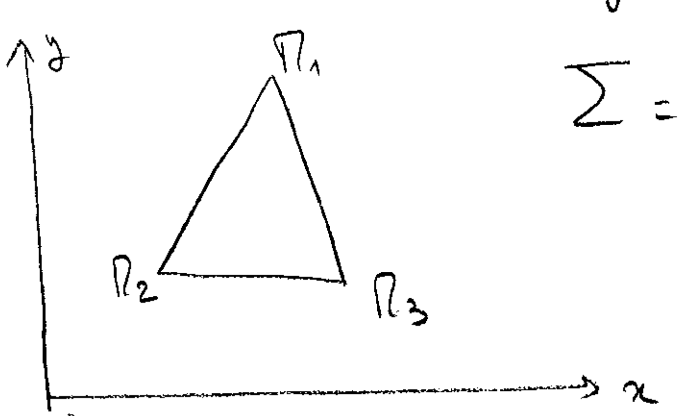
$$\Sigma = \{x_i, \underset{\frac{x_i + x_{i+1}}{2}}{\underset{\shortparallel}{x_{i+1/2}}}, x_{i+1}\}, \quad P = \mathbb{R}^2[x]$$

3) $d = 1$, $T = [x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$

$$\Sigma = \left\{x_i, x_i + \frac{\Delta x}{3}, x_i + \frac{2\Delta x}{3}, x_{i+1}\right\} \text{ avec } \Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$P = \mathbb{R}^3[x].$$

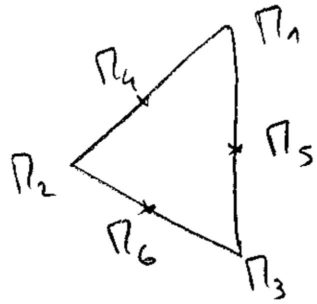
4) $d = 2$. T = triangle de sommets $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \subset \Omega$.



$$\Sigma = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$$

$$P = \{\text{fonctions affines}\} = \left\{ \begin{array}{l} T \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto ax + by + c \end{array} \right\}$$

5) $d = 2$ T = triangle de sommets $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \subset \Omega$.



$$\Sigma = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6\}$$

$$P = \{\text{fonctions quadratiques}\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} T \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \end{array} \right\}$$

Définition : Soit (T, P, Σ) un élément fini de Lagrange, on appelle fonctions de base (ou fonctions de formes), les fonctions $(p_1, \dots, p_n)$ où $n = \text{card}\, \Sigma$, définies pour tout $j = 1$ à n par :

$$(4.5) \quad p_j(a_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall i = 1 \text{ à } n$$

avec $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Remarque : D'après (4.4), les p_j, $j = 1$ à n, sont définies de manière unique.

Définition : Soit (T, P, Σ) un élément fini de Lagrange, on considère X un espace vectoriel de fonctions définies sur T à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues sur Σ.

On appelle opérateur de P-interpolation sur T, noté Π_T, l'application linéaire

$$\Pi_T : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \Pi v = \sum_{i=1}^{n} v(a_i)\, p_i$$

où $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $(p_1, \dots, p_n)$ est l'ensemble des fonctions de base de (T, P, Σ).

3°) Convergence des méthodes de type éléments finis

Définition : Soit Ω un ouvert polyédrique et $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille de triangulation de Ω, on dit que $(\mathcal{T}_h)$ est régulière si les conditions suivantes sont satisfaites $\forall h>0$

1- $\forall T \in \mathcal{T}_h$, on a choisi Σ_T et P_T tels que (T, Σ_T, P_T) est un élément fini de Lagrange.

On suppose de plus qu'il existe $\hat{T}$ polyèdre de $\mathbb{R}^d$ et $(\hat{T}, \hat{P}, \Sigma_{\hat{T}})$ élément fini de Lagrange tel que

i) $\hat{P} \subset C(\hat{T})$

ii) $\forall \hat{\sigma}$ face de $\hat{P}$ (i.e intersection d'un hyperplan avec $\partial\hat{P}$) l'ensemble $\hat{\Sigma}' = \hat{\Sigma} \cap \sigma$ est $\hat{P}'$-unisolvant où $\hat{P}' = \{ p|_\sigma \,;\, p \in \hat{P} \}$.

De plus $\forall T \in \mathcal{T}_h$, $\exists$ F_T transformation affine (donc bijective) de T dans $\hat{T}$ telle que $F_T(\Sigma_T) = \Sigma_{\hat{T}}$

2. $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ tq $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ alors $\forall \sigma$ face de $T_1 \cap T_2$

$$\Sigma_{T_1} \cap \sigma = \Sigma_{T_2} \cap \sigma \quad \text{et} \quad P_{T_1}|_\sigma = P_{T_2}|_\sigma .$$

3 - $\exists \sigma \geq 1$ telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \ \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma .$$

où ρ_T est la rondeur de T, c'est à dire

$$\rho_T = \operatorname{Max}\left\{ R \in \mathbb{R} \,;\, B_n(x,R) \subset T \text{ et } x \in T \right\}.$$

et h_T est le diamètre de T.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation, $\forall T \in \mathcal{T}_h$ on a choisi Σ_T et P_T tels que (T, Σ_T, P_T) est un élément fini de Lagrange.
On introduit alors

$$V_h = \left\{ v \in V \cap C(\bar{\Omega}) \text{ tels que } \forall T \in \mathcal{T}_h ,\ v|_T \in P_T \right\}.$$

et la formulation approchée.

$(FV)_h$: Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h.$$

On sait que $\|u - u_h\|_V \leq \frac{\Pi}{\alpha} \operatorname{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$.

On introduit alors $\Pi_h u = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Pi_T u = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{a_i \in \Sigma_T} u(a_i)\, p_{T,i}$

et bien-sûr $\|u - u_h\|_V \leq \frac{\Pi}{\alpha} \|u - \Pi_h u\|_V$.

On a alors le résultat suivant.

notons que $u \in H^2(\Omega) \overset{d \leq 3}{\hookrightarrow} C(\bar{\Omega})$ $\Rightarrow$ $u(a_i)$ a un sens.

<u>Théorème</u>: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \leq 3)$ ouvert polyédrique, $(\mathcal{T}_h)$ famille régulière de triangulations de Ω associée à un élément fini de référence $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$.
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{R}^k[x] \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{k}).$$

Alors

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

de plus cette méthode est d'ordre (au moins) k c'est à dire $\exists$ C indépendante de h telle que si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

III Interpolation de Lagrange :

1°) Un exemple simple :

On revient au problème (4.1)

$$(4.1)\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0,1[\quad f \in L^2(]0,1[) \text{ donnée} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On sait que (4.1) admet une unique solution $u \in H^1(]0,1[)$

On cherche une approximation de u, pour cela on utilise le paragraphe précédent.

On cherche $V_h \subset V$ de dimension finie tel que

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0$$

Naturellement on est amené à considérer l'interpolé de Lagrange de u relativement à un nombre fini de points.

On introduit donc un maillage de $]0,1[= \bigcup_{i=0}^{N-1} [x_i, x_{i+1}[$

avec $x_0 = 0$, $x_N = 1$ et $x_{i+1} - x_i = \Delta x = \frac{1}{N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$ est donné. On note

$$V_h = \left\{ v \in C([0,1]) \,;\, v(0) = v(1) = 0 \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^1[x] \quad \forall i = 0 \text{ à } N-1 \right\}.$$

où $\mathbb{R}^1[x] = \{$polynômes de degré inférieur ou égal à 1$\}$.

Remarquons si $v_h \in V_h$ alors $\forall i = 0$ à $N-1$, $\exists A_i, B_i \in \mathbb{R}$ telles que

$$v_h(x) = A_i x + B_i \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$v(0) = v(1) = 0 \Rightarrow B_0 = 0 \text{ et } A_{N-1} + B_{N-1} = 0$$

$v_h \in C([0,1]) \Rightarrow \forall i = 0$ à $N-2$

$$A_i x_{i+1} + B_i = A_{i+1} x_{i+1} + B_{i+1}$$

Vérifions que $V_h \subset H^1_0(]0,1[)$, en effet si $v_h \in V_h$ alors $\forall \varphi \in C^\infty_c(]0,1[)$

$$\langle v_h', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(]0,1[), \mathcal{D}(]0,1[)} = -\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (A_i x + B_i)\, \varphi'(x)\, dx$$

$$\overset{IPP}{=} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_i\, \varphi(x)\, dx - \Big[(A_i x + B_i)\, \varphi(x)\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} \right]$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N-1} A_i\, 1_{]x_i, x_{i+1}[}(x) \right) \varphi(x)\, dx - \sum_{i=0}^{N-1} (A_i x_{i+1} + B_i)\, \varphi(x_{i+1})$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} (A_i x_i + B_i)\, \varphi(x_i).$$

Mais $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} (A_i x_{i+1} + B_i)\, \varphi(x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{N-2} (A_i x_{i+1} + B_i)\, \varphi(x_{i+1})$ car $\varphi(x_N) = \varphi(1) = 0$

$$= \sum_{i=0}^{N-2} (A_{i+1} x_{i+1} + B_{i+1})\, \varphi(x_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (A_i x_i + B_i)\, \varphi(x_i).$$

$$\Rightarrow \langle v_h', \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N-1} A_i\, 1_{]x_i, x_{i+1}[}(x) \right) \varphi(x)\, dx$$

$$+ (A_0 \times 0 + B_0)\, \underbrace{\varphi(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow v_h' = \sum_{i=0}^{N-1} A_i\, 1_{]x_i, x_{i+1}[} \in L^2(]0,1[)$$

Quelle est la dimension de V_h ?

Pour connaître $v_h \in V_h$ il faut déterminer

A_i, B_i pour $i = 0$ à $N-1$.

c'est à dire $2N$ inconnues. mais on a $B_0 = 0$,

$A_{N-1} + B_{N-1} = 0$ et $A_i x_{i+1} + B_i = A_{i+1} x_{i+1} + B_{i+1}$
$\forall i = 0$ à $N-2$.

soit $N+1$ équations, on a donc $2N - (N+1)$ degrés de liberté c'est à dire $N-1$.

donc $\dim V_h = N-1$.

On remplace la formulation variationnelle de (4.1)

qui est

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tq $a(u,v) = L(v)$

avec $a(u,v) = \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$

et $L(v) = \int_0^1 v(x) f(x)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

Par la formulation dans V_h qui est

Trouver $u_h \in V_h$ tq $a(u_h, v_h) = L(v_h)$

Ce pb. est linéaire et de dimension finie $\Rightarrow$ facile à résoudre.

De plus d'après le théorème 4.1 on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

Or, si on note $\Pi_h u$ l'interpolé de Lagrange de u relativement aux points $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ alors $\Pi_h u \in V_h$ et nous verrons en TD que

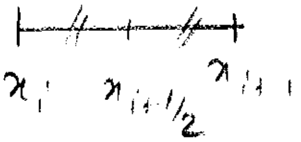
$$\Pi_h u \xrightarrow[h \to 0]{} u \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

<u>Remarque:</u> 1. On peut généraliser à des fonctions polynomiales par morceaux, i.e.

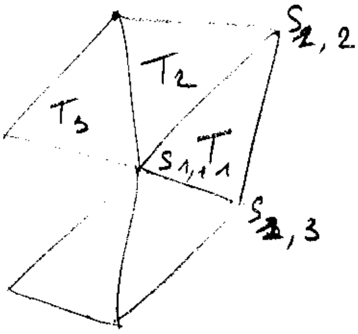
$$V_h = \left\{ v_h \in C([0,1]) ; v_h(0) = v_h(1) = 0 \text{ et } v_h\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^p[x] \right\}$$

dans ce cas, il faut introduire des points supplémentaires ici $p-2$ pts dans $[x_i, x_{i+1}]$

<u>ex:</u> $p=2$:



2. On généralise en dimension supérieure avec des fonctions affines sur des triangles (ou polynomiales)



$$V_h = \Big\{ v \in C([0,1]) ; \underbrace{v\Big|_{T_i} \in \mathbb{R}^1[x,y]}_{ax+by+c} \Big\}$$

⚠ le domaine doit être recouvrable par des triangles sinon petite erreur en plus....