Chapitre 2: Espaces de Sobolev.

Nous verrons par la suite que les espaces de Sobolev sont un très bon cadre pour l'étude des problèmes elliptiques.
Nous commençons donc par quelques rappels sur les espaces de Sobolev.

I Court rappel sur les distributions réelles

1°) Définitions.

Définition 2.1: (espace des fonctions test)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω à support compact contenu dans Ω et à valeurs réelles.

Pour $K \subset \Omega$ compact, on note $C_K^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$ à support dans K.

Les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont appelées fonctions test.

Définition 2.2: (Distributions réelles).

On dit que u est une distribution (réelle) dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ si u est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega)$:

$$u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto u(\varphi) \overset{\text{notation}}{=:} \langle u, \varphi \rangle \text{ ou } \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante :

$\forall K$ compact de Ω, il existe $A_K \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega) \; ; \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq A_K \sup_{\substack{x \in K, \\ |\alpha| \leq p}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

où $\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (multientier)

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace (vectoriel) des distributions dans Ω.

<u>Remarque:</u> Lorsque, dans la définition 2.2, l'entier p peut être choisi indépendant de K on dit que la distribution u est d'ordre fini. La plus petite valeur de p possible est appelée l'ordre de u.

2° <u>Exemples importants</u>.

<u>Exemple 1:</u> Fonctions localement sommables dans Ω. $L^1_{loc}(\Omega)$.

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f \in L^1(K) \quad \forall K \subset \Omega \text{ compact} \}.$$

$(L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega))$.

Pour toute $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on définit une distribution associée, encore notée f. (« abus de notation ») par :

$$< f, \varphi >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

On a $\forall K$ compact dans Ω :

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega) \qquad |< f, \varphi >| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|\, dx$$

donc f définit une distribution (d'ordre 0.)

ex : fonction de Heaviside en dim 1, $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$.

Remarque importante : L'utilisation de la même notation est possible car deux fonctions non égales presque partout ne définissent pas la même distribution. Ceci grace au résultat (important) suivant :

Théorème 2.1 : Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ alors :

$$\int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \iff f = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Exemple 2 Distribution (ou mesure) de Dirac en un point $a \in \mathbb{R}^n$: δ_a.
Elle est définie par $<\delta_a, \varphi> = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
On montre facilement qu'elle satisfait la définition suivante qui explique l'appelation mesure :

Définition 2.3 : Une mesure de Radon positive sur un ouvert Ω est une distribution d'ordre 0 sur Ω telle que :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+) \quad : \quad <u, \varphi> \geq 0.$$

3°) Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 2.4: (Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$)

On dit qu'une suite de distributions $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle u_m, \varphi \rangle \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, \varphi \rangle .$$

Proposition 2.1: Il y a unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ($\mathcal{D}'(\Omega)$ est séparé.).

Preuve: Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$u_m \to u_1$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $u_m \to u_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

rapide

Alors $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

$\langle u_m, \varphi \rangle \to \langle u_1, \varphi \rangle$.

et $\langle u_m, \varphi \rangle \to \langle u_2, \varphi \rangle$.

La suite $W_m = \langle u_m, \varphi \rangle$ est une suite réelle, et il y a unicité de la limite dans $\mathbb{R}$ donc

$$\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

$\iff u_1 = u_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4°) Dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 2.5: Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on note $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la distribution définie par :

$$< \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi > = - < u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > .$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée de u par rapport à x_i au sens des distributions.

<u>Remarque:</u> $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est bien une distribution car si

$\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists A_K \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega), \ |< u, \varphi >| \leq A_K \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq p}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

alors $\forall K \subset \Omega$ compact.

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega), \ |< \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi >| \leq A_K \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq p}} \left|\partial^\alpha \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\right|$$

$$\leq A_K \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq p+1}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

On termine ces rappels par un résultat de continuité de la dérivée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Théorème 2.2:</u>

Si une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

alors, $\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = p$

$$\partial^\alpha u_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \partial^\alpha u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

<u>Démonstration:</u> $< \partial^\alpha u_m, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < u_m, \partial^\alpha \varphi > \xrightarrow{m \to +\infty} (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi >$
$= < \partial^\alpha u, \varphi >$

II Espaces de Sobolev d'ordre entier : H^m ($m \in \mathbb{N}$).

1°) Définition et premières propriétés.

Définition 2.6 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ (et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$) on dit que $u \in H^m(\Omega)$ si $u \in L^2(\Omega)$ et si toutes ses dérivées, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\Omega)$.

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \forall \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m \text{ on ait } \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \right\}$$

avec $\partial^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Théorème 2.3 : Muni du produit scalaire

$$(u,v)_m = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx \quad \forall u,v \in H^m(\Omega).$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve : espace de Hilbert = espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associé au produit scalaire

L'espace $H^m(\Omega)$ est clairement préhilbertien (e.v muni d'un p.s.) montrons qu'il est complet pour la norme

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = (u,u)_m \quad \forall u \in H^m(\Omega)$$

Soit donc $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$

par continuité de l'injection canonique de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ $\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^m(\Omega)}\ \forall u \in H^m(\Omega)\right)$, (u_j) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $\forall \alpha\in\mathbb{N}^n$, tel que $1\leq|\alpha|\leq m$, $(\partial^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

$L^2(\Omega)$ étant complet, $\exists u\in L^2(\Omega)$ et $u_\alpha\in L^2(\Omega)$ tels que

$$u_j \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$\partial^\alpha u_j \longrightarrow u_\alpha \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \forall \alpha\in\mathbb{N}^n,\ 1\leq|\alpha|\leq m$$

et par continuité de l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\left(\forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ \langle u,\varphi\rangle \underset{C.S.}{\leq} \|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\right)$.

$$u_j \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\partial^\alpha u_j \longrightarrow u_\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad \forall \alpha\in\mathbb{N}^n,\ 1\leq|\alpha|\leq m$$

en effet

$\forall \varphi\in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle u_j-u,\varphi\rangle \leq \|u_j-u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Mais la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est continue (voir Thm 2.2)

$$\partial^\alpha u_j \longrightarrow \partial^\alpha u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\ \forall \alpha\in\mathbb{N}^n \quad 1\leq|\alpha|\leq m.$$

donc $u_\alpha = \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$

et donc $u\in H^m(\Omega)$ et (u_j) converge dans $H^m(\Omega)$

donc $H^m(\Omega)$ est complet.

Théorème 2.4: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Preuve: On fera la démonstration pour $H^1(\mathbb{R}^n)$ en TD (voir feuille 1
(Troncature + régularisation.

Remarque: 1- ⚠ si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^m(\Omega)$. Si Ω est suffisament régulier (Ω de classe C^m) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (et donc $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$) est dense dans $H^1(\Omega)$.

2- Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$ peuvent être définis avec la transformaθ de Fourier. [voir Lions - Magenès]. (eoo?)

3- Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. généralisent les espaces $H^m(\Omega)$.

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) ;\ \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ |\alpha| \leq m \right\}.$$

2°) Cas particulier de l'espace $H^1(\Omega)$

Dans ce paragraphe Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).
On rappelle que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ;\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ \forall i = 1 \text{ à } n \right\}.$$

(*) voir feuille 18.1

2.1 Caractérisation des fonctions de $H^1(\Omega)$

feuilles suivantes 18.1, 18.2, 18.3,
19....

Le produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ est

$$(u,v)_1 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq 1}} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx .$$

$$= \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx .$$

ainsi

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = (u,u)_1 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)\, dx .$$

$$=: \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

On utilise également une norme équivalente.

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

<u>exercice:</u> Montrez que ces normes sont équivalentes.

Théorème 2.5 : Si $n=1$ alors $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Preuve : Soit $u \in H^1(\Omega)$, on veut montrer qu'il existe $\overline{u} \in C(\overline{\Omega})$ tel que $\overline{u} = u$ presque partout dans Ω.

On introduit

$$\tilde{u}(x) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt \quad \text{avec } x_0 \in \Omega. \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

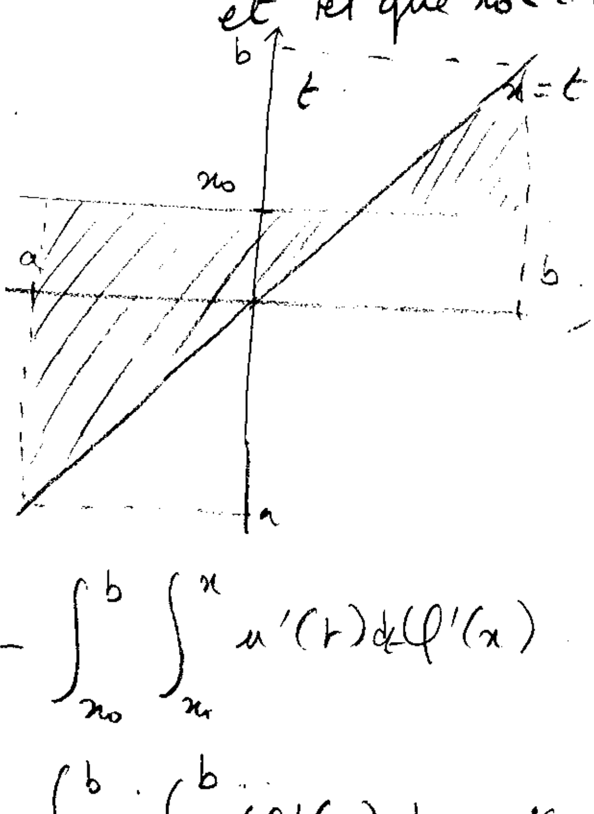
$\tilde{u}(x)$ a bien un sens. car $u \in H^1(\Omega) \Rightarrow |\tilde{u}(x)| \leq \|u'\|_{L^2}$

Calculons la dérivée de $\tilde{u}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\langle \tilde{u}', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = - \langle \tilde{u}, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

$$= - \int_a^b \tilde{u}(x)\varphi'(x)\, dx \quad \text{où } [a,b] \supset \operatorname{Supp} \varphi.$$

et tel que $x_0 \in [a,b]$



$$= - \int_a^b \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt\, \varphi'(x)\, dx.$$

$$= - \int_a^{x_0} \int_{x_0}^{x} u'(t)\varphi'(x)\, dt\, dx.$$

$$- \int_{x_0}^{b} \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= \int_a^{x_0} \int_x^{x_0} u'(t)\,dt\,\varphi'(x)\, dx - \int_{x_0}^{b}\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt\,\varphi'(x)\, dx$$

Fubini

$$= \int_a^{x_0} \int_a^{t} \varphi'(x)\, dx\, u'(t)\,dt - \int_{x_0}^{b}\int_t^{b} \varphi'(x)\, dx\, u'(t)\,dt$$

$$= \int_a^{x_0} [\varphi(t) - \underbrace{\varphi(a)}_{=0}]\, u'(t)\,dt - \int_{x_0}^{b} [\underbrace{\varphi(b)}_{=0} - \varphi(t)]\, u'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \varphi(t)\, u'(t)\, dt = \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

$\Rightarrow \quad \tilde{u}' - u' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$\Rightarrow \quad u = \tilde{u} + C$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. où C est une constante. (voir exercice 4 feuille

Mais $\tilde{u}$ et u sont dans $L^2(\Omega)$ $\Rightarrow$

$u = \hat{u} + C$ presque partout dans Ω.

On choisit $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x) + C \quad \forall x \in \Omega$.

alors $\bar{u} = u$ p.p. dans Ω.

et $\forall x, y \in \bar{\Omega}$. $\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt + C$

$$- \int_{x_0}^{y} u'(t)\,dt - C.$$

donc $\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt$

et ainsi $|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq \int_\Omega 1_{[x,y]}(t)\,|u'(t)|\,dt$.

$$\leq \sqrt{|x-y|}\;\|u'\|_{L^2(\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz.

donc $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$. et $\bar{u} = u$ p.p. dans Ω.

Notons au passage que pour presque tout $x, y \in \bar{\Omega}$.

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,dt \quad \left(= \bar{u}(x) - \bar{u}(y)\right).$$

Remarque :

1- Les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ et ne sont donc définies que p.p.

Ainsi l'inject° du théorème 2.5. veut dire $\exists$ un représentant continu.

Une fonct° de $H^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, peut être discontinue par contre elle est égale p.p. à une fonction continue. On choisit bien sûr de travailler sur le représentant continu lorsque ceci est possible.

exemple :
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \forall x \in]-1,1[= I$$

Calculons la dérivée de f dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

$$= -\int_{-1}^{1/2} x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} x\,\varphi'(x)\,dx.$$

$$\overset{IPP}{=} -\left[x\,\varphi(x)\right]_{-1}^{1/2} + \int_{-1}^{1/2} \varphi(x)\,dx - \left[x\,\varphi(x)\right]_{1/2}^{1} + \int_{1/2}^{1} \varphi(x)\,dx.$$

$$= -\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}) - 1\,\cancel{\varphi(-1)}^{0} + \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx - 1\,\cancel{\varphi(1)}^{0} + \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})$$

$$= \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx.$$

car $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$.
$\varphi \in C_c^\infty(]-1,1[)$

$$= \int_{-1}^{1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 1$ p.p. dans I et donc $f' \in L^2(I)$

f est donc dans $H^1(I)$.

Remarquez que $f = 1$ p.p. et que 1 est une fonct° continue.

2 - ⚠ si $n>1$ le théorème 2.5 est faux. En général les fonctions de $H^1(\Omega)$ ($\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n>1$) ne sont pas continues. (i.e. ne sont pas égales p.p. à une fonction continue.)

En fait, on montre qu'elles peuvent admettre des singularités mais celles ci doivent être localisées sur des variétés de dimension au plus $n-2$. (en dim 2 au pire des points, en dim 3 au pire des courbes, ...).

<u>exemple:</u> $n=2$, $\Omega = B(0,\frac{1}{2})$ = boule de centre O et de rayon $1/2$.

On considère $u(x,y) = \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)^k$ avec $0<k<\frac{1}{2}$.

u admet une singularité en $(0,0)$ mais

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{2k} r\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^{1/2}\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{2k} r\,dr \quad (\text{car } \ln x < x \ \forall x>0)$$

$$\leq 2\pi\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{r}\right)^{2k} r\,dr = 2\pi\int_0^{1/2} r^{\overbrace{1-2k}^{>0}}\,dr < 2\pi\times\frac{1}{2} = \pi$$

car $\ln x \leq x \ \forall x>0$

et $$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\pi\int_0^{1/2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{du}{dr}\right)^2 r\,dr.$$

$$= 2\pi k^2\int_0^{1/2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{2k-2}\frac{1}{r}\,dr < +\infty.$$

en effet $\frac{1}{r}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{2k-2} = \left(-\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{2k-1}\frac{1}{2k-1}\right)'$

et $k<\frac{1}{2} \Rightarrow 2k-1<0$ et $\lim_{r\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{2k-1} = 0 < +\infty$.

<u>Définition 2.7:</u> On dit qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ est de classe C^k pour $k \in \mathbb{N}$ (respectivement Lipschitzien) si on peut trouver un nombre fini d'ouverts $(O_i)_{0 \leq i \leq I}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\overline{O_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{I} O_i, \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{I} O_i$$

et que pour tout $i \in \{1, \ldots, I\}$ il existe une application bijective de classe C^k (respectivement Lipschitzienne) de O_i dans l'ensemble

$$B = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,;\ \|x\|_2 \leq 1 \right\}$$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne

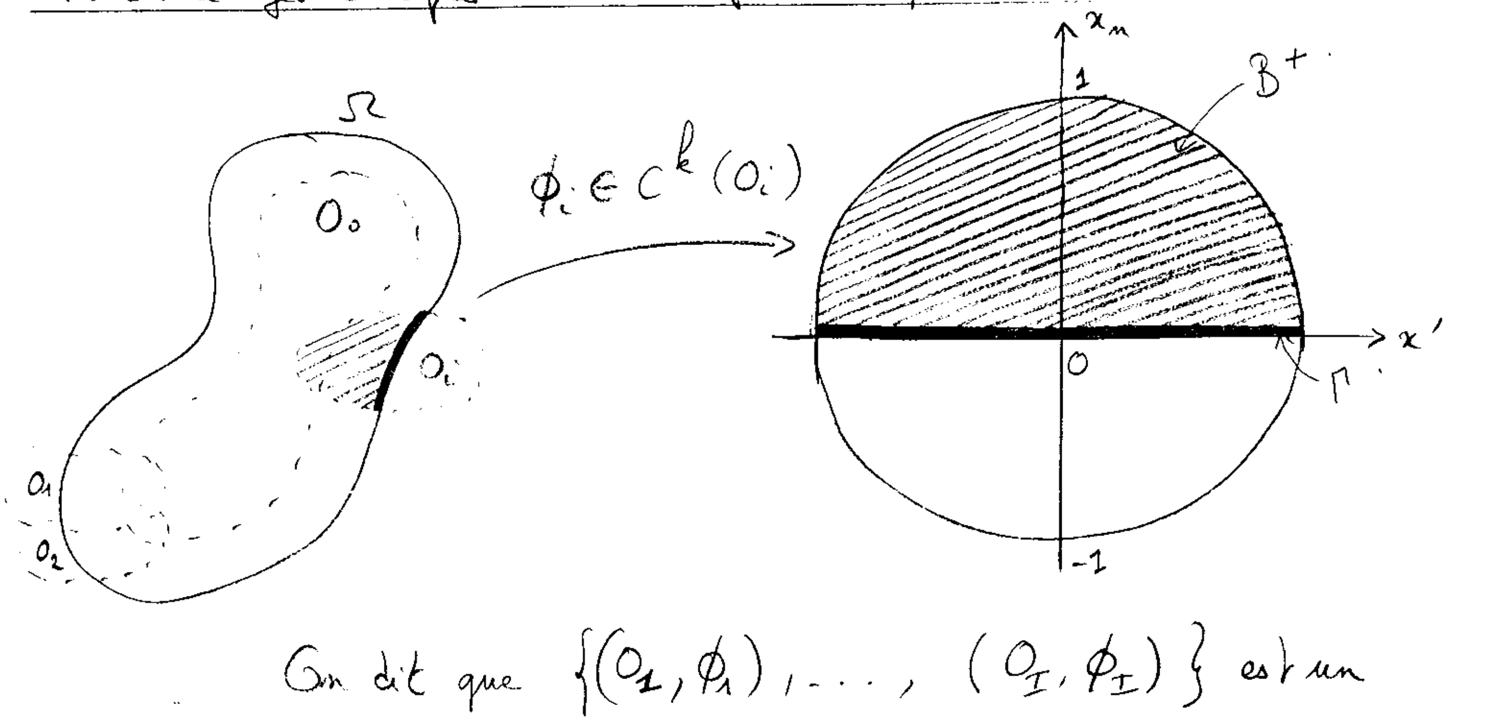
dont l'inverse est de classe C^k (resp. Lipsch) et telle que

$$\phi_i(O_i \cap \Omega) = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,;\ \|x\|_2 < 1 \text{ et } x_n > 0 \right\} = B^+$$

et

$$\phi_i(O_i \cap \partial\Omega) = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,;\ \|x\|_2 < 1 \text{ et } x_n = 0 \right\} = \Gamma.$$

<u>Résumé géométrique de la définition précédente :</u>



On dit que $\{(O_1, \phi_1), \ldots, (O_I, \phi_I)\}$ est un système de cartes locales définissant $\partial\Omega$.

2.2. Traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ (frontière de Ω).

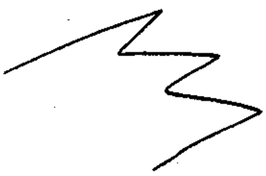
Lorsqu'on résout un problème elliptique (par ex. le laplacien) sur un domaine borné, on doit imposer des conditions aux limites du domaine, par exemple en fixant la valeur de l'inconnue sur le bord du domaine.

Mais, comment définir la valeur de u sur $\partial\Omega$ lorsque u n'est défini que presque partout et que $\partial\Omega$ est de mesure nulle ?

Nous allons voir que, pour les fonctions de $H^1(\Omega)$, on sait définir les valeurs de u sur $\partial\Omega$ (presque partout).

Avant cela, on commence par définir la régularité d'un ouvert :

On veut faire la différence entre.



et

Comme nous l'avons vu dans le § précédent, les fonctions de $H^1(\Omega)$ peuvent avoir des singularités sur des variétés de dim $\leq n-2$ mais pas sur des variétés de dim $= n-1$. Ainsi, il va y avoir un sens à parler de la restriction d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur une variété de dimension $n-1$. Cette restriction sera définie p.p. (au sens $n-1$).

Pour cela, on commence par donner le résultat suivant :

<u>Théorème 2.6</u> : Soit $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} ;\ x_n > 0\}$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné de classe C^1 alors

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

<u>Preuve</u> : la démonstrat° pour $\mathbb{R}^n_+$ est similaire à celle pour $\mathbb{R}^n$.

Pour Ω borné de classe C^1, on prolonge les fonct° de $H^1(\Omega)$ à $\mathbb{R}^n$ telle que le prolongement $\in H^1(\mathbb{R}^n)$

<u>Rmq</u> : $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} ;\ x_n \geq 0\}$.

On est alors en mesure de définir la trace d'une fonction $H^1(\Omega)$ sur le bord de Ω. On commence par $\mathbb{R}^n_+$.

<u>Théorème 2.7</u> : L'application

$$\gamma : \left(C^1_c(\overline{\mathbb{R}^n_+}), \|.\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}\right) \longrightarrow \left(L^2(\mathbb{R}^{n-1}), \|.\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\right)$$

$$u \longmapsto u|_{\mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{R}^n_+}$$

est une application linéaire et continue qui se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ encore notée γ. On a :

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

<u>Preuve</u> :

Il est clair que γ est linéaire, montrons qu'elle est continue. Pour cela, on doit montrer que $\exists\, C > 0$ telle que $\forall u \in C^1_c(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',0)|^2\, dx' \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} \left[|u(x',x_n)|^2 + |\nabla u(x',x_n)|^2 \right] dx'dx_n$$

$u \in C^1_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, alors.

$$u^2(x',0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(u^2(x',x_n)\right) dx_n.$$

$$= -\int_0^{+\infty} 2\, u(x',x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}\left(u(x',x_n)\right) dx_n.$$

On intègre par rapport à x' et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u^2(x',0)\,dx' \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} u^2(x',x_n)\, dx'dx_n\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} u(x',x_n)\right|^2 dx'dx_n\right)^{1/2}$$

$$\leq 2\, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \quad \text{car } 2ab \leq a^2+b^2 \ \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Ce qui montre la continuité de γ, on prolonge cette application en utilisant la densité des fonctions de $C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ (donc de $C^1_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$) dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, alors $\exists (u_n) \subset C^1_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ telle que.

$$\|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On montre alors que $(\gamma(u_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$

$\forall n, m \geq 0$

$$\|\gamma(u_n) - \gamma(u_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \|\gamma(u_n - u_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \|u_n - u_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$ car (u_n) converge dans H^1.
d'après la continuité de γ.

donc $(\gamma(u_n))$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ qui est complet ainsi $\exists\, v \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que

$$\gamma(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

On pose $v = \gamma(u)$, $\gamma(u)$ est indépendant de la suite considérée. Si (φ_n) est une suite de $C^1_c(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ convergeant vers u dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ alors, de même que précédemment pour (u_n), on a $\gamma(\varphi_n) \longrightarrow v_2$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, mais

$$\|\gamma(u_n) - \gamma(\varphi_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|u_n - \varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq C \|u_n - u\|_{H^1} + \|u - \varphi_n\|_{H^1}$$

à la limite, on obtient

$$\|v - v_2\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq 0 \implies v = v_2 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^{n-1}$$

Cette applicat° est t$_{jrs}$ linéaire
et est continue car $\|\gamma(u)\|_{L^2} \leq \|\gamma(u) - \gamma(u_n)\|_{L^2} + \|\gamma u_n\|_{L^2}$ ($\triangle$ p.p. $n-1$ dimensionnel.)
$\leq C \underbrace{\|u - u_m\|_{H^1}}_{\to 0} + C \|u_m\|_{H^1}$

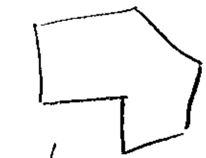
On va maintenant étendre ce résultat à Ω ouvert borné de classe C^1

<u>Théorème 2.8:</u> Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, alors l'application $\gamma : (C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) \longrightarrow (L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)})$

$$u \longmapsto u|_{\partial\Omega}$$

est une application linéaire et continue et se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ encore notée γ.

<u>Remarques:</u> 1- On peut affaiblir les hypothèses sur Ω. Il suffit que Ω soit Lipschitzien et C^1 par morceaux



2 - L'application γ ainsi définie n'est pas surjective.

L'image de $H^1(\Omega)$ par γ est un espace plus petit que $L^2(\partial\Omega)$ c'est $H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ g \in L^2(\partial\Omega) ; \dfrac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{1+\frac{(n-1)}{2}}} \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega) \right\}$

On peut se restreindre à retenir que

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ g|_{\partial\Omega} ; g \in H^1(\Omega) \right\}.$$

<u>Démonstration du théorème ?.8:</u> On ne va démontrer que la continuité de γ, le prolongement de γ se fait exactement de la même manière que pour $\mathbb{R}^n_+$.

On veut montrer que $\exists\, C > 0$ telle que $\forall u \in C^1(\bar{\Omega})$.

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma(u))^2 \, d\sigma(y) \leq C \left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right]$$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$ induite par la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle.

Pour cela, on utilise les cartes locales pour se ramener à ∂B^+

On introduit une partition de l'unité définies par $I+1$ fonctions θ_i pour $i = 0$ à I telles que:

- $\forall i = 0$ à I . $\theta_i \in C^\infty_c(O_i)$ (voir Zuily)
- $0 \leq \theta_i \leq 1$.
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{I} \theta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.

Alors $\forall u \in C^1(\bar{\Omega})$ (ou $H^1(\Omega)$)

$$u = u \sum_{i=0}^{I} \theta_i = \sum_{i=0}^{I} \theta_i u. \quad \text{et } \theta_i u \in C^1_c(O_i).$$

où on prolonge θ_i par 0 en dehors de O_i.

Donc

$$\int_{\partial\Omega} |\gamma u(y)|^2 \, d\sigma(y) = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^{I} |\theta_i u(y)| \right)^2 d\sigma(y)$$

car $\theta_0(y) = 0$ $\forall y \in \partial\Omega$.

$$\leq I \int_{\partial\Omega\cap O_i} \sum_{i=1}^{I} |\theta_i u(y)|^2 \, d\sigma(y).$$

On utilise alors le changement de variables $y \longmapsto \phi_i(y) = x = (x', x_n$

$\partial\Omega \cap O_i \longrightarrow \Gamma$

et

$$\int_{\partial\Omega\cap O_i} |\theta_i u(y)|^2 d\sigma(y) = \int_{\Gamma} |\theta_i u(\phi_i^{-1}(x))|^2 \, |\det(D\phi_i^{-1}(x))| \, d\sigma(x)$$

$\phi_i \in C^1(O_i)$ donc $\phi_i^{-1} \in C^1(B)$ et $\mathrm{Supp}(\theta_i u) \in \mathrm{Supp}(\theta_i) \subset\subset O_i$ (i.e. est un compact inclus dans O_i).

donc $\mathrm{Supp}((\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}) \subset \mathrm{Supp}(\theta_i \circ \phi_i^{-1}) \subset\subset \mathring{B}$ i.e. compact inclus dans $\mathring{B}$

d'où

$$\sup_{x \in \mathrm{Supp}((\theta_i u)\circ\phi_i^{-1})} |\det(D\phi_i^{-1}(x))| \leq \sup_{x \in \mathrm{Supp}(\theta_i\circ\phi_i^{-1})} |\det(D\phi_i^{-1}(x))| = m_i < +\infty$$

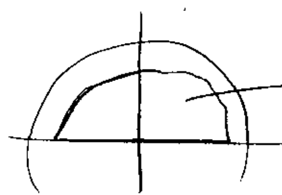
(fonction continue sur un compact atteint ses bornes).

où m_i ne dépend que de ϕ_i et de O_i donc que de Ω.

On a alors

$$\int_{\partial\Omega\cap O_i} |\theta_i u(y)|^2 d\sigma(y) \leq m_i \int_{[-1,1]^{n-1}} |\theta_i u(\phi_i^{-1}(x',0))|^2 \, dx'$$

Remarquons que $(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1} \in C^1_c(B^+ \cup \Gamma)$.



$\mathrm{Supp}(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}$

On peut donc le prolonger par 0 à $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

On note $\widetilde{(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}}(x) = \begin{cases} (\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}(x) & \text{si } x\in B^+ \cup \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D'après le théorème 2.7,

$$\int_{[-1,1]^{n-1}} |(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}(x',0)|^2 dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widetilde{(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}}(x',0)|^2 dx'$$

$$\leq \|\widetilde{(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$= \|(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}\|^2_{H^1(B^+)}.$$

On a donc

$$\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq I\, m_i \sum_{i=1}^{I} \|(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}\|^2_{H^1(B^+)}$$

On va montrer que $\|(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}\|^2_{H^1(B^+)} \leq \beta_i \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$

où β_i ne dépend que de Ω ce qui conclura la démonstratO du théorème 2.8 puisqu'on aura

$$\|\gamma(u)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq I\, m_i \left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right) \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

On a :

$$|\nabla((\theta_i u)\circ\phi_i^{-1})|(x) = \left|(u\,{}^t\nabla\theta_i + \theta_i\,{}^t\nabla u)(\phi_i^{-1}(x))\,\overbrace{D\phi_i^{-1}(x)}^{\text{matrice}}\right|$$

$$\leq \sup_{x\in \operatorname{Supp}\theta_i\circ\phi_i^{-1}} |D\phi_i^{-1}(x)| \left[\sup_{y\in\theta_i}|\nabla\theta_i(y)|\,|u|^{(\phi_i^{-1}(x))} + |\nabla u|^{(\phi_i^{-1}(x))}\right]$$

car $|\theta_i|\leq 1$.

$$\leq \alpha_i \left[|u| + |\nabla u|\right].$$

avec α_i ne dépendant que de Ω

donc

$$\|\nabla(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}\|^2_{L^2} \le 2\alpha_i^2 \int_{Supp(\theta_i\circ\phi_i^{-1})} \left[|u|^2(\phi_i^{-1}(x)) + |\nabla u|^2(\phi_i^{-1}(x)) \right] dx$$

$$= 2\alpha_i^2 \int_{Supp\,\theta_i} \left[|u|^2(y) + |\nabla u|^2(y) \right] \underbrace{|\det D\phi_i(y)|}_{\le \sup_{y\in Supp(\theta_i)} |\det D\phi_i(y)| < +\infty} dy .$$

et donc $\|\nabla(\theta_i u)\circ\phi_i^{-1}\|^2_{L^2(B^+)} \le C_i \|u\|_{H^1(\Omega)}$

On procède de même pour la norme L^2.

Cette notion de trace va nous permettre d'introduire la formule de Green (IPP en dim ≥ 1) pour des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.9: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1. On note $\partial\Omega$ sa frontière et ν la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

Alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)(x)\gamma(v)(x)\, \nu(x).e_i\, d\sigma$$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$ induite par dx et e_i est le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; $e_i = (0,\dots,0,\underset{\uparrow\, i^{ème}\text{ position}}{1},0\dots0)$.

Preuve: Voir Zuily. (par densité des fcts. de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$) voir 29.1 et 29.2

2.3. L'espace $H^1_0(\Omega)$: Ω = ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ quelconque

Définition 2.8: On désigne par $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} .$$

Rmq: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ donc $H^1_0(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$, par contre si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ alors $H^1_0(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

$[H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))' = \mathcal{L}(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})]$

On a le résultat suivant:

Théorème 2.10: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ et $u \in H^1_0(\Omega)$.

On définit $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On rappelle les notions de base suivantes de calcul différentiel.

Définition 1 : On appelle forme différentielle (d'ordre 1) sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ toute fonction $\omega : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui se met sous la forme $\omega(x,y,u,v) = P(x,y)u + Q(x,y)v$. On note $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ où dx et dy sont les projections $dx : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y,u,v) \mapsto u$ et $dy : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y,u,v) \mapsto v$.

Définition 2 : Soit γ un arc de courbe défini par sa représentation paramétrique $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t),y(t))$ où $a,b \in \mathbb{R}$. On suppose γ de classe C^1, c'est à dire $x,y \in C$

On appelle intégrale curviligne le long de γ d'une forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$ le nombre réel

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right] dt$$

Définition 3 : * On appelle compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$, toute partie de $\mathbb{R}^2$ définie par 1 ou 2 où

1 : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ a \le x \le b \text{ et } y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

où $a,b \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in C([a,b],\mathbb{R})$.

2 : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ a \le y \le b \text{ et } x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$.

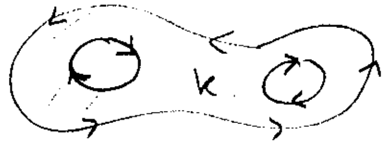
où $a,b \in \mathbb{R}$ et $x_1, x_2 \in C([a,b],\mathbb{R})$.

* On appelle compact simple de $\mathbb{R}^2$, toute réunion finie de compacts élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints

Formule de Green-Riemann : Soit K un compact simple de $\mathbb{R}^2$, $P, Q \in C^1(K)$ on a alors

$$\iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right](x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial K^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

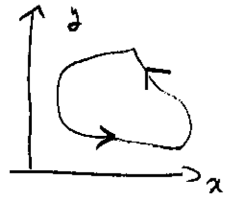
(∂K^+) signifie que la frontière ∂K de K est orientée de sorte à laisser le compact K sur la gauche



On admettra que les résultats précédents sont encore vrais pour un ouvert borné de classe C^1. On commence par montrer la formule de Green pour des fonctions régulières.

Soient donc $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, on suppose que $\partial\Omega$ est décrit par le paramétrage
$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$ (dans le sens positif)
$$t \longmapsto (x(t), y(t)) = \Gamma(t)$$

On rappelle que $(x'(t), y'(t))$ est un vecteur tangent au point $\Gamma(t)$ et donc $(y'(t), -x'(t))$ est une normale non unitaire extérieure à Ω. On a alors la "normale extérieure unitaire" donnée par
$$\nu(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{|y'(t)|^2 + |x'(t)|^2}} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\Gamma'(t)\|_2}.$$



et $$\int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu.e_1 \, d\sigma(x) := \int_a^b u(x(t), y(t))\, v(x(t), y(t))\, \nu(t).e_1 \, \|\Gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

On définit la forme différentielle $\omega = 0\,dx + u(x,y)v(x,y)\,dy$ et la formule de Green-Riemann nous donne

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(uv)\, dx\, dy = \int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}\right] dx\, dy$$
$$= \int_{\partial\Omega^+} u(x,y)\, v(x,y)\, dy$$
$$= \int_a^b (uv)(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt = \int_a^b (uv)(x(t), y(t))\, \nu(t).e_1 \, \|\Gamma'(t)\|_2 \, dt$$

ce qui démontre la formule de Green dans le cas régulier.

On procède par densité pour $u, v \in H^1(\Omega)$

Alors $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Preuve: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer qu'il existe $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_j \longrightarrow \tilde{u}$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

$u \in H_0^1(\Omega)$ donc, $\exists\ (u_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$u_j \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

$\forall j \geq 0$, $u_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $\tilde{u}_j$ (prolongée de u_j par 0) $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\|\tilde{u}_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|u_j\|_{H^1(\Omega)}$.

$$\|\tilde{u}_j - \tilde{u}_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|\widetilde{u_j - u_m}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \underbrace{\|u_j - u_m\|_{H^1(\Omega)}}_{j,m \to +\infty}$$

donc $(\tilde{u}_j)$ est de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ qui est complet.

Ainsi $\tilde{u}_j \longrightarrow v$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Mais $\|\tilde{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)} = 0$ car $\tilde{u}_j = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$

donc $v = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ et donc p.p. dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

de même $\|\tilde{u}_j - u\|_{L^2(\Omega)} = \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ car $u_j \to u$ dans H^1 donc

$\tilde{u}_j \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ donc $v|_\Omega = u$ dans $L^2(\Omega)$

et donc p.p. dans Ω.

ainsi $\tilde{u}_j \longrightarrow \tilde{u}$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|\tilde{u}_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \text{ et } \|\tilde{u}_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|u_j\|_{H^1(\Omega)} \to \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

donc $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$

<u>Remarque</u>: Grâce à ceci on montre facilement que $H^1(]a,b[) \neq H^1_0(]a,b[)$.

En effet, soit $u(x) = 1 \ \forall x \in]a,b[$ alors $u \in H^1(]a,b[)$ mais $(\tilde{u})'(x) = \delta_a(x) - \delta_b(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\tilde{u} \notin H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u \notin H^1_0(]a,b[)$.

<u>Théorème 2.11</u>: Soit Ω un ouvert de classe C^1.

$$H^1_0(\Omega) = \mathrm{Ker}(\gamma) = \{u \in H^1(\Omega) ; \gamma(u) = 0\}$$

<u>Preuve</u>: $H^1_0(\Omega) \subset \mathrm{Ker}(\gamma)$ ok (démontrer par suites de $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$ trace nulle puis continuité de γ.), réciproque plus technique cf. Raviart et Thomas.

Ce résultat permet de caractériser les fonctions de $H^1_0(\Omega)$ comme les fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord de Ω.

On montre alors une inégalité très célèbre.

<u>Théorème 2.12</u>: (Inégalité de Poincaré)

On suppose que Ω est un ouvert <u>borné</u> de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1.
Alors $\exists C_\Omega > 0$, ne dépendant que de Ω, telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

<u>Preuve</u>: Deux démonstrations possibles, une directe et l'autre par l'absurde.
On donne la dem. directe

$$\int_\Omega u(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x)^2 dx.$$

Mais Ω étant borné, $\exists R > 0$ tel que Ω est contenu dans la bande $-R < x_n < R$.

On a alors

$$\tilde{u}(x) = \underbrace{\tilde{u}(x', -R)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \int_{-R}^{x_n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', s)\, ds .$$

et donc.

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{x_n} \frac{\partial \tilde{u}(x', s)}{\partial x_n} ds \right)^2 dx_n\, dx'$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{u}(x', s)}{\partial x_n} \right|^2 ds \int_{-R}^{x_n} 1\, ds\, dx_n\, dx'$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-R}^{R} \left| \frac{\partial \tilde{u}(x', s)}{\partial x_n} \right|^2 ds \underbrace{\int_{-R}^{R} \int_{-R}^{x_n} 1\, ds\, dx_n}_{2R^2} \right) dx'$$

$$\leq 2R^2 \cdot \underbrace{\|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}_{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}} .$$

Sur suite de $C^\infty_c(\Omega)$.
puis passage à la limite !

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration par l'absurde :

On va utiliser un résultat de compacité très célèbre : le théorème de Rellich :

Théorème 2.13 : (Rellich). On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Alors $\quad H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

avec injection compacte

(L'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte)

Que veut dire ce théorème ? Naturellement toute fonction de $H^1(\Omega)$ est une fonction de $L^2(\Omega)$ donc l'information importante est dans « injection compacte ».

Cela signifie que tout ensemble borné de $H^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. C'est à dire que $\forall E \subset H^1(\Omega)$ tel que $\exists C > 0$ telle que $\forall u \in E$; $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Alors pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0} \subset E$, $\exists$ une sous suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ notée $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ et $u \in L^2(\Omega)$ tels que

$$u_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

Pour la démonstration de Rellich voir le livre de Brezis.

Utilisons ce résultat pour démontrer l'inégalité de Poincaré.

On raisonne par l'absurde. Supposons que ce résultat soit faux. Alors $\forall C>0, \exists u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} > C \;\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

donc $\forall n>0, \;\; \exists u_n \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n \;\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$ alors $v_n \in H^1_0(\Omega)$ et

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_{L^2}} < \frac{1}{n}.$$

donc $\nabla v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $L^2(\Omega)$.

de plus $\forall n>0, \;\; \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ donc d'après le théorème de Rellich, $\exists \, (v_{n_k})_{k\geq 0}$ et $v \in L^2(\Omega)$ tels que

$$v_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} v \text{ dans } L^2(\Omega). \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

$$\left(\text{car } \Big| \underbrace{\|v_{n_k}\|_{L^2}}_{=1} - \|v\|_{L^2} \Big| \leq \|v_{n_k} - v\|_{L^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \right)$$

D'après la continuité de la trace dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$v_{n_k} \longrightarrow v$ dans L^2 donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\Rightarrow \nabla v_{n_k} \longrightarrow \nabla v \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Mais $\nabla v_{n_k} \longrightarrow 0$ dans L^2 donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On en déduit $\nabla v = 0$ p.p dans $\Omega \Rightarrow v = cste$ p.p.
Mais $\forall k \geq 0$ $v_{n_k} \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \gamma(v_{n_k}) = 0$ et donc par continuité de γ, $\gamma(v) = 0$ mais $v = cste \Rightarrow v = 0$ p.p dans Ω

ce qui est absurde puisque $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Corollaire: $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, on définit $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

Preuve:
$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$

et $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega + 1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

où C_Ω est la constante de Poincaré.

On a une inégalité du même type pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'appelle inégalité de Poincaré-Wirtinger : connexe

Théorème 2.14 On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, alors $\exists C > 0$, ne dépendant que de Ω, telle que $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

où $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\,dx$ et $|\Omega| = \int_\Omega dx$

Preuve : voir exercices.

3°) Trace des fonctions de $H^2(\Omega)$ et formule de Green

Dans ce paragraphe Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

On rappelle que

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \ \forall i, j = 1 \text{ à } n \right\}.$$

Notons que si $u \in H^2(\Omega)$, alors $\nabla u \in (H^1(\Omega))^n$ et donc on sait définir ∇u sur le bord de Ω et bien sur $u \in H^1(\Omega)$ donc on sait aussi définir u sur le bord de Ω.

On notera $\gamma(\nabla u) \in (L^2(\partial\Omega))^n$ bien que l'on devrait noter $\begin{pmatrix} \gamma(\frac{\partial u}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ \gamma(\frac{\partial u}{\partial x_n}) \end{pmatrix}$; On rappelle de plus que $\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$

Théorème 2.15: (Formule de Green pour le laplacien).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné de classe C^2, $\forall u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(\nabla u) \cdot n\, \gamma(v)\, d\sigma(x)$$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$ induite par la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle.

Preuve: On utilise le Théorème 2.9.

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v(x)\, dx$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$
$\Rightarrow$ on peut utiliser 2.9

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(- \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, \nu . e_i \, d\sigma(x) \right).$$

$$= - \int_{\Omega} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)}_{\nabla u . \nabla v.} dx + \int_{\partial\Omega} v \, \nu . \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} e_i \right)}_{\nabla u} d\sigma(x)$$