Partie 0 : Introduction

I Qu'est ce qu'une équation aux dérivées partielles ?

C'est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivées de cette fonction

L'inconnue : $u : \mathbb{R}^n$ (ou Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto u(x)$$

L'équation :

$$F\left(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^P u(x)\right) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ (ou Ω).

avec $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^P} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

p est appelé l'ordre de cette e.d.p.

II Exemples et classification des e.d.p

Les e.d.p. proviennent de la modélisation (transcription mathématique) de problèmes intervenant en physique, en chimie, en biologie, en finance, ...

On distingue 3 grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

* Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson.

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x)$$

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

* Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \alpha \, \Delta T \, (x,t) = 0 \qquad \forall \, x \in \Omega \text{ et } \forall t > 0$$

où $\alpha > 0$ est donné.

* Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont

- l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \forall \, x \in \Omega \subset \mathbb{R}, \, \forall t > 0$$

$a \in \mathbb{R}$ donné

- l'équation des ondes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}, \; \forall t > 0.$$

Pourquoi les appellations elliptique, parabolique et hyperbolique ? Elles viennent du fait que si l'on considère une e.d.p. d'ordre 2 (i.e. faisant intervenir des dérivées d'ordre ≤ 2) à coefficients constants du type

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = 0$$

avec a, b, c, d, e, f dans $\mathbb{R}$ donnés, alors cette e.d.p. est dite

- elliptique si $q(x,y) = a x^2 + b x y + c y^2$ est une ellipse
- parabolique si ________________ parabole
- hyperbolique si ________________ hyperbole.

Il est facile de vérifier cette propriété pour les équations de Poisson, de la chaleur et des ondes.

Pourquoi hyperbolique pour l'équation de transport ?

Remarquons que l'équation des ondes s'écrit aussi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \text{si } \varphi_0 = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \varphi_1 = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial t}\vec{U} + A\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{0}$$ équation de transport en dimension 2.

Bien sur la modélisation de problèmes pratiques conduit à des systèmes d'é.d.p. bien plus complexes que ceux cités dans ce paragraphe pour lesquels on ne sait pas toujours montrer l'existence de solutions

III Objectifs de ce cours :

Le but de ce cours est d'introduire des méthodes d'études visant à répondre au problèmes suivants :

- existence de solutions
- unicité de la solution
- régularité (en quel sens est vérifiée l'éq.)
- propriétés qualitatives (ex : continuité par rapport aux données du problème

On s'attachera également à décrire des méthodes numériques pour résoudre de manière approchée les problèmes considérés.

Nous commencerons par l'étude des edps elliptiques, puis celles paraboliques, pour terminer par une introduction aux pbs hyperboliques

Partie I : Equations elliptiques linéaires d'ordre 2.

Chapitre 1 : Introduction et exemple simple.

I Forme générale :

On se donne Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et n^2+1 fonctions de $L^\infty(\Omega)$ notées $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ pour tout $i, j = 1$ à n et $a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$.

On considère alors l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par

$$(1.1) \quad \mathcal{L} u(x) = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) + a_0(x)\, u(x).$$

pour presque tout $x \in \Omega$

On suppose qu'il existe $\alpha_0 \geq 0$ telle que

$$(1.2) \qquad a_0(x) \geq \alpha_0 \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Définition 1.1 : On dit que $\mathcal{L}$ est (uniformément) elliptique s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

pour presque tout $x \in \Omega$ et $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.
et où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Remarque: Nous verrons que suivant les problèmes considérés, la constante α_0 peut être choisie nulle et même prendre certaines valeurs négatives

L'exemple classique : le laplacien.

$$\mathcal{L}u(x) = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)}_{\Delta u(x) =} \quad \forall x \in \Omega$$

Dans ce cas $a_{ii} \equiv 1 \quad \forall i = 1$ à n et $a_{ij} \equiv 0$ $\forall i,j = 1$ à n tels que $i \neq j$, on note $a_{ij} \equiv \delta_{ij} \; \forall i,j$.

Notons que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = |\xi|^2$.

donc on peut choisir $\alpha = 1$.

II Un exemple simple.

On commence par regarder un exemple très simple en dimension une, afin de bien comprendre les propriétés caractéristiques des équations elliptiques. (linéaires d'ordre 2).

On considère l'équation de Poisson en dimension une avec conditions aux limites (C.L) de Dirichlet homogène.

$$(1.3) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$ est donnée.

Remarque:

1°) (1.3) n'est pas une e.d.p. (equation aux dérivées partielles mais une équation différentielle.

2°) Les conditions aux limites $u(0)=u(1)=0$ sont dites de Dirichlet homogène : Dirichlet car on impose la valeur de la fonction u au bord. (on pourrait imposer la valeur de u') et homogène car la valeur imposée est 0.

Proposition 1.1: $\forall f \in C([0,1])$, $\exists ! \, u \in C^2([0,1])$ solution (classique) de (1.3) et donnée par

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) \, dy \quad \forall x \in [0,1] \tag{1.4}$$

où G s'appelle la fonction de Green du problème et est définie par

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ x(1-y) & \text{si } x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Démonstration: Voir exercice 1 feuille 1.

De l'expression (1.4), nous allons déduire plusieurs propriétés qui sont caractéristiques des solutions de problèmes elliptiques.

Propriété 1.1: La solution dépend de manière continue du paramètre (ou de la donnée) f. C'est à dire que

· la fonction :

Démonstration de la proposition 1. 1.

1°) Existence: Pour montrer l'existence, on peut procéder de 2 façons. Soit on intègre 2 fois l'équat° (1.3), soit on montre directement que l'expression (1.4) est sol° de (1.3).
On va montrer que (1.4) est solution de (1.3).

Soit u donnée par (1.4), alors $\forall x \in [0,1]$.

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy\right).$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x y(1-x)\, f(y)\, dy + \int_x^1 x(1-y) f(y)\, dy\right)$$

$$= \cancel{x(1-x)f(x)} - \int_0^x y\, f(y)\, dy - \cancel{x(1-x)f(x)} + \int_x^1 (1-y) f(y)\, dy$$

$$= \int_x^1 f(y)\, dy - \int_0^1 y\, f(y)\, dy.$$

Notons déjà que $u \in C^1([0,1])$.

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = -f(x)$$ donc $u \in C^2([0,1])$ et est solution de (1.3).

Remarque 3 : On aurait pu être tentés d'écrire

$$\frac{du}{dx}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(x,y) f(y)\, dy .$$

mais ceci est faux car $\begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G(x,y) \end{array}$. n'est pas dérivable sur $[0,1]$ pour tout $y \in [0,1]$.

2°) Unicité :

Le problème étant linéaire, il suffit de montrer que si $f \equiv 0$ alors toute solution de (1.3) est nulle.

(Si u_1 et u_2 sont 2 solutions de (1.3) pour f donnée alors

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}(u_1 - u_2)(x) = 0 . \\ u(0) = u(1) = 0 . \end{cases}$$).

Pour montrer ce résultat, il suffit de montrer que toute solution de (1.3) s'écrit sous la forme (1.4).

En effet $\forall x \in [0,1]$. $\int_0^1 G(x,y)\, 0\, dy = 0$.

Soit donc u solution de (1.3), en intégrant 2 fois, on obtient :

$$u(x) = -\int_0^x \left(\int_0^s f(y)\, dy \right) ds + ax + b .$$

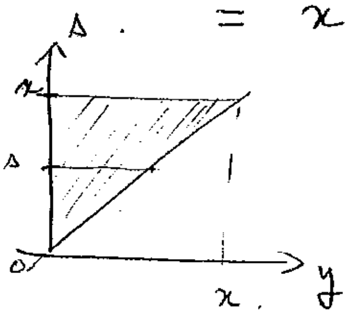
avec $a, b \in \mathbb{R}$ déterminées par les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$.

On obtient $b = 0$ et $a = \int_0^1 \int_0^s f(y)\,dy\,ds$.

D'où $\forall x \in [0,1]$.

$$u(x) = x \int_0^1 \int_0^s f(y)\,dy\,ds - \int_0^x \int_0^s f(y)\,dy\,ds.$$

Fubini



$$= x \int_0^1 \int_y^1 f(y)\,ds\,dy - \int_0^x \int_y^x f(y)\,ds\,dy.$$

$$= x \int_0^1 f(y)(1-y)\,dy - \int_0^x (x-y) f(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 f(y)\left[x(1-y) - (x-y)\,\chi_{[0,x]}(y)\right]dy$$

où $\chi_{[0,x]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,x]$ donnée par $\chi_{[0,x]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0,x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Soit $G : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(x,y) = x(1-y) - (x-y)\,\chi_{[0,x]}(y) \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

alors si $y \in [0,x]$, $G(x,y) = x(1-y) - (x-y) = y(1-x)$

et si $y \in]x,1]$, $G(x,y) = x(1-y)$.

Ce qui termine la démonstration de la proposition 1.

$$T : C([0,1]) \longrightarrow C^2([0,1])$$
$$f \longmapsto u \text{ solution de } (1.3).$$
est continue

<u>Preuve</u>: T est linéaire. (exercice : si $u_1 = T(f_1)$ et $u_2 = T(f_2)$ alors $-(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)'' = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$).

il suffit donc de montrer que

$$\|T(f)\|_{C^2([0,1])} \leq C \, \|f\|_{C([0,1])} \quad \forall f \in C([0,1])$$

où $C > 0$ est indépendante de f

Rappelons que $\|f\|_{C([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

et $\|u\|_{C^2([0,1])} = \|u\|_{C([0,1])} + \|u'\|_{C([0,1])} + \|u''\|_{C([0,1])}$

Soient, donc, $f \in C([0,1])$ et u solution de (1.3) alors d'après la Proposition 1.1, $\forall x \in [0,1]$.

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$$

$$= \int_0^x y(1-x) f(y)\, dy + \int_x^1 x(1-y) f(y)\, dy.$$

donc $u'(x) = \cancel{x(1-x)f(x)} - \int_0^x y f(y)\,dy$

$$- \cancel{x(1-x)f(x)} + \int_x^1 (1-y) f(y)\,dy.$$

$$= \int_x^1 f(y)\,dy - \int_0^1 y f(y)\,dy.$$

et $u''(x) = f(x)$.

$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \; |G(x,y)| \leq 1$.

donc $\|u\|_{C^2([0,1])} \leq 4 \|f\|_{C([0,1])}$.

La 2ème propriété importante est le principe du maximum. ■

<u>Propriété 1.2:</u> (Principe du maximum).

Soient $f \in C([0,1])$ et u solution de (1.3) alors

$$f \geqslant 0 \implies u \geqslant 0.$$

<u>Preuve:</u> On suppose $f(x) \geqslant 0 \; \forall x \in [0,1]$.

remarquons alors que $G(x,y) \geqslant 0 \; \forall x,y \in [0,1]$

donc $u(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive et est donc positive.

■

La dernière propriété est une propriété de délocalisation du support :

Propriété 1.3 : Soit $f \in C([0,1])$ telle que $f \geq 0$ et $\mathrm{supp}(f) \subset [x_0, x_0+\varepsilon]$ avec $x_0 \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$, on considère u solution de (1.3) alors

$$\forall x \in]0,1[\,,\ u(x) > 0.$$

Preuve : Il suffit de remarquer que $G(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in]0,$

Donc $\forall x \in]0,1[$.

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy = \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} G(x,y) f(y)\, dy > 0.$$

Bilan : On retiendra qu'une équation elliptique

- est régularisante, ($f \in C([0,1]) \Rightarrow u \in C^2([0,1])$)
- a une solution qui dépend de manière continue des données
- a une solution positive si les données sont positives
- a (en général) une solution non nulle sur tout l'intérieur du domaine même si les données ne sont non nulles que sur un très petit sous domaine.

Le but de cette partie est d'étendre ces résultats (y compris existence et unicité de solutions) pour des problèmes elliptiques linéaires d'ordre 2 avec des données non nécessairement régulières ($f \notin C([0,1])$)

Notons qu'il faudra définir en quel sens l'équation est vérifiée.