Mise à niveau - Analyse

1 Sommes et produits

Exercice 1. Écrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les expressions suivantes :

1. $2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{41}$
2. $1 \times (-2) \times 3 \times (-4) \times \cdots \times (\pm m)$
3. $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots - \dfrac{x^{10}}{10!} + \dfrac{x^{12}}{12!}$
4. $1 \times n + 2 \times (n-1) + \cdots + (n-1) \times 2 + n \times 1$

Exercice 2. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels. Compléter les pointillés dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{\ell=\ldots}^{\ldots} a_{\ell-1}, \quad \prod_{k=2}^{m+1} a_k = \prod_{\ell=0}^{\ldots} a_{\ldots}\ .$$

Exercice 3. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 4. En utilisant que $k = (k+1) - 1$, calculer $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.(k!)$ et $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 5. On souhaite calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

1. (a) Vérifier que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 2^k$.

   (b) À l'aide d'une interversion des sommes, déterminer une expression explicite de S.

2 Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 6. Montrer, en représentant $z \in \mathbb{C}$ dans le plan complexe, à quoi correspondent les quantités $a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$ de la forme algébrique $z = a + ib$ et de la forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que : $\quad |z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}i$

Exercice 8.

1. Montrer par récurrence la formule de la somme d'une suite géométrique de nombres complexes.
2. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{ix} = 1$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
4. Trouver la forme algébrique de S.
5. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

Exercice 9.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$ en fonction de $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\sin(\alpha)$ et $\sin(\beta)$. (Démontrer ces formules)

2. Faites un dessin (le cercle trigonométrique) pour illustrer l'encadrement suivant :
   $\forall\, h \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \le \sin(h) \le h \le \tan(h)$.
   En déduire la limite de $\sin(h)/h$ quand h tend vers 0.
3. Soit $h \in \mathbb{R}$. Montrer que
   $$(\cos(h) - 1) = -\frac{(\sin(h))^2}{\cos(h) + 1}.$$
   En déduire la limite de $(\cos(h) - 1)/h$ quand h tend vers 0.
4. Montrer que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.
   Rappel : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

3 Fonctions usuelles

Exercice 10.

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes :
   $\ln(\frac{4}{e^2}),\ \frac{1}{2}\ln(\frac{4}{25}),\ (e^3)^{12},\ \frac{e^{2x}}{e^{3x}},\ (e^x + e^{-x})^2,\ \frac{9^{\alpha+1}}{3^{2\alpha+1}}$.
2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $e^{2x} - e^{-3x},\ \ln(e^x),\ e^{\frac{1}{x}},\ e^{\sqrt{2x-1}},\ (\ln(\frac{1}{x}))^3$.
3. Déterminer les limites suivantes.

   (a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{(x+2)^2}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$ (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3$ (d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2 - x}{x}}$

4. Calculer les développements limités suivants (utiliser les développements usuels sur internet).

   (a) $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0.
   (b) $(x^3 + 1)\sqrt{1 - x}$ à l'ordre 3 en 0.
   (c) $(\ln(1 + x))^2$ à l'ordre 4 en 0.
   (d) $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 11. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 1$.

1. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
2. Vérifier que $g(0) = 0$.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{-5x + 3}{x - 2}$.

1. Soit $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x - 2}$.
2. Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Dresser le tableau de variation f.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et monotone. Montrer que f est constante.

4 Calcul différentiel

Exercice 14. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $g(x, y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$.

Exercice 15. Calculer le gradient des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$.
2. $g(x, y, z) = xy + yz + zx$.

Exercice 16. Calculer la matrice jacobienne des fonctions suivantes.

1. $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $g(x, y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2)\right)$.

Exercice 17. En calculant la matrice hessienne aux points critiques, déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$
2. $g(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

5 Convexité (en bonus)

Exercice 18. Soit $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Étudier la convexité de f.
3. En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathcal{D}_f$, on a : $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$

Exercice 19. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée seconde positive. On veut montrer que si f une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ alors f est décroissante.

1. (Exemple) Montrer que $f : x \mapsto e^{-x}$ satisfait les hypothèses et la conclusion.
2. (Cas général) Montrer le cas général.

Exercice 20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

1. Est-il possible de réduire le domaine d'étude de f ?
2. Étudier les variations de f et préciser les limites aux bornes.
3. Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de la branche infinie.
4. Étudier la convexité de f et calculer les coordonnées des points d'inflexions éventuels.
5. Tracer la courbe représentative de f en précisant les tangentes en 0 et aux points d'inflexions.

Exercice 21. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Démontrer les inégalités $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q$ avec :

$$m_a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \qquad m_q = \sqrt{\frac{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n}}, \qquad m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$
$$m_g = (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 22. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Montrer que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$ alors f admet un minimum en x_0.
2. Montrer que s'il existe $(x_0, x_1) \in I^2$ tel que $x_0 < x_1$ et $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$ alors f est constante sur $[x_0, x_1]$.