UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Présentée par

Mihai MARIŞ

Existence et propriétés qualitatives des solutions de quelques problèmes elliptiques non-linéaires

Soutenue le 4 décembre 2008 devant le jury composé de :

M.	Fabrice BÉTHUEL,	Université de Paris VI,	examinateur
M.	Alberto FARINA,	Université de Picardie Jules Verne,	examinateur
M.	Patrick GÉRARD,	Université de Paris XI,	rapporteur
M.	Frank PACARD,	Université de Paris XII,	rapporteur
M.	Eric SÉRÉ,	Université de Paris IX,	examinateur
M.	Michel WILLEM,	Université Catholique de Louvain,	rapporteur

Remerciements

Je suis profondément reconnaissant à Jean-Claude Saut, qui a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique. Ses conseils, ses encouragements, son enthousiasme et sa générosité ont toujours été pour moi un soutien important. Une partie des travaux présentés dans ce mémoire ont l'origine dans ses questions.

Je remercie très chaleureusement les professeurs Patrick Gérard, Frank Pacard et Michel Willem qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de consacrer une partie de leur temps à l'évaluation de mes travaux.

Je remercie vivement les professeurs Fabrice Béthuel, Alberto Farina et Eric Séré qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Il m'est particulièrement agréable de remercier mes collaborateurs Orlando Lopes, Jaeyoung Byeon, Louis Jeanjean. J'espère que le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux a été (au moins partiellement) partagé.

Je tiens à remercier mes collègues de bureau Annabella Badino, Juan-Pablo Ortega, Brigitte Duffaud, les membres de l'équipe EDP de Besançon : Nathael Alibaud, Farid Ammar-Khodja, Boris Andreianov, Nabile Boussaid, Matthieu Brassart, Cédric Dupaix, Mariana Haragus, Louis Jeanjean, Mustapha Mokhtar-Kharroubi, ainsi que Mihai Bostan et Patrick Hild, qui m'ont entouré de leur sourire, de leur sympathie et de leur enthousiasme pendant toutes ces années. Merci également à Jean-Yves Dauxois et à Boris Andreianov qui m'ont fait part de leur soutien dans des moments parfois difficiles. Je ne peux pas oublier toutes les personnes qui travaillent au Laboratoire de Mathématiques de Besançon et qui par leur compétence, leur disponibilité et leur gentillesse ont contribué à la réussite de mon travail : que Odile Henry, Catherine Pagani, Catherine Vuillemenot et Monique Diguglielmo en soient remerciées.

Existence et propriétés qualitatives des solutions de quelques problèmes elliptiques non-linéaires

Mémoire présenté pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches

par

Mihai MARIŞ

Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques UMR 6623
16, Route de Gray
25030 Besançon, France
e-mail: mihai.maris@univ-fcomte.fr

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur l'existence et l'étude qualitative des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires, et tout particulièrement des solutions ayant une structure spatiale et temporelle bien définie, appelées suivant les cas ondes stationnaires, ondes progressives, ondes solitaires, ou de manière générale *ondes non linéaires*. Ces structures sont bien observées expérimentalement et numériquement, et très souvent jouent un rôle majeur dans la dynamique des systèmes correspondants.

Les systèmes considérés sont des modèles concrets issus de la mécanique des fluides, de la superfluidité, de la superconductivité ou de la physique des transitions de phase. A titre d'exemples, on peut citer les très nombreux modèles représentant différentes approximations de la propagation des ondes à la surface libre d'un fluide (équations de Benjamin-Ono, de Kadomtsev-Petviashvili, ou de Benney-Luke). D'autre part, il convient de mentionner les différentes variantes de l'équation de Schrödinger non-linéaire (comme l'équation de Gross-Pitaevskii, l'équation de Hartree ou l'équation de Schrödinger avec nonlinéarité de type "$\psi^3 - \psi^5$") qui interviennent dans l'étude des condensats de Bose-Einstein, la supraconductivité et la superfluidité.

1 Travaux de recherche pendant la thèse

1.1 Régularité et décroissance

Dans un premier temps, je me suis intéressé aux propriétés qualitatives des ondes non linéaires pour quelques équations issues de la mécanique des fluides, plus précisément à leur régularité et à leur taux de décroissance à l'infini. On a utilisé la théorie classique des multiplicateurs de Fourier pour obtenir la régularité dans les espaces de Sobolev $W^{k,p}$, respectivement la théorie de Paley-Wiener pour démontrer l'analyticité des solutions.

Les propriétés de décroissance ont été prouvées en utilisant une technique générale qui consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en une équation de convolution. Pour donner un exemple, considérons une équation de la forme $P(D)(u) = F(u)$ dans $\mathbf{R}^N$. En utilisant la transformation de Fourier cette équation est équivalente à $P(i\xi)\widehat{u} = \mathcal{F}(F(u))$. Si l'opérateur $P(D)$ est elliptique, on peut écrire $\widehat{u} = \frac{1}{P(i\xi)}\mathcal{F}(F(u))$ ou encore $u = k * F(u)$, où $k = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{P(i\xi)})$. Dans beaucoup d'exemples concrets, le noyau k est une fonction qui décroît assez rapidement lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Si $|F(u)| \leq C|u|^r$ pour u proche de zéro, où $r > 1$, et si l'on dispose d'une estimation sur la vitesse de convergence de u vers 0 à l'infini, en utilisant l'équation de convolution on peut améliorer successivement cette estimation. Dans la plupart des applications on obtient que u tend vers zéro (au moins) aussi rapidement que le noyau k.

Cette technique avait été utilisée dans [LiBo96] et [BoLi97] pour des problèmes unidimensionnels et dans [dBS97] pour les ondes solitaires de l'équation de Kadomtsev-Petviashvili en dimension 2 et 3. Elle a été utilisée par la suite par P. Gravejat pour les ondes progressives de l'équation de Gross-Pitaevskii.

On a montré dans [1] que les ondes solitaires de l'équation de Benney-Luke (dont l'existence avait été prouvée en 1998 par R. L. Pego et J. L. Quintero) sont des fonctions analytiques et on a trouvé leur taux algébrique optimal de décroissance à l'infini. Dans [2] on a montré l'existence, l'analyticité et on a trouvé le taux optimal de décroissance des ondes solitaires d'une généralisation bidimensionnelle de l'équation de Benjamin-Ono.

1.2 Existence des ondes non-linéaires

A. Une équation de Schrödinger non-linéaire avec potentiel en dimension 1. Dans [4] on a étudié l'équation

$$(1.1) \qquad iA_t - ivA_x = -A_{xx} - A + |A|^2 A + U(x)A, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

qui décrit l'écoulement derrière un obstacle fixe d'un fluide injecté avec une vitesse constante v à l'infini. Le potentiel U est une mesure positive qui modélise l'obstacle. L'équation (1.1) a été étudiée à l'aide des développements asymptotiques formels et des simulations numériques par V. Hakim pour quelques types particuliers de potentiel.

On a cherché des solutions stationnaires (i.e. indépendantes de t) dont le module tend vers ± 1 à l'infini. On a réussi à montrer que, si le potentiel U n'est pas trop grand, deux telles solutions existent : l'une est obtenue comme un minimiseur de l'énergie associée à (1.1), l'autre est un point selle de l'énergie. L'existence d'un minimiseur est classique. La preuve de l'existence d'une deuxième solution est beaucoup plus délicate et repose sur une variante du Lemme du Col due à Ghoussoub et Preiss. La difficulté majeure est d'obtenir des informations assez précises sur les suites de Palais-Smale afin de déduire leur convergence et de montrer que leur limite est différente de la solution obtenue par minimisation.

B. Existence des bulles instationnaires. L'objectif de l'article [3] a été d'étudier l'existence des ondes progressives (appelées également "bulles instationnaires") de petite vitesse pour l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + F(|\psi|^2)\psi = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^N, \tag{1.2}$$

où ψ est une fonction complexe qui satisfait la "condition aux limites" $|\psi| \longrightarrow r_0 > 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$ et la nonlinéarité est de type "$\psi^3 - \psi^5$". Les bulles sont des solutions de la forme $\psi(x,t) = \phi(x_1 - ct, x_2, \ldots, x_N)$. L'existence de telles solutions en dimension un d'espace a été prouvée dans [BaMa88].

On a utilisé une approche variationnelle : les bulles sont des points critiques d'une fonctionnelle $E_c(u) = E(u) + cQ(u)$, où E est "l'énergie" associée à (1.2) et Q est le moment. Une technique classique pour montrer l'existence des points critiques consiste à mettre en évidence un changement de topologie entre deux ensembles de niveau de la fonctionnelle, et ensuite à prouver une propriété de compacité des suites de Palais-Smale. Cependant, les ensembles de niveau de E_c ont une structure bien compliquée et il semble très difficile de montrer un changement au niveau global dans leur topologie. D'autre part, il est également difficile de montrer la compacité des suites de Palais-Smale. Pour surmonter ces difficultés, nous avons prouvé une variante locale du Lemme du Col. Ce résultat abstrait permet de trouver des suites de Palais-Smale bornées lorsqu'on dispose d'une information concernant un changement dans la structure des ensembles de niveau uniquement localement, au voisinage d'un point. D'autre part, nous disposons d'un *état fondamental* u_0 de E qui possède des propriétés tout à fait remarquables : il est un point critique de E et il est un minimum local strict de E sur un sous-espace fonctionnel de codimension 1. D'une manière heuristique, il existe une "cuvette" autour de u_0 sur un sous-espace de codimension 1. En dimension au moins égale à 4, la hauteur de la "cuvette" est strictement positive et cette structure subsiste lorsqu'on rajoute à E une "perturbation" cQ avec c suffisamment petit. Cette observation ainsi que le résultat abstrait mentionné nous ont permis de montrer l'existence des bulles instationnaires de petite vitesse.

2 Symétrie des solutions des équations aux dérivées partielles

Le fait de savoir que les solutions d'une EDP présentent des symétries est très important à la fois pour leur étude théorique que pour leur approximation numérique. Les symétries peuvent aussi s'avérer très utiles pour l'étude de la stabilité des ondes solitaires ou des ondes stationnaires de certaines EDP d'évolution. En général, la symétrie constitue la première étape dans la preuve de l'unicité des solutions de certaines EDP elliptiques.

Jusqu'à présent il existe dans la littérature trois méthodes générales pour montrer de telles symétries. La première a été développée par Gidas, Ni et Nirenberg à la fin des années '70 et est basée sur les "moving planes" et le principe de maximum. Elle est applicable aux solutions positives dans des problèmes qui font intervenir le Laplacien. Une autre méthode repose sur l'utilisation de la symétrisation de Schwarz d'une fonction. Elle permet de montrer qu'il existe des solutions symétriques pour un probleme de minimisation. (Notons, par ailleurs, que dans beaucoup de situations les ondes non-linéaires sont obtenues en minimisant une certaine fonctionnelle, avec ou sans contrainte). En général, cette méthode n'implique pas directement que *toutes* les solutions sont symétriques. L'utilisation de ces deux méthodes dans le cas des systèmes est parfois possible, mais elle reste assez limitée car, d'une part, le signe de chacune des composantes de la solution doit être constant, d'autre part on a besoin de conditions assez fortes (et souvent irréalistes) sur les nonlinéarités. Afin d'éviter ces inconvenients, O. Lopes a proposé en 1996 dans [Lop1, Lop2] une méthode étonnament simple et efficace pour montrer la symétrie des minimiseurs. Nous présentons ci-dessous le résultat de [Lop1].

Théorème 2.1 *([Lop1]) Soit $u \in H^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^m)$ un minimiseur de la fonctionnelle*

$$V(u) := \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^N} F(u)\, dx$$

sous la contrainte $I(u) := \int_{\mathbf{R}^N} G(u)\, dx = \lambda \neq 0$. On suppose que les fonctions F et G sont C^1, qu'il existe $p \leq 2^*$ tel que $|F(u)| \leq C|u|^{2^*}$ et $|G(u)| \leq C|u|^{2^*}$ pour $|u| \geq 1$ et que $G'(u) \not\equiv 0$ si $u \not\equiv 0$.

Alors la fonction u est à symétrie radiale (après une translation dans $\mathbf{R}^N$).

Preuve. On va d'abord montrer que la fonction u présente une symétrie par rapport à la variable x_1. Après une translation dans la direction de x_1 on peut supposer que

$$\int_{\{x_1<0\}} G(u)dx = \int_{\{x_1>0\}} G(u)dx = \lambda/2.$$

On définit

$$(2.1) \qquad v_1(x) = \begin{cases} u(x_1, x') & \text{si } x_1 \leq 0 \\ u(-x_1, x') & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_2(x) = \begin{cases} u(-x_1, x') & \text{si } x_1 \leq 0 \\ u(x_1, x') & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $v_1, v_2 \in H^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^m)$ et on a $I(u) = I(v_1) = I(v_2) = \lambda$. Come u est un minimiseur, ceci implique $V(v_1) \geq V(u)$ et $V(v_2) \geq V(u)$.

D'autre part on a $V(v_1) + V(v_2) = 2V(u)$.

On en déduit que nécessairement $V(v_1) = V(v_2) = V(u)$ et v_1 et v_2 sont aussi des minimiseurs. Par conséquent, il existe des multiplicateurs de Lagrange α et β tels que

$$(2.2) \qquad \begin{array}{c} -\Delta u + 2F'(u) + \alpha G'(u) = 0 \quad \text{et} \\ -\Delta v_1 + 2F'(v_1) + \beta G'(v_1) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^N. \end{array}$$

En utilisant (2.2) et la théorie de la régularité elliptique, on déduit que les fonctions u et v_1 sont bornées et régulières.

On ne peut pas avoir $v_1 = 0$ car $I(v_1) = \lambda \neq 0$. Par conséquent, il existe x^* tel que $x_1^* < 0$ et $G'(v_1(x^*)) \neq 0$. Comme $u = v_1$ dans $\{x_1 < 0\}$, de (2.2) on déduit que $\alpha = \beta$. Il est alors facile de voir que la fonction $w := u - v_1$ satisfait une équation de la forme

$$-\Delta w + A(x)w = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^N, \text{ où } A \in L^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m). \tag{2.3}$$

On utilise ensuite le

Théorème 2.2 *(Théorème de Prolongement Unique) Supposons que $\Phi \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^m)$ satisfait*

$$-\Delta \Phi + A(x)\Phi = 0 \quad \textit{dans } \mathbf{R}^N, \quad \textit{où } A \in L^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m).$$

Si $\Phi \equiv 0$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, alors $\Phi \equiv 0$ dans $\mathbf{R}^N$.

Comme $w \equiv 0$ dans le demi-espace $\{x_1 < 0\}$, on déduit du théorème de prolongement unique et de (2.3) que $w = 0$ dans $\mathbf{R}^N$, c'est-à-dire $u = v_1$. Donc u est symétrique par rapport à x_1.

De la même façon, après translation u est symétrique par rapport à chacune des variables $x_2, \ldots, x_N$. En particulier, $u(x) = u(-x)$. Par conséquent, tout hyperplan Π qui contient l'origine O coupe la contrainte en deux quantités égales. Le même argument que ci-dessus implique alors que u est symétrique par rapport à tout hyperplan contenant O, donc u est à symétrie radiale. □

2.1 Un résultat général de symétrie

Dans un travail récent [7], nous avons étudié la symétrie des solutions d'un problème $(\mathcal{P})$ qui consiste à minimiser une fonctionnelle

$$E(u) = \int_\Omega F(|x|, u(x), |\nabla u(x)|)\, dx$$

avec un nombre fini de contraintes

$$Q_j(u) = \int_\Omega G_j(|x|, u(x), |\nabla u(x)|)\, dx = \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ est un ensemble ouvert invariant par rotations. On suppose que :

A1. On travaille dans un espace $\mathcal{X}$ de fonctions ayant la propriété que pour tout $u \in \mathcal{X}$ et pour tout hyperplan Π de $\mathbf{R}^N$ contenant le centre de Ω, les deux fonctions obtenues de u par symétrie miroir par rapport à Π (comme dans (2.1)) appartiennent encore à $\mathcal{X}$.

A2. Le problème $(\mathcal{P})$ admet des solutions dans $\mathcal{X}$ et toute solution est de classe C^1 sur Ω.

Notons que ces hypothèses sont très générales, donc les résultats obtenus s'appliquent à un grand nombre de situations concrètes. Par exemple, la condition (A1) est vérifiée par tous les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Sous des hypothèses de régularité et de croissance raisonnables sur $F, G_1, \ldots, G_k$, les fonctionnelles $E, Q_1, \ldots, Q_k$ sont différentiables sur $\mathcal{X}$ et les minimiseurs de $(\mathcal{P})$ satisfont des équations d'Euler-Lagrange. Très souvent, ces équations sont des systèmes elliptiques quasi-linéaires. La théorie de la régularité des solutions de tels systèmes a connu un développement spectaculaire les 50 dernières années. Dans des situations très générales, elle permet de montrer que les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont (au moins) C^1, donc (A2) est satisfaite.

Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 2.3 *Supposons que (A1), (A2) sont satisfaites et* $0 \le k \le N-2$. *Soit* $u \in \mathcal{X}$ *un minimiseur de* $(\mathcal{P})$. *Alors il existe un sous-espace vectoriel* V *de* $\mathbf{R}^N$ *de dimension* k *tel que* u *est à symétrie radiale par rapport à* V *(c'est-à-dire* $u(x)$ *dépend uniquement de la projection orthogonale de* x *sur* V *et de la distance de* x *à* V*).*

Dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}^N$, les fonctionnelles $E, Q_1, \dots Q_k$ sont invariantes par translations et (A1) a lieu pour tout hyperplan affine Π de $\mathbf{R}^N$ (et non seulement pour les hyperplans contenant l'origine), on a montré :

Théorème 2.4 *Si* $u \in \mathcal{X}$ *est un minimiseur de* $(\mathcal{P})$ *et* $1 \le k \le N-1$, *alors il existe un sous-espace affine* V *de* $\mathbf{R}^N$ *de dimension* $k-1$ *tel que* u *est à symétrie radiale par rapport à* V.

En particulier, dans le cas d'une seule contrainte, tous les minimiseurs sont à symétrie radiale par rapport à un point. Notons que tous ces résultats sont valables pour des minimiseurs à valeurs vectorielles et on ne demande aucune hypothèse sur les signes des composantes des minimiseurs. D'autre part, les exemples présentés dans [7] montrent que les résultats ci-dessus sont optimaux même pour des minimiseurs à valeurs scalaires.

Afin de donner une idée des preuves des résultats énoncés plus haut, nous allons présenter la démonstration du Théorème 2.4 dans le cas particulier où $N = 2$ et $k = 1$. Le problème $(\mathcal{P})$ devient

$$(\mathcal{P}') \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiser } E(u) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} F(u(x), |\nabla u(x)|)\, dx \quad \text{ sous la contrainte} \\ Q(u) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} G(u(x), |\nabla u(x)|)\, dx = \lambda \neq 0. \end{array}$$

Lemme 2.5 *Soit* u *un minimiseur de* $(\mathcal{P}')$. *On suppose que toute droite* Π *passant par* O *a la propriété :*

$$\int_{\Pi^+} G(u(x), |\nabla u(x)|)\, dx = \int_{\Pi^-} G(u(x), |\nabla u(x)|)\, dx = \frac{\lambda}{2}. \tag{2.4}$$

Alors u *est à symétrie radiale par rapport à* O.

Preuve du Lemme 2.5. Soit Π une droite quelconque contenant O. On choisit un système de coordonnées tel que $\Pi = Oy$. On définit

$$v_1(x,y) = \begin{cases} u(x,y) \text{ si } x \le 0 \\ u(-x,y) \text{ si } x > 0, \end{cases} \qquad v_2(x,y) = \begin{cases} u(-x,y) \text{ si } x < 0 \\ u(x,y) \text{ si } x \ge 0. \end{cases}$$

Alors $v_1, v_2 \in \mathcal{X}$ et on a $Q(v_1) = Q(v_2) = \lambda$ ce qui implique $E(v_1) \ge E(u)$ et $E(v_2) \ge E(u)$. D'autre part, on a $E(v_1) + E(v_2) = 2E(u)$. Donc $v_1,\ v_2$ sont aussi des minimiseurs et en utilisant (A2) on déduit que $v_1,\ v_2 \in C^1(\mathbf{R}^2)$.

La symétrie de v_1 et de v_2 par rapport à x_1 implique $\dfrac{\partial v_1}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}(0,y) = 0$ pour tout y. Comme $u = v_1$ pour $x < 0$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \lim_{s \uparrow 0} \frac{\partial u}{\partial x}(s,y) = \lim_{s \uparrow 0} \frac{\partial v_1}{\partial x}(s,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(0,y) = 0.$$

Ainsi on a montré que pour toute droite Π contenant O,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Pi, \text{ où } n \text{ est la normale à } \Pi. \tag{2.5}$$

En coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ceci implique $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ et on en déduit que u ne dépend pas de θ, c'est-à-dire u est une fonction radiale. □

Démonstration du Théorème 2.4 pour $N = 2$ et $k = 1$.

Soit u un minimiseur de $(\mathcal{P}')$. Après translation, on peut supposer que

$$\int_{\{x<0\}} G(u, |\nabla u|)\, dx\, dy = \int_{\{x>0\}} G(u, |\nabla u|)\, dx\, dy = \frac{\lambda}{2}.$$

Soient u_1 et u_2 les deux fonctions obtenues de u par symétrie miroir par rapport à Oy. Alors u_1 et u_2 sont aussi des minimiseurs et, de plus, sont paires en x.

Après translation en y, on peut supposer que

$$\int_{\{y<0\}} G(u_1, |\nabla u_1|)\, dx\, dy = \int_{\{y>0\}} G(u_1, |\nabla u_1|)\, dx\, dy = \frac{\lambda}{2}.$$

Soient $u_{1,1}$ et $u_{1,2}$ les deux fonctions obtenues de u_1 par symétrie miroir par rapport à Ox. Il est évident que $u_{1,1}$ et $u_{1,2}$ sont aussi des minimiseurs et sont paires en x et en y. Par le Lemme 2.5 on déduit que $u_{1,1}$ et $u_{1,2}$ sont des fonctions radiales par rapport à O. Comme $u_{1,1}(x, 0) = u_1(x, 0) = u_{1,2}(x, 0)$ pour tout x, on a nécessairement $u_{1,1} = u_{1,2} = u_1$ sur $\mathbf{R}^2$, donc u_1 est une fonction radiale.

De la même façon, il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que

$$\int_{\{y<k\}} G(u_2, |\nabla u_2|)\, dx\, dy = \int_{\{y>k\}} G(u_2, |\nabla u_2|)\, dx\, dy = \frac{\lambda}{2}.$$

Comme ci-dessus on déduit que u_2 est radiale par rapport à $(0, k)$.

Nous allons montrer que $k = 0$. Supposons, par l'absurde, que $k \neq 0$. Alors la fonction d'une variable $y \longmapsto u(0, y) = u_1(0, y) = u_2(0, y)$ est une fonction symétrique par rapport à 0 et par rapport à k, donc c'est une fonction $2|k|-$périodique. Donc $G(u_1, |\nabla u_1|)$ est une fonction radiale dont le profil est $2|k|-$périodique. On en déduit que si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} G(u_1, |\nabla u_1|)\, dx\, dy$ converge, sa valeur est nécessairement 0, ce qui implique $\lambda = 0$, absurde.

Par conséquent, on a $k = 0$ et alors u_1, u_2 sont deux fonctions radiales par rapport à O. Comme $u_1(0, \cdot) = u(0, \cdot) = u_2(0, \cdot)$ on déduit que $u_1 = u_2 = u$, c'est-à-dire u est radiale. □

Pour démontrer les Théorèmes 2.3 et 2.4 dans le cas général, on utilise le Théorème de Borsuk-Ulam pour trouver des hyperplans qui "coupent les contraintes en deux", un résultat analogue au Lemme 2.5, et un peu de géométrie élémentaire et de combinatoire pour "recoller les morceaux."

2.2 Symétrie et monotonie des solutions d'énergie minimale

Dans [9], nous étudions le comportement des solutions d'énergie minimale du système

$$-\mathrm{div}(|\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i) = g_i(u), \qquad i = 1, \dots, m, \tag{2.6}$$

où $u = (u_1, \dots, u_m) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $1 < p < \infty$, $|(y_1, \dots, y_N)|^p = \left(\sum_{j=1}^N y_j^2\right)^{\frac{p}{2}}$, $g_i(0) = 0$ et il existe $G \in C^1(\mathbf{R}^m \setminus \{0\}, \mathbf{R})$ telle que $g_i(u) = \frac{\partial G}{\partial u_i}(u)$.

Ce système, notamment dans le cas $p = 2$, intervient dans un nombre important de problèmes issus de la physique. La fonctionnelle d'énergie associée est

$$S(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_{i=1}^m |\nabla u_i|^p \, dx - \int_{\mathbf{R}^N} G(u) \, dx.$$

Il est facile de voir que les solutions de (2.6) sont précisément les points critiques de S. On appelle *solution d'énergie minimale* une solution qui minimise S dans l'ensemble de toutes les solutions.

L'existence des solutions d'énergie minimale a été prouvée dans une série de travaux classiques (le lecteur pourra consulter les articles [BeLi83], [BeGK83], [BrLieb84] et les références qu'ils contiennent). Cependant, dans le cas des conditions générales sur la nonlinéarité g, la symétrie de telles solutions et la monotonie de leur profil dans le cas scalaire ($m = 1$) ont été des problèmes longtemps non résolus.

Nous avons trouvé une caractérisation variationnelle équivalente des solutions d'énergie minimale de (2.6). On introduit les fonctionnelles $J(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_{i=1}^m |\nabla u_i|^p \, dx$ et $V(u) = \int_{\mathbf{R}^N} G(u) \, dx$. On a :

Proposition 2.6 *On suppose que $1 < p \leq N$. Soit u une solution d'énergie minimale de (2.6). Alors u est une solution du problème de minimisation*

(2.7) *minimiser $J(v)$ sous la contrainte $v \neq 0$ et $V(v) = V(u)$.*

En utilisant la Proposition 2.6 et le Théorème 2.4, on déduit :

Corollaire 2.7 *Si u est une solution d'énergie minimale de (2.6), alors u est à symétrie radiale (modulo une translation dans $\mathbf{R}^N$).*

Dans le cas scalaire ($m = 1$) nous avons montré le résultat de monotonie suivant :

Proposition 2.8 *Soit $m = 1$ et soit u une solution d'énergie minimale de (2.6). Alors :*
i) La fonction u a un signe constant sur $\mathbf{R}^N$.
ii) Le profil radial de u est une fonction monotone sur $[0, \infty)$.

La preuve de (i) est assez simple (et présente un lien évident avec le fait que le principe de concentration-compacité peut être utilisé pour montrer la compacité des suites minimisantes du problème (2.7)) : si u change de signe, on peut considérer séparement les fonctions u_+ et u_-. Alors $J(u_+) + J(u_-) = J(u)$ et $V(u_+) + V(u_-) = V(u)$, ce qui implique que la dichotomie se produit pour les suites minimisantes de (2.7).

La preuve de (ii) repose sur un résultat de [BroZi88] qui affirme que pour une fonction positive $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ on a toujours $J(v) \geq J(v^*)$ (où v^* est le réarrangement de Schwarz de v) et on peut avoir $J(v) = J(v^*)$ uniquement si les ensembles de niveau $v^{-1}(t)$ sont des sphères pour presque tout $t > 0$. Or, si u est une solution d'énergie minimale, on sait déjà que u est positive et radiale, $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, où $\tilde{u}(r) \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow \infty$. Si $\tilde{u}$ n'est pas décroissante, il existe $0 < a < b < c$ tels que $\tilde{u}(a) < \tilde{u}(b)$ et $\tilde{u}(b) > \tilde{u}(c)$. Soit $m_1 = \min(\tilde{u}(a), \tilde{u}(c))$ et $m_2 = \tilde{u}(b)$. Alors pour tout $t \in [m_1, m_2]$, $u^{-1}(t)$ contient au moins deux sphères concentriques, donc ce n'est pas une sphère. Par le théorème de [BroZi88] on déduit que $J(u^*) < J(u)$. Comme $V(u^*) = V(u)$, on obtient une contradiction avec le fait que u est un minimiseur de (2.7).

2.3 Symétrie dans des problèmes non-locaux

La symétrie des minimiseurs dans des problèmes qui font intervenir des opérateurs non-locaux a été étudiée dans [6]. Nous décrivons ci-dessous quelques exemples.

A. Problèmes qui font intervenir les puissances fractionnaires du Laplacien. On considère l'équation de Benjamin-Ono généralisée

$$A_t + \alpha A A_x - \beta(-\Delta)^{\frac{1}{2}} A_x = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^2, \quad \alpha,\ \beta > 0.$$

Les ondes progressives de cette équation sont des solutions de la forme $A(x,\, y,\, t) = u(x - ct,\, y)$. Après changement d'échelle, on trouve que le profil u satisfait

$$u + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = u^2 \quad \text{dans } \mathbf{R}^2.$$

L'existence des ondes progressives a été démontrée dans [2] en minimisant

$$V(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^2} |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} u|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^2} u^2 dx$$

sous la contrainte $I(u) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} u^3 dx = \textit{constant}$. Plus généralement, dans [Lop3] on a montré l'existence des minimiseurs des fonctionnelles de type

$$V(u) = \int_{\mathbf{R}^N} |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbf{R}^N} F(u) dx \tag{2.8}$$

sous une contrainte $I(u) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} G(u) dx = \lambda \neq 0$. Il est évident que ce problème de minimisation ressemble à celui considéré dans le Théorème 2.1. La question qui se pose naturellement est de savoir si les minimiseurs de (2.8) présentent aussi une symétrie. Le résultat suivant permet d'apporter une réponse affirmative à cette question.

Lemme 2.9 *Soit $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et soit $u \in \dot{H}^s(\mathbf{R}^N)$. On définit v_1, v_2 comme dans (2.1). Si V est donné par (2.8), on a*

$$V(v_1) + V(v_2) - 2V(u) = -\frac{16 \sin(s\pi)}{\pi^2} N_s^2(f), \qquad \forall\, s \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \tag{2.9}$$

où $f(x) = \frac{1}{2}(u(x_1, x') - u(-x_1, x'))$ et

$$N_s^2(f) = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \int_{|\xi'|}^{\infty} \left(t^2 - |\xi'|^2\right)^s \left| \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi_1, \xi') \frac{\xi_1}{t^2 + \xi_1^2}\, d\xi_1 \right|^2 dt\, d\xi'. \tag{2.10}$$

De plus, N_s est une norme sur $\dot{H}^s_{1,odd}(\mathbf{R}^N) = \{u \in \dot{H}^s(\mathbf{R}^N) \mid u \text{ est antisymétrique en } x_1\}$ et cette norme est continue par rapport à la norme usuelle de $\dot{H}^s$.

Supposons que $s \in (0, 1)$ et que u est un minimiseur de (2.8) sous la contrainte $I(u) = \lambda \neq 0$. Après une translation dans la direction de x_1, on peut supposer que $\displaystyle\int_{\{x_1<0\}} G(u) dx = \int_{\{x_1>0\}} G(u) dx = \lambda/2$. On définit v_1 et v_2 comme dans (2.1). Il est clair que $I(v_1) = I(v_2) = \lambda$ et (2.9) implique que $N_s(f) = 0$ (car sinon on aurait $V(v_1) + V(v_2) - 2V(u) < 0$, donc $V(v_1) < V(u)$ ou $V(v_2) < V(u)$, en contradiction avec le fait que u est un minimiseur). Comme $N_s(f)$ est une norme, on en déduit que $f = 0$, donc u

est symétrique par rapport à x_1. De la même façon, u est symétrique par rapport à toute direction (modulo translation) et finalement on obtient que u est une fonction radiale.

Notons que dans le cas $s \in (1, \frac{3}{2})$, (2.9) implique $V(v_1) + V(v_2) - 2V(u) \geq 0$ (avec inégalité stricte si u n'est pas symétrique) et la méthode n'est plus applicable. La symétrie des minimiseurs dans ce cas reste un problème ouvert.

Preuve du Lemme 2.9 dans le cas N=1.

On va démontrer que (2.9) a lieu pour $V(u) = ||u||^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbf{R}^N} |\xi|^{2s}|\widehat{u}|^2\, d\xi$ quelque soit $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. On note $f(x) = \frac{1}{2}(u(x) - u(-x))$.

Étape 1 : $u \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. On note $g(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u(-x))$, $f_*(x) = \begin{cases} -f(x), & x \leq 0, \\ f(x), & x > 0, \end{cases}$ de sorte que g, f_* sont paires, f est impaire, $u = g + f$, $u_1 = g - f_*$, $u_2 = g + f_*$. On a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty (e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}) f(x)\, dx = 2i \int_0^\infty \sin(x\xi) f(x)\, dx,$$

$$\widehat{f}_*(\xi) = \int_0^\infty (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) f(x)\, dx = 2 \int_0^\infty \cos(x\xi) f(x)\, dx.$$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned}
\|u_1\|^2_{\dot{H}^s} + \|u_2\|^2_{\dot{H}^s} - 2\|u\|^2_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{2s} \left(|\widehat{g} - \widehat{f}_*|^2 + |\widehat{g} + \widehat{f}_*|^2 - 2|\widehat{g} + \widehat{f}|^2 \right) d\xi \\
&= 2 \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{2s} \left(|\widehat{f}_*|^2 - |\widehat{f}|^2 \right) d\xi \\
&= 8 \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{2s} \left(\left| \int_0^\infty \cos(x\xi) f(x)\, dx \right|^2 - \left| \int_0^\infty \sin(x\xi) f(x)\, dx \right|^2 \right) d\xi \\
&= 8 \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{2s} \Big(\int_0^\infty \int_0^\infty \cos(x\xi) f(x) \overline{\cos(y\xi) f(y)}\, dxdy \\
&\qquad - \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(x\xi) f(x) \overline{\sin(y\xi) f(y)}\, dxdy \Big) \qquad \text{(Fubini)} \\
&= 8 \int_{\mathbf{R}} |\xi|^{2s} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos((x+y)\xi) f(x) \overline{f(y)}\, dxdy\, d\xi.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On définit $h(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(x+y)z} f(x)\overline{f(y)}\, dxdy$ et on prouve que :

- La fonction h est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et bornée sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.
- Si $z \in \mathbf{R}$, alors $h(-z) = \overline{h(z)}$ et $\mathrm{Re}(h(z)) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos((x+y)\xi) f(x)\overline{f(y)}\, dxdy$.
- On a $|h(z)| \leq \frac{C}{|z|^4}$ si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ car $\int_0^\infty e^{ixz} f(x)\, dx = -\frac{1}{z^2}\left(f'(0) + \int_0^\infty e^{ixz} f''(x)\, dx\right)$.
- Pour $t \in \mathbf{R}_+$ on a

$$\begin{aligned}
h(it) &= \Big| \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx \Big|^2 = \left| \langle f, e^{-t\cdot} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\cdot) \rangle_{L^2} \right|^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \langle \widehat{f}, \mathcal{F}\left(e^{-t\cdot} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\cdot)\right) \rangle_{L^2} \right|^2 \qquad \text{(Plancherel)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \Big| \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\xi) \frac{1}{t - i\xi}\, d\xi \Big|^2 = \frac{1}{\pi^2} \Big| \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) \frac{\xi}{t^2 + \xi^2}\, d\xi \Big|^2.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

On définit $m(z) = (z^2)^s = e^{s\log(z^2)} = e^{2s\ln|z|+is\arg(z^2)}$. La fonction m est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{it \mid t\in\mathbf{R}\}$. En intégrant la fonction holomorphe $z\longmapsto h(z)m(z)$ sur un chemin bien choisi, on obtient que pour tout $s\in(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ on a

$$\int_\varepsilon^\infty m(z)h(z)\,dz = i\int_0^\infty m(\varepsilon+it)h(\varepsilon+it)\,dt.$$

On passe à la limite lorsqeue $\varepsilon\longrightarrow 0$ et on trouve

$$\int_0^\infty m(z)h(z)\,dz = i\int_0^\infty t^{2s}e^{is\pi}h(it)\,dt.$$

On a aussi

$$\int_{-\infty}^0 |z|^{2s}h(z)\,dz = \int_0^\infty |z|^{2s}\overline{h(z)}\,dz = -i\int_0^\infty t^{2s}e^{-is\pi}h(it)\,dt.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^\infty |z|^{2s}h(z)\,dz = -2\sin(s\pi)\int_0^\infty t^{2s}h(it)\,dt.$$

D'où finalement, en utilisant (2.11) et (2.12),

$$\begin{aligned}
&\|u_1\|_{\dot H^s}^2+\|u_2\|_{\dot H^s}^2-2\|u\|_{\dot H^s}^2 = 8\int_{\mathbf{R}}|\xi|^{2s}\mathrm{Re}(h(\xi))\,d\xi\\
&= -16\sin(s\pi)\int_0^\infty t^{2s}h(it)\,dt\\
&= -\frac{16\sin(s\pi)}{\pi^2}\int_0^\infty t^{2s}\left|\int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\frac{\xi}{t^2+\xi^2}\,d\xi\right|^2 dt.\\
&= -\frac{16\sin(s\pi)}{\pi^2}N_s^2(f).
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Étape 2 : argument de densité. On a montré l'identité (2.13) pour tout $s\in(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ et pour tout $u\in C_c^\infty(\mathbf{R})$. Pour étendre cette identité à $\dot H^s(\mathbf{R}^N)$, il suffit de prouver que $N_s(f)\le C\|f\|_{\dot H^s}$ avec C indépendant de f. On a :

$$\begin{aligned}
N_s^2(f) &= \int_0^\infty t^{2s}\left|\int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\frac{\xi}{t^2+\xi^2}\,d\xi\right|^2 dt\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t^{2s}\frac{\xi}{t^2+\xi^2}\frac{\eta}{t^2+\eta^2}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\eta)}\,d\xi\,d\eta\,dt \qquad \text{(Fubini)}\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty I_s(\xi,\eta)\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\eta)}\,d\xi\,d\eta \qquad \text{où } I_s(\xi,\eta) = \int_0^\infty t^{2s}\frac{\xi}{t^2+\xi^2}\frac{\eta}{t^2+\eta^2}\,dt\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty |\xi|^{-s}|\eta|^{-s}I_s(\xi,\eta)|\xi|^s\widehat{f}(\xi)|\eta|^s\overline{\widehat{f}(\eta)}\,d\xi\,d\eta\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty K_s(\xi,\eta)|\xi|^s\widehat{f}(\xi)|\eta|^s\overline{\widehat{f}(\eta)}\,d\xi\,d\eta,
\end{aligned}$$

où $K_s(\xi,\eta)) = |\xi|^{-s}|\eta|^{-s}I_s(\xi,\eta)$. Il suffit de montrer que

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty K_s(\xi,\eta)\varphi(\xi)\overline{\psi(\eta)}\, d\xi\, d\eta \right| \le C\|\varphi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}, \qquad \forall \varphi,\psi \in L^2(0,\infty).$$

Par calcul, on trouve $I_s(\xi,\eta) = \frac{\pi}{2\cos(s\pi)}\frac{\xi^{2s-1}-\eta^{2s-1}}{\eta^2-\xi^2}$ si $s \ne \frac{1}{2}$, respectivement $I_s(\xi,\eta) = \frac{\ln\eta-\ln\xi}{\eta^2-\xi^2}$ si $s=\frac{1}{2}$.

Notons que ni les résultats généraux sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt, ni l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev n'impliquent que le noyau K définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbf{R}^N)$. Pour montrer ceci, on effectue les calculs en coordonnées polaires $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$ et on trouve une fonction $L_s(\theta)$ telle que $K_s(\xi,\eta) = \frac{1}{r}L_s(\theta)$.

Pour $\varphi,\psi \in L^2(0,\infty)$ on a :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left|K_s(\xi,\eta)\varphi(\xi)\overline{\psi(\eta)}\right| d\xi\, d\eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \left|\varphi(r\cos\theta)\overline{\psi(r\sin\theta)}\right| dr|L_s(\theta)|\, d\theta$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\varphi(\cdot\cos\theta)\|_{L^2}\|\psi(\cdot\sin\theta)\|_{L^2}|L_s(\theta)|\, d\theta \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$= \|\varphi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|L_s(\theta)|}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\, d\theta.$$

Pour $s \in (-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ on montre par calcul direct que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|L_s(\theta)|}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\, d\theta < \infty$. Par conséquent, on peut étendre (2.9) par densité à $\dot{H}^s(\mathbf{R})$. □

B. Le problème de Choquard généralisé.

Ce problème consiste à minimiser

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3}\int_{\mathbf{R}^3} u^2(x)\frac{1}{|x-y|}u^2(y)\, dx\, dy$$

sous la contrainte $Q(u) := \displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} u^2 dx = \lambda$.

Il a été prouvé dans [Lieb77] qu'il existe un minimiseur $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$. De plus, ce minimiseur est radial et unique (modulo translations). La démonstration repose sur des inégalités strictes pour les réarrangements sphériques.

Nous avons considéré le problème $(\mathcal{CG})$ qui consiste à minimiser

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} \frac{F(u(x))F(u(y))}{|x-y|^{N-2}}\, dx\, dy + \int_{\mathbf{R}^N} H(u)dx$$

sous la contrainte $Q(u) := \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} G(u)dx = \lambda$. L'intérêt de ce problème vient du fait que les minimiseurs sont des ondes stationnaires pour l'équation de Hartree

$$iu_t + \Delta u + 2\left(\int_{\mathbf{R}^N} \frac{F(u(y))}{|x-y|^{N-2}}\, dy\right) F'(u(x)) - H'(u(x)) = 0.$$

Théorème 2.10 *On suppose que* $N \ge 3$ *et*

- F, G, H *sont* C^2, $F(0) = G(0) = H(0) = 0$

et F, G, H *ont un comportement sous-critique à l'infini,*

- $G' \not\equiv 0$ *sur un voisinage de 0.*

Alors tout minimiseur $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ *du problème* $(\mathcal{CG})$ *est à symétrie radiale.*

Preuve. On définit $I(\varphi) = \frac{1}{|\cdot|^{N-2}} * \varphi$. Il est bien connu que $\widehat{I(\varphi)} = \frac{c_N}{|\xi|^2}\widehat{\varphi}(\xi)$ et $-\Delta(I(\varphi)) = c_N \cdot \varphi$. Le terme nonlocal peut alors être écrit sous la forme

$$\int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} F(u(x))\frac{1}{|x-y|^{N-2}}F(u(y))\,dx\,dy$$

$$= \langle I(F(u))\ ,\ F(u)\rangle = \tfrac{1}{(2\pi)^N}\langle \widehat{I(F(u))}\ ,\ \widehat{F(u)}\rangle \quad \text{(Plancherel)}$$

$$= \frac{c_N}{(2\pi)^N}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{1}{|\xi|^2}\left|\widehat{F(u)}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Après translation, on peut supposer que $\displaystyle\int_{\{x_1<0\}} G(u)dx = \int_{\{x_1>0\}} G(u)dx = \lambda/2$. On définit v_1, v_2 comme dans (2.1) et on trouve

$$\begin{aligned} &E(v_1)+E(v_2)-2E(u) \\ &= -\frac{4c_N}{\pi(2\pi)^N}\int_{\mathbf{R}^{N-1}}\frac{1}{|\xi'|}\left|\int_0^\infty\left(\widehat{F(u)}(\xi_1,\xi')-\widehat{F(u)}(-\xi_1,\xi')\right)\frac{\xi_1}{|\xi'|^2+\xi_1^2}\,d\xi_1\right|^2 d\xi'. \end{aligned} \tag{2.14}$$

On obtient $E(v_1)+E(v_2) \le 2E(u)$. Donc v_1 et v_2 sont aussi minimiseurs et l'intégrale du membre de droite de (2.14) est nulle. Le fait que cette intégrale s'annulle équivaut à $\frac{\partial}{\partial x_1}(I(F(u)))(0,x') = 0$, $\forall x' \in \mathbf{R}^{N-1}$. Contrairement à l'exemple précédent, cette information n'implique pas directement la symétrie de u.

L'équation d'Euler-Lagrange pour un minimiseur est

$$-\Delta u - 2I(F(u))\cdot F'(u) + H'(u) + \alpha G'(u) = 0. \tag{2.15}$$

Nous ne connaissons pas de théorème de prolongement unique pour cette équation. On a le résultat de régularité suivant :

Lemme 2.11 *Soit $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ une solution de (2.15). Alors $u \in W^{3,p}(\mathbf{R}^N)$, $\forall p \in [2,\infty)$. En particulier, $u \in C^2(\mathbf{R}^N)$.*

On a ainsi montré que

• Pour tout minimiseur u et tout hyperplan Π qui "coupe la contrainte en deux", u_{Π^+} et u_{Π^-} sont aussi des minimiseurs.

• Tous les minimiseurs sont réguliers.

On peut alors conclure grâce au Théorème 2.4. □

C. Le système de Davey-Stewartson. On considère le système

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u &= f(|u|^2)u - uv_{x_1} \\ \Delta v &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(|u|^2\right) \end{cases} \qquad \text{dans } \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3.$$

Ce système peut être écrit sous la forme

$$iu_t = -\Delta u + f(|u|^2)u + R_1^2\left(|u|^2\right)u, \tag{2.16}$$

où R_1 est la transformation de Riesz donnée par $\widehat{R_1\varphi} = \frac{i\xi_1}{|\xi|}\widehat{\varphi}$. L'équation (2.16) est Hamiltonienne, deux quantités conservées étant

$$\tilde{E}(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2 + F_1(|u|^2)dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\left|R_1(|u|^2)\right|^2 dx \quad \text{et} \quad \tilde{Q}(u) = \int_{\mathbf{R}^3}|u|^2dx.$$

Les minimiseurs de $\tilde{E}$ sous la contrainte $\tilde{Q} = constant$ sont des ondes stationnaires de (2.16). On a le résultat suivant concernant la symétrie de ces minimiseurs :

Théorème 2.12 *Soit $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$ un minimiseur de*

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 + F(u)dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3} \left|R_1(|u|^2)\right|^2 dx$$

sous une contrainte $Q(u) = \int_{\mathbf{R}^3} G(u)dx = \lambda$. On suppose que $F, G \in C^1(\mathbf{C})$, $F(0) = G(0) = 0$, $\nabla F(0) = \nabla G(0) = 0$ et F, G ont un comportement sous-critique pour $|u| > 1$.

Alors modulo translation, u est à symétrie radiale dans les variables (x_2, x_3) (i.e. u est à symétrie axiale).

Preuve. On peut supposer que $\int_{\{x_2<0\}} G(u)dx = \int_{\{x_2>0\}} G(u)dx = \lambda/2$. On définit v_1, v_2 par symétrie miroir par rapport à x_2. Alors on a l'identité

$$\begin{aligned} & E(v_1) + E(v_2) - 2E(u) \\ (2.17) \qquad & = \frac{-1}{\pi(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\xi_1^2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_3^2}} \left| \int_0^\infty \Big(\widehat{|u|^2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - \widehat{|u|^2}(\xi_1,-\xi_2,\xi_3)\Big) \frac{\xi_2}{|\xi|^2} d\xi_2 \right|^2 d\xi_1\, d\xi_3. \end{aligned}$$

Comme u est un minimiseur, on obtient que v_1 et v_2 sont aussi des minimiseurs et l'intégrale du membre de droite de (2.17) s'annulle, ce qui implique $\frac{\partial}{\partial x_2}(I(|u|^2))(x_1, 0, x_3) = 0$ pour tout $(x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2$. Comme pour les minimiseurs du problème de Choquard généralisé, seule cette information ne suffit pas pour montrer la symétrie.

L'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par les minimiseurs s'écrit

$$(2.18) \qquad -\Delta u + \nabla F(u) + R_1^2(|u|^2)u + \alpha \nabla G(u) = 0.$$

On a le résultat de régularité suivant :

Lemme 2.13 *Soit $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$ une solution de (2.18). Alors $u \in W^{2,p}(\mathbf{R}^3)$, $\forall p \in [2, \infty)$. En particulier, $u \in C^1(\mathbf{R}^3)$.*

On a ainsi montré que :

• Pour tout minimiseur u et tout hyperplan Π parallèle à Ox_1 et qui coupe la contrainte en deux, u_{Π^+} et u_{Π^-} sont aussi des minimiseurs.

• Tous les minimiseurs sont réguliers.

En utilisant le Théorème 2.4, on en déduit que tout minimiseur est radial par rapport aux variables (x_2, x_3). □

3 Ondes progressives pour des équations de Schrödinger non-linéaires avec des conditions non-nulles à l'infini

Une partie importante de mon activité de recherche a été consacrée à l'étude des équations de type

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi + F(|\Phi|^2)\Phi = 0 \qquad \text{dans } \mathbf{R}^N, \tag{3.1}$$

où Φ est une fonction complexe qui satisfait $|\Phi| \longrightarrow r_0 > 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$ et $F(r_0^2) = 0$, $F'(r_0^2) < 0$. Deux cas particuliers importants de (3.1) ont été très étudiés par les physiciens et par les mathématiciens : l'équation de Gross-Pitaevskii (où $F(s) = 1 - s$) et l'équation appelée "cubique-quintique" (où $F(s) = -\alpha_1 + \alpha_3 s - \alpha_5 s^2$, $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5 > 0$ et F admet deux racines réelles positives).

L'équation (3.1) est hamiltonienne. L'énergie correspondante est

$$E(\Phi) = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \Phi|^2 \, dx + \int_{\mathbf{R}^N} V(|\Phi|^2) \, dx, \qquad \text{où } V(s) = \int_s^{r_0^2} F(\tau) \, d\tau. \tag{3.2}$$

Cette quantité est conservée par la dynamique associée à l'équation (3.1).

Des équations de type (3.1), avec les conditions aux limites non-nulles considérées ci-dessus, apparaîssent dans la modélisation d'un grand nombre de phénomènes en plusieurs domaines de la physique, comme la supraconductivité, la superfluidité dans Hélium II, les transitions de phase et les condensats de Bose-Einstein. Dans une longue série de travaux (v. [GR74], [JR82], [JPR86] et les références de ces articles), J. Grant, C.A. Jones, S.J. Putterman, P.H. Roberts et al. ont étudié formellement et numériquement des équations de type (3.1). Une attention particulière a été accordée à une classe spéciale de solutions de (3.1), les ondes progressives. Une onde progressive de vitesse c est une solution de la forme $\Phi(x,t) = \psi(x_1 - ct, x_2, \dots, x_N)$. La fonction ψ satisfait alors l'équation

$$-ic\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \Delta \psi + F(|\psi|^2)\psi = 0 \qquad \text{dans } \mathbf{R}^N. \tag{3.3}$$

Des développements asymptotiques formels et des simulations numériques ont conduit à la formulation d'un ensemble de conjectures (parfois appelé *le programme de Roberts*) concernant l'existence, les propriétés structurelles et la stabilité des ondes progressives. La démonstration rigoureuse de ces conjectures conduit à des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Malgré de nombreux efforts qui ont été faits pendant les vingt dernières années, beaucoup de ces conjectures restent encore non résolues.

Notons que l'équation (1) admet une formulation hydrodynamique : en utilisant la transformation de Madelung $\Phi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$, elle est équivalente à un système en (ρ, θ) qui est semblable au système d'Euler pour un fluide non-visqueux compressible de densité ρ et de vitesse $2\nabla\theta$. Dans ce contexte, on peut calculer la vitesse du son à l'infini : $v_s = r_0\sqrt{-2F'(r_0^2)}$. Il a été conjecturé que des ondes progressives de vitesse c existent si et seulement si $|c| < v_s$. Nous avons tenté de donner une preuve rigoureuse à cette conjecture.

3.1 Non-existence des ondes progressives subsoniques

Dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii, en utilisant une identité intégrale astucieuse, P. Gravejat a réussi à montrer la non-existence des ondes progressives supersoniques d'énergie finie ([Gr03]). Il a également prouvé la non-existence des ondes soniques en dimension 2. En simplifiant les arguments de P. Gravejat, dans [8] nous avons généralisé son identité intégrale et nous avons montré la non-existence des ondes progressives supersoniques de (3.1) pour une large classe de nonlinéarités (qui inclût les nonlinéarités de type Gross-Pitaevskii et de type "$\psi^3 - \psi^5$"), ainsi que la non-existence, en toute dimension d'espace, des ondes soniques ayant une énergie finie et une phase intégrable.

Nous allons décrire plus en détail les résultats de [8]. Dans cette section on suppose partout que les conditions suivantes sont vérifiées :

C1. La fonction F est continue sur $[0, \infty)$, C^1 au voisinage de r_0^2, $F(r_0^2) = 0$ et $F'(r_0^2) < 0$.

C2. Il existe $C, \alpha > 0$ tels que pour s suffisamment grand on a $F(s) \leq -Cs^{\alpha}$.

Le premier résultat de [8] concerne la régularité des solutions d'énergie finie de (3.3). Par solution d'énergie finie nous entendons une fonction $\psi \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ qui vérifie (3.3) dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et qui a la propriété que $\nabla\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et $V(|\psi|^2) \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Proposition 3.1 *On suppose que les conditions* **C1** *et* **C2** *sont satisfaites. Soit ψ une solution d'énergie finie de (3.3). Alors :*

i) On a $\psi \in L^\infty \cap W^{2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ pour tout $p \in [1, \infty)$.

ii) On a $\nabla\psi \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ pour tout $p \in [2, \infty)$ et il existe $R_* > 0$ tel que sur $\mathbf{R}^N \setminus B(0, R_*)$, ψ admet un relèvement $\psi = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho, \theta \in W^{2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$.

iii) Si, de plus, $F \in C^k([0, \infty))$, alors $\psi \in W^{k+2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ pour tout $p \in [1, \infty)$.

Notons que le schéma classique pour obtenir la régularité des solutions des équations elliptiques (et qui consiste à utiliser l'équation, les estimations elliptiques standard et les injections de Sobolev pour améliorer successivement la régularité de la solution) ne s'applique pas car dans la plupart des applications la nonlinéarité a une croissance critique ou surcritique à l'infini. On a utilisé une méthode développée par A. Farina dans [Fa98, Fa03] pour des systèmes de type Ginzburg-Landau (et basée sur l'inégalité de Kato, voir [Ka72]) pour montrer que les solutions de (3.3) sont bornées. Ensuite la théorie classique de la régularité elliptique permet de montrer les autres assertions de la Proposition 3.1.

Au moins formellement, les solutions de (3.3) sont des points critiques de la fonctionnelle $\tilde{E}_c(\psi) = E(\psi) + \tilde{Q}(\psi)$, où E est donnée par (3.2) et $\tilde{Q}$ est le "moment" par rapport à la direction Ox_1 (une définition plus précise sera donnée plus tard ; pour l'instant, notons que c'est une fonctionnelle dont la différentielle est $\tilde{Q}'(\psi) = 2i\psi_{x1}$). Cette caractérisation variationnelle nous permet de montrer des identités de type Pohozaev :

Proposition 3.2 *Soit ψ une solution d'énergie finie de (3.3). Alors on a*

$$(3.4) \qquad -\int_{\mathbf{R}^N} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^N} \sum_{j=2}^{N} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^N} V(|\psi|^2)\, dx = 0 \qquad \textit{et}$$

$$(3.5) \qquad \int_{\mathbf{R}^N} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2 + \frac{N-3}{N-1} \sum_{k=2}^{N} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^N} V(|\psi|^2)\, dx + c\tilde{Q}(\psi) = 0.$$

Les identités de Pohozaev découlent du comportement de $\tilde{E}_c$ par rapport aux dilatations de $\mathbf{R}^N$. Plus précisément, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ on note $x' = (x_2, \dots, x_N)$ et pour $\lambda,\ \sigma > 0$ on note $\psi_{\lambda,\sigma}(x) = \psi\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x'}{\sigma}\right)$. Alors (3.4) et (3.5) expriment le fait que si ψ est point critique de $\tilde{E}_c$, on a $\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} \tilde{E}_c(\psi_{\lambda,1}) = 0$, respectivement $\frac{d}{d\sigma}\Big|_{\sigma=1} \tilde{E}_c(\psi_{1,\sigma}) = 0$. Bien sûr, cet argument est purement formel car, en général, $\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} (\psi_{\lambda,1}) = -x_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ et $\frac{d}{d\sigma}\Big|_{\sigma=1} (\psi_{1,\sigma}) = -\sum_{j=2}^N x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ n'appartiennent pas à l'espace fonctionnel sur lequel $\tilde{E}'_c(\psi)$ est définie.

Pour démontrer (3.4) et (3.5) rigoureusement, on multiplie (3.3) par $\chi\left(\frac{x}{n}\right) x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$, où $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est une fonction qui est égale à 1 dans un voisinage de zéro, on effectue des intégrations par parties, puis on passe à la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$. Pour pouvoir intégrer par parties on a besoin de connaître que ψ est une fonction suffisamment régulière. La régularité donnée par la Proposition 3.1 ($\psi \in L^\infty \cap W^{2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ et $\nabla\psi \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ pour $p \in [2,\infty)$) suffit pour obtenir les identités de Pohozaev.

Théorème 3.3 *Supposons que $c^2 > v_s^2$ et ψ est une solution d'énergie finie de (3.3). Alors ψ satisfait l'identité*

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla\psi|^2 - F(|\psi|^2)|\psi|^2 - \frac{v_s^2}{2}(|\psi|^2 - r_0^2)\, dx + c\left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)\tilde{Q}(\psi) = 0. \tag{3.6}$$

Preuve. On note $\psi_1 = \mathrm{Re}(\psi)$, $\psi_2 = \mathrm{Im}(\psi)$. L'équation (3.3) équivaut au système

$$c\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \Delta\psi_1 + F(|\psi|^2)\psi_1 = 0 \qquad \text{et} \tag{3.7}$$

$$-c\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \Delta\psi_2 + F(|\psi|^2)\psi_2 = 0. \tag{3.8}$$

On multiplie (3.7) par ψ_2 et (3.8) par ψ_1, ensuite on soustrait les égalités obtenues. On trouve

$$\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(|\psi|^2 - r_0^2) = \mathrm{div}(\psi_1\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1). \tag{3.9}$$

On multiplie (3.7) par ψ_1 et (3.8) par ψ_2, puis on rajoute les égalités obtenues. On obtient :

$$|\nabla\psi_1|^2 + |\nabla\psi_2|^2 - F(|\psi|^2)|\psi|^2 - c\left(\psi_1\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \psi_2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\Delta(|\psi|^2 - r_0^2). \tag{3.10}$$

Soit R_* comme dans la Proposition 3.1 (ii). Alors sur $R^N \setminus B(0,R_*)$ on a un relèvement $\psi = \rho e^{i\theta}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ une fonction telle que $\chi = 0$ sur $B(0,2R_*)$ et $\chi = 1$ sur $\mathbf{R}^N \setminus B(0,3R_*)$. On note $G_j = \psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x_j} - \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x_j} - r_0^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\chi\theta)$, $\quad j = 1,\ldots,N$. On peut montrer que $G_j \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et que le moment $\tilde{Q}(\psi)$ par rapport à la direction de x_1 est donné par

$$\tilde{Q}(\psi) = -\int_{\mathbf{R}^N} \psi_1\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \psi_2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - r_0^2\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi\theta)\, dx = -\int_{\mathbf{R}^N} G_1\, dx.$$

De (3.9) et (3.10) on déduit

$$\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(|\psi|^2 - r_0^2) = \mathrm{div}(\psi_1\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1 - r_0^2\nabla(\chi\theta)) + r_0^2\Delta(\chi\theta), \tag{3.11}$$

respectivement

$$\frac{1}{2}\Delta(|\psi|^2 - r_0^2) - \frac{v_s^2}{2}(|\psi|^2 - r_0^2)$$

$$(3.12) \qquad = |\nabla\psi_1|^2 + |\nabla\psi_2|^2 - F(x,|\psi|^2)|\psi|^2 - \frac{v_s^2}{2}(|\psi|^2 - r_0^2)$$

$$-c\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - r_0^2\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi\theta)\right) - cr_0^2\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi\theta).$$

On note

$$H = |\nabla\psi_1|^2 + |\nabla\psi_2|^2 - F(x,|\psi|^2)|\psi|^2 - \frac{v_s^2}{2}(|\psi|^2 - r_0^2) - c(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - r_0^2\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi\theta)).$$

On prend la dérivée de (3.11) par rappport à x_1 et on la multiplie par c, ensuite on prend la Laplacien de (3.12). En rajoutant les égalités obtenues on trouve

$$(3.13) \qquad \frac{1}{2}\Big(\Delta^2 - v_s^2\Delta + c^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big)(|\psi|^2 - r_0^2) = \Delta H + c\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{div}(G)).$$

En prenant la transformation de Fourier de (3.13) on obtient

$$(3.14) \qquad \frac{1}{2}\left(|\xi|^4 + v_s^2|\xi|^2 - c^2\xi_1^2\right)\mathcal{F}(|\psi|^2 - r_0^2) = -|\xi|^2\widehat{H} - c\sum_{k=1}^{N}\xi_1\xi_k\widehat{G_k}.$$

Soit $\Gamma = \{\xi \in \mathbf{R}^N \mid |\xi|^4 + v_s^2|\xi|^2 - c^2\xi_1^2 = 0\}$. Si $c^2 \le v_s^2$ on a $\Gamma = \{0\}$. Dans le cas où $c^2 > v_s^2$, Γ est une sous-variété de $\mathbf{R}^N$ et en utilisant (3.14) on obtient

$$(3.15) \qquad |\xi|^2\widehat{H}(\xi) + c\sum_{k=1}^{N}\xi_1\xi_k\widehat{G_k}(\xi) = 0 \qquad \text{pour tout } \xi \in \Gamma.$$

Il est clair que $\Gamma = \{(\xi_1,\xi') \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{N-1} \mid |\xi'|^2 = \frac{1}{2}(-v_s^2 - 2\xi_1^2 + \sqrt{v_s^4 + 4c^2\xi_1^2})\}$. Soit $f(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-v_s^2 - 2t^2 + \sqrt{v_s^4 + 4c^2t^2}\right)}$. La function f est définie sur $[-\sqrt{c^2 - v_s^2}, \sqrt{c^2 - v_s^2}]$, on a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f^2(t)}{t^2} = -1 + \frac{c^2}{v_s^2}$. Pour $j \in \{2,\dots,N\}$ et $t \in (0, \sqrt{c^2 - v_s^2}]$, on note $\xi(t) = (t,0,\dots,0,f(t),0,\dots,0)$ et $\tilde{\xi}(t) = (t,0,\dots,0,-f(t),0,\dots,0)$, où $f(t)$, respectivement $-f(t)$, sont à la $j^{\text{ième}}$ place. Il est évident que $\xi(t), \tilde{\xi}(t) \in \Gamma$. De (3.15) on obtient

$$(3.16) \qquad (t^2 + f^2(t))\widehat{H}(\xi(t)) + ct^2\widehat{G_1}(\xi(t)) + ctf(t)\widehat{G_j}(\xi(t)) = 0, \qquad \text{respectivement}$$

$$(3.17) \qquad (t^2 + f^2(t))\widehat{H}(\tilde{\xi}(t)) + ct^2\widehat{G_1}(\tilde{\xi}(t)) - ctf(t)\widehat{G_j}(\tilde{\xi}(t)) = 0.$$

On multiplie (3.16) et (3.17) par $\frac{1}{t^2}$, on prend la limite lorsque $t \downarrow 0$ et on trouve

$$(3.18) \qquad \frac{c^2}{v_s^2}\widehat{H}(0) + c\widehat{G_1}(0) + c\sqrt{-1 + \frac{c^2}{v_s^2}}\widehat{G_j}(0) = 0, \text{ respectivement}$$

$$(3.19) \qquad \frac{c^2}{v_s^2}\widehat{H}(0) + c\widehat{G_1}(0) - c\sqrt{-1 + \frac{c^2}{v_s^2}}\widehat{G_j}(0) = 0.$$

De (3.18) et (3.19) on déduit que $\frac{c^2}{v_s^2}\widehat{H}(0) + c\widehat{G_1}(0) = 0$, et cette égalité est exactement (3.6). $\square$

Théorème 3.4 *On suppose que $N \geq 2$, les conditions (C1) et (C2) sont satisfaites et $c^2 > v_s^2$. De plus, on suppose qu'il existe $\alpha \in [-1 + \frac{N-3}{N-1}(1 - \frac{v_s^2}{c^2}), \frac{v_s^2}{c^2}]$ tel que*

$$sF(s) + \frac{v_s^2}{2}(s - r_0^2) + \Big(1 - \alpha - \frac{v_s^2}{c^2}\Big)V(s) \leq 0 \qquad \textit{pour } s \geq 0.$$

Soit ψ une onde progressive d'énergie finie et de vitesse c de (3.1). Alors ψ est constante.

Preuve. On multiplie (3.5) par $1 - \frac{v_s^2}{c^2}$ et on soustrait l'égalité qui en résulte de (3.6). On obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^N} \frac{v_s^2}{c^2}\Big|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big(1 - (1 - \frac{v_s^2}{c^2})\frac{N-3}{N-1}\Big)\sum_{k=2}^{N}\Big|\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\Big|^2 dx \\ &- \int_{\mathbf{R}^N} F(|\psi|^2)|\psi|^2 + \frac{v_s^2}{2}(|\psi|^2 - r_0^2) + \Big(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\Big)V(|\psi|^2)\, dx = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Si α vérifie la condition du Théorème 3.4, on multiplie (3.4) par α et on rajoute le résultat à (3.20). On trouve

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^N} \Big(\frac{v_s^2}{c^2} - \alpha\Big)\Big|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big(\alpha + 1 - (1 - \frac{v_s^2}{c^2})\frac{N-3}{N-1}\Big)\sum_{k=2}^{N}\Big|\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\Big|^2 dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} F(|\psi|^2)|\psi|^2 + \frac{v_s^2}{2}(|\psi|^2 - r_0^2) + (1 - \alpha - \frac{v_s^2}{c^2})V(|\psi|^2)\, dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

On observe alors que le membre de droite de (3.21) est négatif ou nul, alors que les coefficients qui apparaîssent dans le membre de gauche sont positifs (et au moins un est strictement positif). Comme $\nabla\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$, on en déduit que ψ est constante. □

Remarquons que les hypothèses du Théorème 3.4 sont vérifiées aussi bien par $F(s) = 1 - s$ que par $F(s) = -\alpha_1 + \alpha_3 s - \alpha_5 s^2$, où $\alpha_i > 0$ et F admet deux racines positives. La conclusion du Théorème 3.4 est donc valable pour l'équation de Gross-Pitaevskii comme pour l'équation de Schrödinger avec non-linéarité cubique-quintique.

3.2 Existence des ondes progressives pour toute vitesse subsonique

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à la démonstration de l'existence des ondes progressives pour (3.1). La plupart des résultats portent sur l'équation de Gross-Pitaevskii. Dans [BS99], l'existence de telles solutions a été prouvée en dimension deux d'espace et pour toute vitesse $c \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, où ε est petit. En dimension $N \geq 3$, il a été prouvé dans [BOS04] qu'il existe des ondes progressives pour une suite de vitesses $c_n \longrightarrow 0$. Le même résultat a été obtenu pour toute vitesse $c \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans [Ch04]. Dans un travail récent [BGS07], l'existence a été obtenue en dimensions 2 et 3 pour une plage plus large de vitesses (qui contient des vitesses proches de v_s en dimension 2). Cependant, même en dimension 2 les résultats de [BGS07] ne couvrent pas toutes les vitesses subsoniques. Pour des nonlinéarités de type "cubique-quintique" il a été prouvé dans [3] qu'il existe des ondes progressives de petite vitesse en dimension $N \geq 4$.

Dans [10], mon objectif a été à la fois de donner une preuve de l'existence des ondes progressives pour toute vitesse subsonique et de trouver une approche qui soit valable pour les différents types de nonlinéarité qui peuvent apparaître dans (3.1).

Notons que, si les conditions (C1) et (C2) dans la section précedente sont vérifiées, la Proposition 3.1 nous donne une estimation uniforme pour la norme L^∞ des solutions d'énergie finie de (3.3) : on sait qu'il existe une constante $M > 0$ (qui dépend uniquement de F) ayant la propriété que toute solution ψ satisfait $|\psi(x)| \le M$ sur $\mathbf{R}$. On peut alors remplacer la fonction F par une fonction $\tilde{F}$ telle que $F = \tilde{F}$ sur $[0, M_1]$, où $M_1 > M$, $\tilde{F}$ satisfait (C1) et (C2) (eventuellement avec une constante $\beta \in (0, \alpha)$ au lieu de α) et, de plus, $\tilde{F}$ a une croissance sous-critique à l'infini. On peut donc supposer que la condition suivante est satisfaite :

C3. Il existe $p_0 < \frac{2^*}{2} - 2 = \frac{2}{N-2}$ et $C > 0$ tels que $|\tilde{F}(s)| \le C s^{p_0}$ pour $s > M_1$.

Si $\tilde{F}$ est comme ci-dessus et si ψ satisfait l'équation (3.3) avec $\tilde{F}$ à la place de F, par la Proposition 3.1 on sait que $|\psi| \le M$, donc ψ est une solution de (3.3).

Le résultat principal de l'article [10] est le suivant :

Théorème 3.5 *Soit $N \ge 3$. On suppose que les conditions (C1), (C2), (C3) sont vérifiées. Alors pour toute vitesse $c \in (-v_s, v_s)$ il existe des ondes progressives de (3.1) de vitesse c et d'énergie finie.*

Nous allons décrire les idées qui ont conduit à la preuve de ce résultat. Compte tenu des conditions aux limites à l'infini, on a cherché des solutions de la forme $\psi = r_0 - u$, où $u \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$. Alors u satisfait l'équation

$$icu_{x_1} - \Delta u + F(|r_0 - u|^2)(r_0 - u) = 0 \qquad \text{dans } \mathbf{R}^N. \tag{3.22}$$

Formellement, les solutions de (3.22) sont des points critiques de la fonctionnelle

$$E_c(u) = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx + cQ(u) + \int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0 - u|^2) \, dx, \tag{3.23}$$

où Q est le moment par rapport à x_1. On considère également les fonctionnelles

$$A(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \sum_{k=2}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx,$$

$$B_c(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx + cQ(u) + \int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0 - u|^2) \, dx, \tag{3.24}$$

$$P_c(u) = \frac{N-3}{N-1} A(u) + B_c(u),$$

en sorte que $E_c(u) = A(u) + B_c(u) = \frac{2}{N-1} A(u) + P_c(u)$. D'après la Proposition 3.2, toute solution de (3.22) satisfait l'identité de Pohozaev $P_c(u) = 0$. Par conséquent $B_c(u) = -\frac{N-3}{N-1} A(u) < 0$, ce qui implique $B_c(u) < 0$ si $N \ge 4$, respectivement $B_c(u) = 0$ si $N = 3$. Pour toute fonction v, en utilisant la notation $v_{\lambda,\sigma}(x) = v\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x'}{\sigma}\right)$, on trouve

$$\begin{aligned} &E_c(v_{1,\sigma}) = \sigma^{N-3} A(v) + \sigma^{N-1} B_c(v) \qquad \text{et} \\ &\tfrac{d}{d\sigma}\left(E_c(v_{1,\sigma})\right) = (N-3)\sigma^{N-4} A(v) + (N-1)\sigma^{N-2} B_c(v). \end{aligned} \tag{3.25}$$

En dimension $N \ge 4$, si la fonction v qui satisfait $B_c(v) < 0$ il existe un unique $\sigma_v > 0$ tel que $P_c(v_{1,\sigma_v}) = 0$. De plus, (3.25) implique que la fonction $\sigma \longmapsto E_c(v_{1,\sigma_v})$ est croissante sur $(0, \sigma_v]$ et décroissante sur $[\sigma_v, \infty)$. Cette observation suggère qu'il est intéressant de minimiser E_c sous la contrainte $P_c = 0$. C'est exactement la démarche que nous avons suivie pour trouver des points critiques de E_c.

Soit $a = \sqrt{-\frac{1}{2}F'(r_0^2)}$. Alors $v_s = 2ar_0$ et la condition (C1) implique que pour s dans un voisinage de r_0^2 on a

$$(3.26)\quad V(s) = \frac{1}{2}V''(r_0^2)(s-r_0^2)^2 + (s-r_0^2)^2\varepsilon(s-r_0^2) = a^2(s-r_0^2)^2 + (s-r_0^2)^2\varepsilon(s-r_0^2),$$

où $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$. Par conséquent, pour u proche de zéro, on peut approximer $V(|r_0 - u|^2)$ par $a^2(|r_0 - u|^2 - r_0^2)^2$.

On fixe une fonction $\varphi \in C^\infty([0,\infty), \mathbf{R})$ telle que $\varphi(s) = s$ pour $s \in [0, 2r_0]$, φ est croissante et $\varphi(s) = 3r_0$ pour $s \geq 4r_0$. Pour un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, on considère l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_{GL}^{\Omega}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + a^2 \int_\Omega \left(\varphi^2(|r_0 - u|) - r_0^2\right)^2 \, dx.$$

On note $E_{GL}(u) = E_{GL}^{\mathbf{R}^N}(u)$. Compte tenu de (3.26), l'espace naturel de fonctions sur lequel on doit étudier la fonctionnelle E_c est

$$\mathcal{X} = \{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^N) \mid E_{GL}(u) < \infty\}.$$

Par l'injection de Sobolev on a $\mathcal{X} \subset L^{2^*}(\mathbf{R}^N)$. Soit $u \in \mathcal{X}$. Lorsque $u(x)$ se trouve dans un voisinage de zéro, on pout majorer $|V(|r_0 - u(x)|^2)|$ grâce à (3.26) ; lorsque $u(x)$ est "loin" de zéro, par (C3) on obtient une majoration $|V(|r_0 - u(x)|^2)| \leq C|u|^{2^*}(x)$. Donc $V(|r_0 - u|^2) \in L^1(\mathbf{R}^N)$ pour tout $u \in \mathcal{X}$.

Nous allons indiquer comment définir le moment Q pour toutes les fonctions de $\mathcal{X}$. Remarquons que pour tout $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ on doit avoir $Q(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \langle iu_{x_1}, u\rangle \, dx$, alors que pour toute fonction u qui admet un relèvement $r_0 - u = \rho e^{i\theta}$ on a (au moins formellement) $Q(u) = -\int_{\mathbf{R}^N} \rho^2\theta_{x_1} \, dx = -\int_{\mathbf{R}^N} (\rho^2 - r_0^2)\theta_{x_1} \, dx$, où $\rho^2 - r_0^2, \ \theta_{x_1} \in L^2(\mathbf{R}^N)$.

On observe que pour tout $u \in \mathcal{X}$ on a $\langle iu_{x_1}, u\rangle \in L^1(\mathbf{R}^N) + \mathcal{Y}$, où $\mathcal{Y} = \{\partial_{x_1}\phi \mid \phi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^N)\}$. En posant $L(v + w) = \int_{\mathbf{R}^N} v \, dx$ pour $v \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $w \in \mathcal{Y}$, on vérifie sans peine que L est définie sans ambiguïté et constitue une forme linéaire sur $L^1(\mathbf{R}^N) + \mathcal{Y}$. Ceci nous permet de définir

$$Q(u) = L(\langle iu_{x_1}, u\rangle) \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{X}.$$

On vérifie ensuite que la fonctionnelle Q a les propriétés convenables pour notre approche variationnelle.

Un outil technique essentiel dans la démonstration du Théorème 3.5 est une procédure de "régularisation" pour les fonctions de $\mathcal{X}$ qui a pour but d'éliminer les défauts topologiques à petite échelle des fonctions. Plus précisément, pour $u \in \mathcal{X}$, $h > 0$ et pour un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ on considère la fonctionnelle

$$G_{h,\Omega}^u(v) = E_{GL}^\Omega(v) + \frac{1}{h^2}\int_\Omega \varphi\left(\frac{|v-u|^2}{32r_0}\right) dx.$$

On montre que $G_{h,\Omega}^u$ admet des minimiseurs dans l'ensemble

$$\{v \in \mathcal{X} \mid v = u \text{ sur } \mathbf{R}^N \setminus \Omega, \ v - u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

De plus, les minimiseurs v_h de cette fonctionnelle ont des propriétés remarquables. Ainsi,

• $||v_h - u||_{L^2(\mathbf{R}^N)} \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$,

• pour tout compact $\omega \subset \Omega$ on peut estimer $||\ |v_h - r_0| - r_0\ ||_{L^\infty(\omega)}$ en termes de h et de $E_{GL}^{\Omega}(u)$ et on trouve que $||\ |v_h - r_0| - r_0\ ||_{L^\infty(\omega)}$ est arbitrairement petite si l'énergie $E_{GL}^{\Omega}(u)$ est suffisamment petite.

On peut alors montrer les résultats suivants :

Lemme 3.6 *On suppose que* $0 \le c < v_s$. *Alors pour tout* $\varepsilon \in (0, 1 - \frac{c}{v_s})$ *il existe* $K > 0$ *tel que pour tout* $u \in \mathcal{X}$ *avec* $E_{GL}(u) < K$ *on a*

$$E_c(u) > \varepsilon E_{GL}(u).$$

Nous allons tenter de donner une idée de la démonstration.

Soit $\delta > 0$ suffisamment petit, tel que $\delta < \frac{r_0}{2}$ et $\frac{c}{2a(r_0-\delta)} < 1 - \varepsilon$ (un tel δ existe car $v_s = 2ar_0$ et $\varepsilon < 1 - \frac{c}{v_s}$). Considérons d'abord le cas d'une fonction $v \in \mathcal{X}$ qui vérifie $r_0 - \delta < |r_0 - v| \le r_0 + \delta$ sur $\mathbf{R}^N$. Si v est une telle fonction, il existe un relèvement $r_0 - v = \rho e^{i\theta}$ et on a $|\nabla v|^2 = |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla \theta|^2$ et $Q(v) = -\int_{\mathbf{R}^N} (\rho^2 - r_0^2)\theta_{x_1}\, dx$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\frac{c}{1-\varepsilon}|Q(v)| \le 2a(r_0-\delta)|Q(v)| \le 2a(r_0-\delta)||\theta_{x_1}||_{L^2(\mathbf{R}^N)}||\rho^2 - r_0^2||_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

$$\le (r_0-\delta)^2 \int_{\mathbf{R}^N} |\theta_{x_1}|^2\, dx + a^2 \int_{\mathbf{R}^N} \left(\rho^2 - r_0^2\right)^2\, dx$$

$$\le \int_{\mathbf{R}^N} \rho^2 |\nabla\theta|^2 + a^2 \left(\rho^2 - r_0^2\right)^2\, dx \le E_{GL}(v).$$

Par conséquent, $E_{GL}(v) - c|Q(v)| > \varepsilon E_{GL}(v)$. Si $E_{GL}(v)$ est suffisamment petite, alors $\int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0 - v|^2)\, dx$ est "proche" de $a^2 \int_{\mathbf{R}^N} \left(\varphi^2(|r_0 - v|) - r_0^2\right)^2\, dx$ et on en déduit que v satisfait la conclusion du Lemme 3.6.

Dans le cas général : si $u \in \mathcal{X}$ est une fonction quelconque, on choisit $h > 0$ petit et on prend un minimiseur v_h de $G^u_{h,\mathbf{R}^N}$. Si l'énergie $E_{GL}(u)$ est suffisamment petite, on a $||\ |v_h - r_0| - r_0\ ||_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} < \delta$, donc v_h vérifie la conclusion du lemme. Si h a été choisi suffisamment petit, v_h est "proche" de u et on peut montrer que u vérifie aussi la conclusion du Lemme 3.6.

En utilisant le Lemme 3.6, il est assez facile de voir que pour tout $k > 0$, la fonctionnelle E_c est bornée sur $\{u \in \mathcal{X} \mid E_{GL}(u) \le k\}$. On définit alors

$$E_{c,min}(k) = \inf\{E_c(u) \mid u \in \mathcal{X},\ E_{GL}(u) = k\}.$$

Lemme 3.7 *On suppose que* $0 < c < v_s$. *La fonction* $E_{c,min}$ *a les propriétés suivantes :*

i) Il existe $k_0 > 0$ *tel que* $E_{c,min}(k) > 0$ *pour tout* $k \in (0, k_0)$.

ii) On a $\lim_{k\to\infty} E_{c,min}(k) = -\infty$.

iii) Pour tout $k > 0$ *on a* $E_{c,min}(k) < k$.

La partie (i) découle directement du Lemme 3.6. Notons que pour $c > v_s$, les Lemmes 3.6 et 3.7 (i) ne sont plus valables. Plus précisément, on peut montrer que la fonction $k \longmapsto E_{c,min}(k)$ est strictement décroissante (et négative) sur $(0, \infty)$.

Le Lemme 3.7 nous permet de déduire que

$$S_c := \sup\{E_{c,min}(k) \mid k > 0\} > 0. \tag{3.27}$$

Lemme 3.8 *L'ensemble $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{X} \mid u \neq 0,\ P_c(u) = 0\}$ est non vide et on a*

$$T_c := \inf\{E_c(u) \mid u \in \mathcal{C}\} \geq S_c > 0.$$

Preuve. Soit $w \in \mathcal{X}$ une fonction telle que $E_c(w) < 0$ (une telle fonction existe par le Lemme 3.7 (ii)). Alors $P_c(w) = E_c(w) - \frac{2}{N-1}A(w) < 0$. On a

$$P_c(w_{\sigma,1}) = \frac{1}{\sigma}\int_{\mathbf{R}^N}\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right|^2 dx + \frac{N-3}{N-1}\sigma A(w) + cQ(w) + \sigma\int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0 - w|^2)\,dx. \tag{3.28}$$

Comme $P_c(w_{1,1}) = P_c(w) < 0$ et $\lim\limits_{\sigma\to 0} P_c(w_{\sigma,1}) = \infty$, il existe $\sigma_0 \in (0,1)$ tel que $P_c(w_{\sigma_0,1}) = 0$, donc $w_{\sigma_0,1} \in \mathcal{C}$.

Pour la seconde partie, supposons d'abord que $N \geq 4$. Soit $v \in \mathcal{C}$. Alors $A(v) > 0$ et $B_c(v) = -\frac{N-3}{N-1}A(v) < 0$. En utilisant (3.25), on obtient que $\sigma \longmapsto E_c(v_{1,\sigma})$ est croissante sur $(0,1]$ et décroissante sur $[1,\infty)$, donc atteint son maximum en $\sigma = 1$. Soit $k > 0$ fixé. On voit facilement qu'il existe un unique $\sigma(k,v) > 0$ tel que $E_{GL}(v_{1,\sigma(k,v)}) = k$. Alors

$$E_{c,min}(k) \leq E_c(v_{1,\sigma(k,v)}) \leq E_c(v_{1,1}) = E_c(v).$$

En prenant le sup pour $k \geq 0$ dans cette inégalité on obtient $S_c \leq E_c(v)$.

Considérons maintenant le cas $N = 3$. Soit $v \in \mathcal{C}$. Alors $E_c(v_{1,\sigma}) = E_c(v) = A(v) =$ *constant* pour $\sigma > 0$. Soit $k > 0$. On distingue deux cas :

• Si $A(v) \geq k$, on a $E_c(v) = A(v) \geq k > E_{c,min}(k)$ par le Lemme 3.7 (iii).

• Si $A(v) < k$, il existe un unique $\sigma(k,v) > 0$ tel que $E_{GL}(v_{1,\sigma(k,v)}) = k$. Alors $E_c(v) = E_c(v_{1,\sigma(k,v)}) \geq E_{c,min}(k)$.

Dans les deux cas on obtient $E_c(v) \geq E_{c,min}(k)$ quelque soient $k > 0$ et $v \in \mathcal{C}$ et le lemme est prouvé. □

Lemme 3.9 *Soit T_c comme dans le lemme précedent. Alors :*

i) Pour tout $w \in \mathcal{X}$ qui satisfait $P_c(w) < 0$ on a $A(w) > \frac{N-1}{2}T_c$.

ii) Soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X}$ une suite telle que $(E_{GL}(u_n))_{n\geq 1}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} P_c(u_n) = \mu < 0$. Alors $\liminf\limits_{n\to\infty} A(u_n) > \frac{N-1}{2}T_c$.

Preuve. Nous démontrons seulement (i). Pour tout $\sigma > 0$, $P_c(w_{\sigma,1})$ est donné par (3.28). Comme dans la preuve du Lemme 3.7, il existe $\sigma_0 \in (0,1)$ tel que $P_c(w_{\sigma_0,1}) = 0$, donc $w_{\sigma_0,1} \in \mathcal{C}$. Par la définition de T_c on a $E_c(w_{\sigma_0,1}) \geq T_c$, et on en déduit que $A(u_{\sigma_0,1}) = \frac{N-1}{2}\left(E_c(u_{\sigma_0,1}) - P_c(u_{\sigma_0,1})\right) \geq \frac{N-1}{2}T_c$. Ceci implique $A(u) \geq \frac{N-1}{2}\frac{1}{\sigma_0}T_c > \frac{N-1}{2}T_c$. □

Pour prouver le Théorème 3.5, on montre que la fonctionnelle E_c admet un minimiseur dans $\mathcal{C}$. Ensuite on prouve que tout minimiseur satisfait (3.3). La démonstration est assez différente dans le cas $N = 3$ par rapport au cas $N \geq 4$. Nous commençons par le cas (plus facile) $N \geq 4$.

Théorème 3.10 *On suppose que $N \geq 4$. Soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X} \setminus \{0\}$ une suite telle que*

$$P_c(u_n) \longrightarrow 0 \qquad \textit{et} \qquad E_c(u_n) \longrightarrow T_c \qquad \textit{lorsque } n \longrightarrow \infty. \tag{3.29}$$

Il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$, une suite de points $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbf{R}^N$ et une fonction $u \in \mathcal{C}$ telles que

$$\nabla u_{n_k}(\cdot + x_k) \longrightarrow \nabla u \quad \textit{et} \quad \varphi^2(|r_0 - u_{n_k}(\cdot + x_k)|) - r_0^2 \longrightarrow \varphi^2(|r_0 - u|) - r_0^2 \quad \textit{dans } L^2(\mathbf{R}^N).$$

De plus, on a $E_c(u) = T_c$, donc u est un minimiseur de E_c dans $\mathcal{C}$.

Résumé de la preuve. Comme $A(u_n) = \frac{N-1}{2}\left(E_c(u_n) - P_c(u_n)\right) \longrightarrow \frac{N-1}{2}T_c$, par (3.29) on déduit que $(A(u_n))_{n\geq 1}$ est bornée. Ensuite on montre que $(E_{GL}(u_n))_{n\geq 1}$ est bornée. On utilise la méthode de concentration-compacité de P.-L. Lions [Lio84] pour montrer la convergence d'une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

En passant à une sous-suite, on peut supposer que $E_{GL}(u_n) \longrightarrow \alpha_0 > 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Soit $q_n(t)$ la fonction de concentration de $E_{GL}(u_n)$, c'est-à-dire

$$q_n(t) = \sup_{x\in\mathbf{R}^N} E_{GL}^{B(x,t)}(u_n).$$

Pour chaque n, q_n est une fonction croissante sur $[0,\infty)$ qui tend vers $E_{GL}(u_n)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Alors il existe une sous-suite (encore notée $(u_n)_{n\geq 1}$) et une fonction croissante $q : [0,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telles que $q_n(t) \longrightarrow q(t)$ quand $n \longrightarrow \infty$ pour presque tout $t \in [0,\infty)$.

On note $\alpha = \lim_{t\to\infty} q(t)$. Il est évident que $\alpha \in [0,\alpha_0]$. L'objectif est de prouver que l'énergie de u_n "se concentre", c'est-à-dire $\alpha = \alpha_0$.

Le fait que $\alpha > 0$ résulte du lemme suivant.

Lemme 3.11 *Soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X}$ une suite ayant les propriétés suivantes :*

a) $M_1 \leq E_{GL}(u_n) \leq M_2$, où M_1, M_2 sont deux constantes strictement positives, et

b) $\lim_{n\to\infty} P_c(u_n) = 0$.

Alors il existe $k > 0$ tel que $\sup_{y\in\mathbf{R}^N} \int_{B(y,1)} |\nabla u_n|^2 + a^2\left(\varphi^2(|r_0 - u_n|) - r_0^2\right)^2 dx \geq k$ pour tout n suffisamment grand.

La preuve du Lemme 3.11 est délicate. Elle repose sur la procédure de régularisation des fonctions décrite plus haut ainsi que sur le lemme de Lieb. L'idée de base de la démonstration est la suivante :

1. On suppose, par l'absurde, que $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}^N} E_{GL}^{B(x,1)}(u_n) = 0$.

On montre alors qu'il existe une suite $h_n \longrightarrow 0$ et pour chaque n il existe un minimiseur v_n de $G_{h_n,\mathbf{R}^N}^{u_n}$ tel que

$$\| \, |v_n - r_0| - r_0 \|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \longrightarrow \infty. \tag{3.30}$$

2. Soit $\varepsilon \in (0, 1 - \frac{c}{v_s})$. En utilisant (3.30), on montre comme dans la preuve du Lemme 3.6 que pour tout n sufisamment grand on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^N} \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\right|^2 dx + \frac{N-3}{N-1}A(v_n) + \int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0 - v_n|^2)\,dx + cQ(u_n) \\ &\geq \varepsilon\left(\int_{\mathbf{R}^N} \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\right|^2 dx + \frac{N-3}{N-1}A(v_n) + a^2\int_{\mathbf{R}^N} \left(\varphi^2(|r_0 - v_n|) - r_0^2\right)^2 dx\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

3. Comme $h_n \longrightarrow 0$, pour n grand v_n est proche de u_n, donc (3.31) a lieu pour (u_n) à la place de v_n et pour un $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ à la place de ε. On obtient ainsi une contradiction car $P_c(u_n) \longrightarrow 0$ et $E_{GL}(u_n) \geq M_1 > 0$.

L'étape suivante est de montrer qu'on ne peut pas avoir $\alpha \in (0,\alpha_0)$. On procède à nouveau par l'absurde et on supose que $\alpha \in (0,\alpha_0)$. Par un argument général on déduit qu'il existe une suite $R_n \longrightarrow \infty$ et une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}^N$ telles que :

$$E_{GL}^{B(x_n,R_n)}(u_n) \longrightarrow \alpha \qquad \text{et} \qquad E_{GL}^{\mathbf{R}^N\setminus B(x_n,2R_n)}(u_n) \longrightarrow \alpha_0 - \alpha. \tag{3.32}$$

Il est évident que (3.32) implique

$$E_{GL}^{B(x_n,2R_n)\setminus B(x_n,R_n)}(u_n) \longrightarrow 0.$$

Comme l'énergie de u_n sur la couronne $B(x_n, 2R_n) \setminus B(x_n, R_n)$ est petite, en utilisant à nouveau la procédure de régularisation on montre que pour chaque n il existe deux fonctions $u_{n,1}$ et $u_{n,2}$ telles que

$$E_{GL}(u_{n,1}) \longrightarrow \alpha \qquad \text{et} \qquad E_{GL}(u_{n,2}) \longrightarrow \alpha_0 - \alpha, \tag{3.33}$$

$$|A(u_n) - A(u_{n,1}) - A(u_{n,2})| \longrightarrow 0, \tag{3.34}$$

$$|P_c(u_n) - P_c(u_{n,1}) - P_c(u_{n,2})| \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty. \tag{3.35}$$

Il est facile de voir que les suites $(P_c(u_{n,i}))_{n\geq 1}$ sont bornées, $i = 1, 2$. En passant à nouveau à une sous-suite, on peut supposer que

$$P_c(u_{n,1}) \longrightarrow p_1 \qquad \text{et} \qquad P_c(u_{n,2}) \longrightarrow p_2 \qquad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

où $p_1,\ p_2 \in \mathbf{R}$. Par (3.35) on a $p_1 + p_2 = 0$ et on distingue deux cas :

a) Un des p_i est négatif, par exemple $p_1 < 0$. Par le Lemme 3.9 (ii) on déduit que $\liminf_{n\to\infty} A(u_{n,1}) > \frac{N-1}{2} T_c$. Alors (3.34) implique $\liminf_{n\to\infty} A(u_n) > \frac{N-1}{2} T_c$ et en utilisant le fait que $P_c(u_n) \longrightarrow 0$ on trouve $\liminf_{n\to\infty} E_c(u_n) > T_c$, ce qui contredit l'hypothèse du Théorème 3.10.

b) On a $p_1 = p_2 = 0$. Dans ce cas on utilise le

Lemme 3.12 *Soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X}$ une suite qui satisfait les propriétés suivantes :*
a) Il existe C_1, $C_2 > 0$ tels que $C_1 \leq E_{GL}(u_n)$ et $A(u_n) \leq C_2$ pour tout $n \geq 1$.
b) $P_c(u_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.
Alors on a $\liminf_{n\to\infty} E_c(u_n) \geq T_c$, où T_c est comme dans le Lemme 3.8.

Dans le cas (b), par le Lemme 3.12 on obtient $\liminf_{n\to\infty} E_c(u_{n,i}) \geq T_c$ pour $i = 1,\ 2$. En utilisant (3.34) et (3.35) on trouve $\liminf_{n\to\infty} E_c(u_n) \geq 2T_c$, ce qui est à nouveau une contradiction.

De ce qui précède on déduit que $\lim_{t\to\infty} q(t) = \alpha_0$. Il est alors classique de montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}^N$ telle que, en notant $\tilde{u}_n = u_n(\cdot + x_n)$, on a :

$$\begin{gathered} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } R_\varepsilon > 0 \text{ et } n_\varepsilon \in \mathbf{N}^* \text{ tels que} \\ E_{GL}^{\mathbf{R}^N \setminus B(0,R_\varepsilon)}(\tilde{u}_{n_k}) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n_\varepsilon. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Comme $(E_{GL}(\tilde{u}_n))_{n\geq 1}$ est bornée, il existe une sous-suite $(\tilde{u}_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{n_k} \rightharpoonup u \qquad \text{faiblement dans } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^N), \\ &\tilde{u}_{n_k} \longrightarrow u \qquad \text{fortement dans } L^p_{loc}(\mathbf{R}^N) \text{ et presque partout sur } \mathbf{R}^N. \end{aligned} \tag{3.37}$$

On en déduit que $u \in \mathcal{X}$ et $\varphi^2(|r_0 - \tilde{u}_{n_k}|) - r_0^2 \rightharpoonup \varphi^2(|r_0 - u|) - r_0^2$ faiblement dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

On prouve ensuite que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0-\tilde{u}_{n_k}|^2)\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} V(|r_0-u|^2)\,dx \tag{3.38}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} Q(\tilde{u}_{n_k}) = Q(u). \tag{3.39}$$

En utilisant (3.37), (3.38), (3.39) et le Lemme 3.9 (i) on montre que la sous-suite $(\tilde{u}_{n_k})_{k\geq 1}$ satisfait la conclusion du Théorème 3.10. $\square$

Proposition 3.13 *On suppose que $N \geq 4$, $0 \leq c < v_s$ et les conditions (C1), (C2), (C3) sont vérifiées. Soit u un minimiseur de E_c dans l'ensemble $\mathcal{C}$. Alors $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N)$, $\nabla u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ pour $p \in [2,\infty)$ et u est une solution de (3.22).*

Preuve. Il est évident que u minimise la fonctionnelle A sous la contrainte $P_c = 0$ et il est facile de voir que u satisfait une équation d'Euler-Lagrange $A'(u) = \alpha P_c'(u)$. On ne peut pas avoir $\alpha > 0$. En effet, supposons par l'absurde que $\alpha > 0$. Soit w tel que $P_c'(u).w > 0$. Alors pour $t < 0$ et t proche de zéro on a $P_c(u+tw) < 0$ et $A(u+tw) < A(u) = \frac{N-1}{2}T_c$, en contradiction avec le Lemme 3.9 (i). De même, on ne peut pas avoir $\alpha = 0$ (car ceci impliquerait $A'(u) = 0$, donc $u = 0$). Par conséquent, on a $\alpha < 0$ et l'équation d'Euler-Lagrange équivaut à

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \left(\frac{N-3}{N-1} - \frac{1}{\alpha}\right)\sum_{k=2}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + icu_{x_1} + F(|r_0-u|^2)(r_0-u) = 0. \tag{3.40}$$

Comme dans la Proposition 3.2 on montre alors que u satisfait une identité de Pohozaev analogue à (3.5) qui s'écrit

$$\frac{N-3}{N-1}\left(\frac{N-3}{N-1} - \frac{1}{\alpha}\right)A(u) + B_c(u) = 0. \tag{3.41}$$

De (3.41) et du fait que $P_c(u) = \frac{N-3}{N-1}A(u) + B_c(u) = 0$, on en déduit que $\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{N-1}$ et u satisfait (3.22). La régularité de u résulte de la Proposition 3.1. $\square$

Dans le cas $N = 3$ la preuve suit les mêmes étapes, avec quelques difficultés techniques supplémentaires (dont la plupart sont dûes à l'invariance des fonctionnelles A et B_c par dilatations par rapport aux variables (x_2, x_3) et au fait qu'en dimension 3 on a $P_c = B_c$, donc $P_c(v)$ ne contient pas de termes $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^3}\left|\frac{\partial v}{\partial x_2}\right|^2 dx$ et $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^3}\left|\frac{\partial v}{\partial x_3}\right|^2 dx$).

Pour $v \in \mathcal{X}$ on note

$$D(v) = \int_{\mathbf{R}^3}\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|^2 dx + a^2\int_{\mathbf{R}^3}\left(\varphi^2(|r_0-v|) - r_0^2\right)^2 dx.$$

Il est évident que pour tout $v \in \mathcal{X}$ et $\sigma > 0$ on a

$$A(v_{1,\sigma}) = A(v), \qquad B_c(v_{1,\sigma}) = \sigma^2 B_c(v) \qquad \text{et} \qquad D(v_{1,\sigma}) = \sigma^2 D(v). \tag{3.42}$$

Contrairement au cas $N \geq 4$, (3.42) implique qu'il existe des suites $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}$ telles que $E_c(u_n) \longrightarrow T_c$ et $D(u_n) \longrightarrow \infty$, et par conséquent $E_{GL}(u_n) \longrightarrow \infty$. Cependant, par (3.42) on déduit qu'il existe des suites $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}$ telles que $E_c(u_n) \longrightarrow T_c$ et $D(u_n) = 1$ pour tout n.

On considère l'ensemble

$$\Lambda_c = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \text{ il existe une suite } (u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X} \text{ telle que } D(u_n) \geq 1,\ B_c(u_n) \longrightarrow 0 \text{ et } A(u_n) \longrightarrow \lambda \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty\}.$$

Soit $\lambda_c = \inf \Lambda_c$. Il est facile de voir que $T_c \in \Lambda_c$, donc $\lambda_c \leq T_c$. On peut montrer que $\lambda_c \geq S_c$, où S_c est donné par (3.27) (mais on ne sait pas si $S_c = T_c$).

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 3.14 *On suppose que $N = 3$. Soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X}$ une suite telle que*

$$D(u_n) \longrightarrow 1, \quad B_c(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad A(u_n) \longrightarrow \lambda_c \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty. \tag{3.43}$$

Il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$, une suite de points $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbf{R}^3$ et une fonction $u \in \mathcal{C}$ telles que

$$\nabla u_{n_k}(\cdot + x_k) \longrightarrow \nabla u \quad \text{et} \quad |r_0 - u_{n_k}(\cdot + x_k)|^2 - r_0^2 \longrightarrow |r_0 - u|^2 - r_0^2 \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}^3).$$

De plus, on a $E_c(u) = A(u) = T_c = \lambda_c$ et u est un minimiseur de E_c dans $\mathcal{C}$.

Si u est un minimiseur de E_c dans $\mathcal{C}$, comme dans la preuve de la Proposition 3.13 on montre qu'il existe $\alpha < 0$ tel que $A'(u) = \alpha B_c'(u)$. Ensuite il est facile de voir qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $u_{1,\sigma}$ satisfait (3.22). La régularité des solutions découle de la Proposition 3.1.

Finalement remarquons que le Lemme 3.9 implique que tous les minimiseurs de E_c dans $\mathcal{C}$ sont aussi des minimiseurs de la fonctionnelle $-P_c$ sous la contrainte $A = \frac{N-1}{2}T_c$. En utilisant les résultats de [7] (décrits dans la section 2.1) on déduit que ces minimiseurs sont à symétrie axiale par rapport à Ox_1 (après une translation).

3.3 Un système de Gross-Pitaevskii-Schrödinger

Dans [5] on a étudié le système

$$\begin{cases} 2i\psi_t = -\Delta\psi + \frac{1}{\varepsilon^2}(|\psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\varphi|^2 - 1)\psi, \\ 2i\delta\varphi_t = -\Delta\varphi + \frac{1}{\varepsilon^2}(q^2|\psi|^2 - \varepsilon^2 k_M^2)\varphi, \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^N,\ t \in \mathbf{R}, \tag{3.44}$$

où ψ et φ sont des fonctions complexes et vérifient les conditions aux limites $|\psi| \longrightarrow 1$, $\varphi \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$. Le système (3.44) modélise le mouvement d'une impureté dans un codensat de Bose. Il a été étudié par J. Grant et P. H. Roberts ([GR74]). En utilisant des développements asymptotiques formels et des calculs numériques, ils ont trouvé le rayon effectif et la masse induite de l'impureté.

Notons que la vitesse du son à l'infini associée à (3.44) est $v_s = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}$.

Les solutions de type onde progressive $\psi(x,t) = \tilde{\psi}(x_1 - ct, x')$, $\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}(x_1 - ct, x')$ semblent jouer un rôle important dans l'étude du système (3.44). On a montré dans [8] qu'en toute dimension $N \geq 2$, ce système n'admet pas d'onde progressive de vitesse supersonique et d'énergie finie.

En dimension un d'espace, on a montré l'existence des ondes progressives et on a obtenu une déscription assez précise de la structure globale de l'ensemble de telles solutions.

Compte tenu des conditions aux limites, on a cherché des ondes progressives de la forme

$$\tilde{\psi}(x) = (1 + \tilde{r}(x))e^{i\psi_0(x)}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \tilde{u}(x)e^{i\varphi_0(x)}.$$

Après calcul, on trouve $\psi_0' = c(1 - \frac{1}{(1+\tilde{r})^2})$, et $\varphi_0' = c\delta$. On effectue le changement d'échelle $\tilde{u}(x) = \frac{1}{\varepsilon}u(\frac{x}{\varepsilon})$ et $\tilde{r}(x) = r(\frac{x}{\varepsilon})$ et on obtient que les fonctions r et u satisfont les équations

$$(3.45)\qquad \begin{aligned} &-r'' - (1+r) + (1+r)^3 - c^2\varepsilon^2\Big(1 + r - \tfrac{1}{(1+r)^3}\Big) + (1+r)u^2 = 0, \\ &-u'' + (q^2(1+r)^2 - \varepsilon^2(c^2\delta^2 + k^2))u = 0, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites $r(x) \longrightarrow 0$, $u(x) \longrightarrow 0$ lorsque $|x| \longrightarrow \infty$. Comme $|\psi|(x) = 1 + r(\frac{x}{\varepsilon})$, on doit avoir $r(x) \geq 1$ sur $\mathbf{R}$. On note

$$V_1 = \{r \in H^1(\mathbf{R}) \mid \inf_{x\in\mathbf{R}} r(x) > -1\}.$$

Avec la notation $g(s) = g_{2c\varepsilon}(s) = -(1+s) + (1+s)^3 - c^2\varepsilon^2\Big(1 + s - \frac{1}{(1+s)^3}\Big)$ et $\lambda = \varepsilon^2(c^2\delta^2 + k^2)$, le système (3.45) s'écrit sous la forme

$$(3.46)\qquad \begin{aligned} &-r'' + g_{2c\varepsilon}(r) + (1+r)u^2 = 0, \\ &-u'' + q^2(1+r)^2u - \lambda u = 0. \end{aligned}$$

Si $u = 0$, la première des équations (3.46) admet uniquement la solution triviale $r = 0$ pour $|c\varepsilon| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lorsque $|c\varepsilon| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, elle admet aussi la solution

$$(3.47)\qquad r_*(x) = r_{2c\varepsilon}(x) = -1 + \sqrt{2c^2\varepsilon^2 + (1 - 2c^2\varepsilon^2)\tanh^2(\sqrt{\tfrac{1}{2} - c^2\varepsilon^2}x)}.$$

On appelle $(0,0)$ et $(r_{2c\varepsilon}, 0)$ les solutions triviales de (3.46). Une solution non-triviale est un triplet (λ, r, u) qui vérifie (3.46) et tel que $u \neq 0$.

L'objectif de l'article [5] est de montrer l'existence des solutions non-triviales et d'étudier le structure de l'ensemble de telles solutions. Tout d'abord, on a le résultat de non-existence suivant :

Proposition 3.15

a) Quelque soit $\lambda \in \mathbf{R}$, le système (3.46) n'admet pas de solution $(r,u) \neq (0,0)$ si $|c| \geq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}$.

b) On suppose que $|c| < \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}$ et que $(\lambda, r, u) \in \mathbf{R} \times V_1 \times H^1(\mathbf{R})$ est une solution non-triviale de (2). Alors :

i) $2c^2\varepsilon^2q^2 < \lambda \leq q^2$ et

ii) $-1 + \sqrt{2}c\varepsilon < r(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Pour montrer l'existence des solutions non-triviales de (3.46) on a utilisé la théorie des bifurcations. On considère les espaces fonctionnels

$$\mathbf{H} = \{f \in H^2(\mathbf{R}) \mid f(x) = f(-x)\} \quad \text{et} \quad \mathbf{L} = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid f(x) = f(-x) \ \ p.p.\}.$$

On note $V = V_1 \cap \mathbf{H}$ et on introduit les opérateurs

$$(3.48)\qquad \begin{aligned} &S : V \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{L}, && S(r,u) = -r'' + g_{2c\varepsilon}(r) + (1+r)u^2, \\ &T : \mathbf{R} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{L}, && T(\lambda, r, u) = -u'' + q^2(1+r)^2u - \lambda u. \end{aligned}$$

Il est évident que (λ, r, u) est solution de (3.46) si et seulement si $S(r,u) = 0$ et $T(\lambda, r, u) = 0$. L'égalité $T(\lambda, r, u) = 0$ exprime le fait que λ est une valeur propre de l'opérateur linéaire $-\frac{d^2}{dx^2} + q^2(1+r)^2$ et u est un vecteur propre associé.

Afin de prouver l'apparition des branches de solutions non-triviales, on étudie les opérateurs S et T dans un voisinage d'une solution triviale $(\lambda, r_{2c\varepsilon}, 0)$. On montre que les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. L'opérateur $D_r S(r_{2c\varepsilon}, 0) = -\frac{d^2}{dx^2} + g'(r_{2c\varepsilon}) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{L}$ est inversible.
2. L'opérateur $Au = -u'' + q^2(1 + r_{2c\varepsilon})^2 u : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{L}$ satisfait
   i) $A \geq 2c^2\varepsilon^2 q^2$
   ii) $\sigma_{ess}(A) = [q^2, \infty)$,
   iii) toute valeur propre $\lambda < q^2$ est simple, et le vecteur propre correspondant est à décroissance exponentielle,
   iv) le nombre de valeurs propres est strictement inférieur à $1 + (2\sqrt{2})q^2$,
   v) le nombre de valeurs propres tend vers $+\infty$ quand $q \longrightarrow \infty$.

Les propriétés ci-dessus et le théorème des fonctions implicites impliquent que pour $\lambda < q^2$ il existe des solutions non-triviales au voisinage d'une solution $(\lambda, r_{2c\varepsilon}, 0)$ si et seulement si λ est valeur propre de l'opérateur A.

En utilisant une variante du théorème de bifurcation à partir d'une valeur propre simple de Crandall et Rabinowitz [CR71], on prouve :

Théorème 3.16 *Soit λ_0 une valeur propre de A et soit u_0 un vecteur propre correspondant. Il existe une fonction*

$$s \longmapsto (\lambda(s), r(s), u(s)) \in \mathbf{R} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \cap \{u_0\}^{\perp}$$

définie sur $(-\eta, \eta)$ telle que $r(0) = 0$, $u(0) = 0$, $\lambda(0) = \lambda_0$ et

$$\begin{aligned} &S(r_{2c\varepsilon} + sr(s), s(u_0 + u(s))) = 0, \\ &T(\lambda(s), r_{2c\varepsilon} + sr(s), s(u_0 + u(s))) = 0. \end{aligned}$$

De plus, il existe un voisinage U de $(\lambda_0, r_{2c\varepsilon}, 0)$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ tel que toute solution du système (3.46) dans U est soit de la forme $(\lambda(s), r_{2c\varepsilon} + sr(s), s(u_0 + u(s)))$, soit de la forme $(\lambda, r_{2c\varepsilon}, 0)$.

Pour obtenir une information globale sur la structure de l'ensemble des solutions, on travaille dans des espaces de Sobolev à poids. Plus précisément, on choisit une fonction $W : \mathbf{R} \longrightarrow [1, \infty)$ continue, paire, croissante sur $(0, \infty)$ et qui se comporte comme $|x|^s$ au voisinage de l'infini pour un $s > 0$. On considère les espaces

$$\mathbf{L}_W = \{\varphi \in \mathbf{L} \mid W\varphi \in \mathbf{L}\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H}_W = \{\varphi \in \mathbf{H} \mid W\varphi, W\varphi', W\varphi'' \in \mathbf{L}\}.$$

Le résultat de décroissance suivant montre qu'il n'y a pas de perte de solutions lorsqu'on remplace l'espace $\mathbf{H}$ par $\mathbf{H}_W$.

Lemme 3.17 *Si (λ, r, u) est solution du système (3.46) dans $(-\infty, q^2) \times V \times \mathbf{H}$, alors $r \in \mathbf{H}_W$ et $u \in \mathbf{H}_W$.*

On note $w = r - r_{2c\varepsilon}$ et on écrit le système (3.46) sous la forme

$$\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_1(w, u) \\ H_2(\lambda, w, u) \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

où

$$A_\lambda(u) = A(\lambda, u) = q^2\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + q^2 - \lambda\Big)^{-1}[(r_{2c\varepsilon}^2 + 2r_{2c\varepsilon})u],$$

$$B(w) = \Big(-\frac{d^2}{dx^2} + g'_{2c\varepsilon}(0)\Big)^{-1}[(g'_{2c\varepsilon}(r_{2c\varepsilon}) - g'_{2c\varepsilon}(0))w]$$

sont des opérateurs linéaires, compacts de $\mathbf{H}_W$ dans $\mathbf{H}_W$ et H_1, H_2 sont continus, compacts sur les ensembles bornés de $\Omega := (-\infty, q^2) \times ((V - r_{2c\varepsilon}) \cap \mathbf{H}_W) \times \mathbf{H}_W$ et satisfont les estimations

$$||H_1(w,u)||_{\mathbf{H}_W} = o(||w||_{\mathbf{H}_W} + ||u||_{\mathbf{H}_W}),$$

respectivement

$$||H_2(\lambda, w, u)||_{\mathbf{H}_W} = o(||w||_{\mathbf{H}_W} + ||u||_{\mathbf{H}_W})$$

lorsque w, u sont proches de zéro dans $\mathbf{H}_W$, uniformément par rapport à λ lorsque $\lambda \in [d,e] \subset (-\infty, q^2)$.

En utilisant une variante du théorème de bifurcation globale de Rabinowitz ([Ra71]), on montre :

Théorème 3.18 *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions non-triviales du système (3.46) dans $\mathbf{R} \times V \times \mathbf{H}$. Pour toute valeur propre $\lambda_m < q^2$ de A, l'ensemble $\mathcal{S} \cup \{(\lambda_m, r_*, 0)\}$ possède une composante connexe $\mathcal{C}_m$ dans $(-\infty, q^2) \times \mathbf{H}_W \times \mathbf{H}_W$ qui contient $(\lambda_m, r_*, 0)$ et qui a au moins une des propriétés suivantes :*

i) $\mathcal{C}_m$ est non-bornée.

ii) $\mathcal{C}_m$ contient une suite (λ_n, r_n, u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = q^2$.

Remarquons que le nombre de branches de solutions dans le Théorème 3.18 est le même que le nombre de valeurs propres de l'opérateur A. On a donc une seule branche si q est suffisamment petit et le nombre de branches tend vers l'infini lorsque $q \longrightarrow \infty$.

Nous pensons que les informations obtenues en dimension un seront utiles dans l'étude des cas bi$-$ et tridimensionnels, plus intéressants d'un point de vue physique.

Liste de publications

Articles parus ou à paraître dans des revues internationales avec comité de lecture

1. M. Mariş, *Analyticity and decay properties of the solitary waves to the Benney-Luke equation,* Differential and Integral Equations, Vol. 14, No. 3 (2001), pp. 361-384.

2. M. Mariş, *On the existence, regularity and decay of solitary waves to a generalized Benjamin-Ono equation,* Nonlinear Analysis 51 (2002), pp. 1073-1085.

3. M. Mariş, *Existence of nonstationary bubbles in higher dimensions,* Journal des Mathématiques Pures et Appliquées 81 (2002), pp. 1207-1239.

4. M. Mariş, *Stationary solutions to a nonlinear Schrödinger equation with potential in one dimension,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 133A (2003), pp. 409-437.

5. M. Mariş, *Global branches of travelling waves to a Gross-Pitaevskii-Schrödinger system in one dimension,* SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 37, No. 5 (2006), pp. 1535-1559.

6. O. Lopes, M. Mariş, *Symmetry of minimizers for some nonlocal variational problems,* Journal of Functional Analysis 254 (2008), pp. 535-592.

7. M. Mariş, *On the symmetry of minimizers,* Archive for Rational Mechanics and Analysis, à paraître, DOI 10.1007/s00205-008-0136-2.

8. M. Mariş, *Nonexistence of supersonic traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with non-zero conditions at infinity,* SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 40, No. 3 (2008), pp. 1076-1103.

Prépublications

9. J. Byeon, L. Jeanjean, M. Mariş, *Symmetry of least energy solutions,* article soumis, 2008.

10. M. Mariş, *Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity,* prépublication, 2008.

Références

[BaMa88] I. V. Barashenkov, V. G. Makhankov, *Soliton-like "bubbles" in a system of interacting bosons,* Phys. Lett. A 128 (1988), pp. 52-56.

[BeLi83] H. Berestycki, P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I. Existence of a ground state,* Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 313-345.

[BeGK83] H. Berestycki, T. Gallouët, O. Kavian, *Equations de champs scalaires euclidens non linéaires dans le plan,* C.R. Acad. Sc. Paris Série I - Math. 297 (1983), 307-310 and Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Paris VI, 1984.

[BGS07] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, *Travelling-waves for the Gross-Pitaevskii equation II,* arXiv :0711.2408.

[BGS08] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, *On the KP I transonic limit of two dimensional Gross-Pitaevskii travelling-waves,* arXiv :0806 :1122.

[BGSS08] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, D. Smets, *Orbital stability of the black soliton to the Gross-Pitaevskii equation,* Indiana Univ. Math. J., à paraître.

[BOS04] F. Béthuel, G. Orlandi, D. Smets, *Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation,* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), pp. 17-94.

[BS99] F. Béthuel, J.-C. Saut, *Travelling-waves for the Gross-Pitaevskii equation I,* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 70 (1999), pp. 147-238.

[BoLi97] J. L. Bona and Yi A. Li, *Decay and analyticity of solitary waves*, J. Math. Pures Appl., 76 (1997), pp. 377-430.

[BrLieb84] H. Brézis, E. H. Lieb, *Minimum Action Solutions for Some Vector Field Equations,* Comm. Math. Phys. 96 (1984), 97-113.

[BroZi88] J. E. Brothers, W.P. Ziemer, *Minimal rearrangements of Sobolev functions,* J. reine angew. Math. 384 (1988), 153-179.

[Ch04] D. Chiron, *Travelling-waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two,* Nonlinear Analysis 58 (2004), pp. 175-204.

[CR71] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues,* J. Funct. Anal. 8, 1971, pp. 321-340.

[dBS97] A. de Bouard and J. C. Saut, *Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev-Petviashvili solitary waves*, SIAM J. Math. Anal., Vol 28, No. 5, September 1997, pp. 1064-1085.

[Fa98] A. Farina, *Finite-energy solutions, quantization effects and Liouville-type results for a variant of the Ginzburg-Landau systems in* $\mathbf{R}^k$, Diff. Int. Eq. 11, No. 6 (1998), pp. 875-893.

[Fa03] A. Farina, *From Ginzburg-Landau to Gross-Pitaevskii,* Monatsh. Math. 139 (2003), pp. 265-269.

[GZ08] P. Gérard, Z. Zhang, *Orbital stability of traveling waves for the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation,* arXiv :0807.4090.

[GR74] J. Grant, P.H. Roberts, *Motions in a Bose condensate III. The structure and effective masses of charged and uncharged impurities,* J. Phys. A : Math., Nucl. Gen., 7 (1974), pp. 260-279.

[Gr03] P. Gravejat, *A non-existence result for supersonic travelling-waves in the Gross-Pitaevskii equation,* Comm. Math. Phys. 243, No. 1 (2003), pp. 93-103.

[JR82] C. A. Jones, P. H. Roberts, *Motions in a Bose condensate IV, Axisymmetric solitary waves,* J. Phys A : Math. Gen. 15 (1982), pp. 2599-2619.

[JPR86] C. A. Jones, S. J. Putterman, P. H. Roberts, *Motions in a Bose condensate V. Stability of wave solutions of nonlinear Schrödinger equations in two and three dimensions,* J. Phys A : Math. Gen. 19 (1986), pp. 2991-3011.

[Ka72] T. Kato, *Schrödinger operators with singular potentials,* Israel J. Math. 13 (1972), pp. 135-148.

[LiBo96] Y. A. Li, J. L. Bona, *Analyticity of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, SIAM J. Math. Anal., 27 (1996), pp. 725-737.

[Lieb77] E. H. Lieb, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation,* Studies Appl. Math. 57 (2) (1977), pp. 93-106.

[Lio84] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part I,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire, 1 (1984), pp. 109-145.

[Lop1] O. Lopes, *Radial symmetry of minimizers for some translation and rotation invariant functionals,* J. Diff. Eq. 124 (1996), 378-388.

[Lop2] O. Lopes, *Radial and nonradial minimizers for some radially symmetric functionals,* Eletr. J. Diff. Eq. (1996), No. 3, pp. 1-14.

[Lop3] O. Lopes, *Nonlocal variational problems arising in long wave propagation,* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000), pp. 501-528.

[Ra71] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems,* J. Funct. Anal. 7 (1971) pp. 487-513.

[W96] M. Willem, *Minimax Theorems,* Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 24, Birkhäuser, Basel, 1996.